

Das von Neumannsche Theorem

von Martin Fiedler

Einleitung

In der Mitte des letzten Jahrhunderts beschäftigten sich viele Physiker mit der Frage nach der Vollständigkeit der Quantentheorie. Einige Physiker, zum Beispiel Einstein, Bohm und de Broglie, waren der Meinung, dass die statistischen Einschränkungen der Quantenmechanik nicht aus einer akasalen Natur kommen. Sie gingen davon aus, dass eine kausale Ergänzung der Quantentheorie möglich ist. Der statistische Charakter der Quantentheorie lässt sich mit einem simplen Beispiel verdeutlichen: Die mittlere Lebensdauer eines Neutrons beträgt 1000s. Diese mittlere Lebensdauer sagt über ein spezielles Neutron und über seine individuelle Lebensdauer nichts aus. Vergleichbar ist dies mit der mittleren Lebensdauer eines Mitteleuropäers, die 70 Jahre beträgt. Um vorher zu sagen wie lange ein spezieller Mitteleuropäer lebt sind zusätzliche Informationen notwendig, die etwa den Lebenswandel betreffen.

Zusätzliche Informationen über die innere Struktur des Neutron sind uns allerdings unbekannt. Diese könnten in Form von verborgenen Variablen auftreten.

Für die Struktur der Variablen gab es unterschiedliche Modelle:

- *Innere Struktur:*
Die Neutronen sind vergleichbar mit identischen Bomben, welche äußerlich nicht unterscheidbar sind, aber über einen unterschiedlich eingestellten Zeitzünder verfügen, der den Detonationszeitpunkt bestimmt
- *Äußere Struktur:*
Die Neutronen sind vergleichbar mit identisch gebauten, aber qualitativ schlechten Booten, die auf rauer See den Wellen ausgesetzt sind. Wenn eine große Welle ein Boot trifft zerschellt dieses. Dieses Modell geht also von einer Fluktuation des Vakuums aus.

Die Frage nach den Ursachen für den statistisch Charakter der Quantentheorie spaltet die Physik.

Während die Deterministen um Einstein der Ansicht sind, dass eine kausale Ergänzung der Quantenmechanik möglich sein muss. Sie verglichen den statistischen Charakter der Quantenmechanik etwa mit dem statistischen Charakter der Thermodynamik. Diese liefert zwar eine gute Beschreibung der Gleichgewichtszustände, Phänomene wie die Brown'sche Molekularbewegung sind aus der Thermodynamik hingegen nicht zu erklären. Um diese Phänomene zu erklären ist Wissen über die atomare Struktur notwendig.

Um die Quantenmechanik kausal zu ergänzen bedienten sich die Deterministen dem Modell der verborgenen Variablen. Über die Messbarkeit der verborgenen Variablen wollte Einstein keine Aussage treffen. Die Deterministen waren sich über die Natur der verborgenen Variablen nicht einig. So war die Messbarkeit der Variablen für Albert Einstein keine notwendige Voraussetzung, während andere Realisten der Ansicht waren, dass die Entdeckung und Messung der verborgenen Variablen nur eine Frage der Zeit sei.

Einen indeterministischen Ansatz hingegen vertraten Bohr, Born, Pauli und Heisenberg. Sie betrachteten die Frage nach der individuellen Lebensdauer als unwissenschaftlich. Sie sahen den statistischen Charakter als gegeben und die Quantenmechanik als vollständig an.

J. von Neumann errichtete 1932 ein Bollwerk gegen die kausale Philosophie. Er tat dies mit seinem Theorem, wonach eine kausale Ergänzung der Quantenmechanik nicht möglich ist. Die Vertreter der Kopenhagener Deutung betonten die Bedeutung des von Neumann'schen Theorems.

De Broglies Paradoxon

Mit einem einfachen Beispiel lässt sich ein Paradoxon schaffen, welches die Vollständigkeit der Quantenmechanik in Frage stellt.

Vollständigkeit bedeutet, dass nichts der realen Wirklichkeit existiert, was nicht im quantenmechanischen Formalismus enthalten ist.

Betrachten wir im speziellen ein Elektron, welches also vollständig durch die Wellenfunktion $\Phi(x,y,z,t)$ beschrieben ist. Dieses Elektron befinde sich in einer Schachtel V mit vollständig reflektierenden Wänden. Wenn wir jetzt die Schachtel in zwei Teilschachteln V_1 und V_2 unterteilen und diese räumlich trennen, dann wird das System durch die Wellenfunktionen $\Phi_1(x,y,z,t)$ in der Schachtel V_1 und $\Phi_2(x,y,z,t)$ in Schachtel V_2 gegeben. Die Wahrscheinlichkeit P_1 das Elektron in V_1 zu finden, ist durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion Φ_1 gegeben, analog dazu ergibt sich P_2 aus Φ_2 . Beide Wahrscheinlichkeiten müssen 0,5 betragen.

Öffnen wir jetzt die Schachtel V_1 am Ort A , so erhalten wir ein Ergebnis für die Wahrscheinlichkeit P_1 von entweder 0 oder 1. Da für P_{ges} der Wert 1 erreicht werden muss ergibt sich aus dem Nachweis an der Stelle A eine Vorhersage für P_2 an der Stelle B .

Ein Auffinden des Elektrons in V_1 vernichtet die Möglichkeit eines Auffindens in V_2 , wenn wir davon ausgehen, dass vorher ein halbes Elektron in V_1 und ein halbes Elektron in V_2 existierten. Der Ansatz der Realisten geht nun allerdings davon aus, dass das Elektron in diesem Fall schon vorher in V_1 existierte und nicht in beiden Schachteln koexistierte.

Realisten gehen davon aus, dass die Messung also nicht das halbe Elektron zerstört, sondern, dass es einen zusätzlichen Parameter λ geben muss, der das Ergebnis der Messung voraussagt. Die positivistische Philosophie hingegen setzt Überlegungen über Beobachtungen. Eine objektive Realität wird nicht zugelassen.

Das Spin $1/2$ - Modell

Um das nachfolgende Beispiel zu verstehen ist eine kurze Zusammenfassung des Spin $1/2$ -Modells nötig:

Wir stellen die Spin- Observable als hermitesche (2×2) -Matrizen dar. Die allgemeine Form ist:

$$R = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \beta_0^* & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

mit α_0 und γ_0 reell.

Mit Hilfe der Pauli- Matrizen $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Erhalten wir $R = \alpha I + \vec{\sigma} \cdot \vec{\beta}$ mit $\alpha_0 = \alpha + \beta_3$, $\gamma_0 = \alpha - \beta_3$, $\beta_0 = \beta_1 - i\beta_2$

Wir nehmen an, dass das Ergebnis einer Messung immer einem Eigenwert der zugeordneten Matrix entspricht. Wir lösen also die Eigenwertgleichung $R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Als Lösungen erhalten wir daraus $r = \alpha \pm |\vec{\beta}|$.

Für die Wahrscheinlichkeiten die Zustände $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu messen erhalten wir

$$p_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\beta_3}{|\vec{\beta}|} \right] \text{ bzw. } p_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\beta_3}{|\vec{\beta}|} \right]$$

Anschaulicher Beweis des von Neumannschen Theorems

Zunächst konstruieren wir ein dispersionsfreies System.

Wir betrachten die eine Spin- Observable R , die wie oben beschrieben durch eine hermitesche (2×2) -Matrix wiedergegeben wird. Dann führen wir N Messungen an identischen Systemen durch, aus denen wir die Ergebnisse $R = r_1, r_2, \dots, r_N$ erhalten. Diese Ergebnisse müssen jeweils einem der Eigenwerte entsprechen.

Dann betrachten wir R^2 mit $R^2 = r_1^2, r_2^2, \dots, r_N^2$

Wir nehmen an, dass die Resultate durch λ vorhersagbar seien, so ergibt sich $r_i = r(\lambda_{i1})$ wobei jedes λ_i der Wert von λ vor Messung ist. Präparieren wir jetzt alle λ gleich, so erhalten wir

$$R = r_1 = r_N = r(\lambda_0)$$

Für dieses System mit festem λ resultiert daraus für die Mittelwerte

$$\langle R \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i = r(\lambda_0) \quad \langle R^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^2 = r^2(\lambda_0)$$

Berechnen wir die Dispersion $\Delta R = \sqrt{\langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2}$, so fällt auf, dass wir eine dispersionsfreie Observable geschaffen haben.

Wählen wir jetzt verschiedene Observablen R, S, T mit den zugehörigen verborgenen Parametern λ, μ, ν so können wir auf diese Art ein dispersionsfreies Ensemble konstruieren. Ein volles Ensemble lässt sich immer als Summe dispersionsfreier Subensembles beschreiben. Daraus folgern wir:

Die Existenz verborgener Variabler zieht die Existenz von dispersionsfreien Ensembles nach sich!

Das von Neumannsche Theorem leitet sich aus drei Axiomen her:

- Axiom 1: Es gibt eine eindeutige Zuordnung zwischen Spin- Observablen und hermiteschen (2×2) -Matrizen
- Axiom 2: Wenn die Observable R der Matrix R entspricht, dann entspricht die Observable $f(R)$ der Matrix $f(R)$
- Axiom 3: Sind R und S beliebige Observable und a und b reelle Zahlen, dann gilt die Linearität der Mittelwerte:

$$\langle aR + bS \rangle = a\langle R \rangle + b\langle S \rangle$$

Zum Beweis:

Wir betrachten ein dispersionsfreies Ensemble aus drei Observable mit einer verborgenen Variable λ . Im speziellen wählen wir

$$R = \sigma_1, \quad S = \sigma_2, \quad T = \vec{\sigma} \cdot n$$

wobei für n gelten soll $n = (1, 1, 0)$

Weiterhin gilt

$$T = R + S$$

Im dispersionsfreien System erhalten wir

$$\langle R \rangle = r_0 \text{ und analog } \langle S \rangle = s_0 \text{ sowie } \langle T \rangle = t_0$$

Aus Axiom 1 folgt somit

$$\langle T \rangle = \langle R \rangle + \langle S \rangle$$

und auch

$$t_0 = r_0 + s_0$$

Die Eigenwerte sind für R und S ± 1 , für T $\pm \sqrt{2}$. Es würde sich also die Gleichung

$$\pm \sqrt{2} = \pm 1 \pm 1$$

ergeben. Diese Gleichung ist aber für keine Kombination der Vorzeichen möglich!

Wenn die Axiome also richtig sind können dispersionsfreie Systeme nicht existieren.

Formeller Beweis

Fassen wir also noch von Neumanns Axiome zusammen:

- Wenn eine Observable durch den Operator \hat{O} wiedergegeben wird, so wird die Funktion f der Observablen durch den Operator $\hat{f}(\hat{O})$ wiedergegeben.
- Wenn Observablen durch die Operatoren \hat{O}, \hat{O}', \dots wiedergegeben werden, so wird die Summe der Observablen durch $\hat{O} + \hat{O}' + \dots$ wiedergegeben.
- Ist die Observable \hat{O} nicht negativ, so ist auch ihr Erwartungswert $\langle \hat{O} \rangle$ nicht negativ.
- Sind \hat{O}, \hat{O}', \dots beliebige Observablen und a, b, \dots reelle Zahlen, dann gilt

$$\langle a\hat{O} + b\hat{O}' + \dots \rangle = a\langle \hat{O} \rangle + b\langle \hat{O}' \rangle + \dots$$

Ferner gilt:

$$\langle \hat{O} \rangle = Sp[\hat{\rho} \hat{O}]$$

Behauptung: Gilt die Gleichung $\langle \hat{O} \rangle = Sp[\hat{\rho} \hat{O}]$, dann kann es keine dispersionsfreien Systeme geben.

Beweis:

Ist eine Observable dispersionsfrei, so gilt $\langle \hat{O}^2 \rangle = \langle \hat{O} \rangle^2$ für einen bestimmten Zustand gilt

$$\text{zudem } Sp[\hat{\rho} \hat{O}^2] = [Sp(\hat{\rho} \hat{O})]^2.$$

Wählen wir jetzt $\hat{O} = \hat{P}_\psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, so folgt aus $\hat{P}_\psi = \hat{P}_\psi^2$ und $Sp(\hat{\rho} \hat{P}_\psi) = \langle \hat{\rho} \psi | \psi \rangle$ unmittelbar

$$\langle \hat{\rho} \psi | \psi \rangle = \langle \hat{\rho} \psi | \psi \rangle^2$$

Woraus folgt, dass $\hat{\rho}$ entweder 0 oder 1 ist. Da 0 als Wert nicht sinnvoll ist folgt, wenn

man dieses Ergebnis in $Sp[\hat{\rho} \hat{O}^2] = [Sp(\hat{\rho} \hat{O})]^2$ einsetzt, so erhält man aus $Sp[\hat{I}]$, dass die Observable nicht dispersionsfrei ist.

Q.E.D.

Diskussion

Wie anfangs erwähnt ist das von Neumannsche Theorem nicht unumstritten. Wären die Axiome richtig, ist eine kausale Ergänzung der Quantenmechanik nicht sinnvoll. Auf den ersten Blick betrachtet erscheinen die von Neumannschen Axiome logisch und einleuchtend. Das erste Axiom ist unstrittig richtig, Axiom 2 wird im Beweis nicht verwendet. Kritik muss sich also gegen Axiom 3 richten. Ein Beispiel für die Verletzung von Axiom 3 werden wir im folgenden konstruieren.

- Hypothese 1: Spin $1/2$ – Teilchen können durch rotierende Kugeln die sich entlang der y-Achse bewegen und deren Spin $\vec{\lambda}$ senkrecht zur Bewegungsrichtung steht simuliert werden.
- Hypothese 2: Die Wahrscheinlichkeitseigenschaft des $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - Zustands werde durch die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\theta)$ gegeben, wobei θ der Winkel zwischen $\vec{\lambda}$ und der z-Achse ist: $p(\theta) = \frac{1}{2} \cos \theta$ für $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $p(\theta) = 0$ sonst
- Hypothese 3: Die Messung bestimmt Vorzeichen der Projektion von $\vec{\lambda}$ auf $\vec{\beta}$, multipliziert das Ergebnis mit $|\vec{\beta}|$ und addiert noch α .

Bei Messung von σ_3 liegt der Winkel immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. Die Projektion ist also niemals negativ, das Ergebnis ist immer +1. Für die Wahrscheinlichkeiten, die jeweiligen Zustände zu finden erhalten wir nach längerer Rechnung

$$p_1 = \frac{1 + \cos \theta_\beta}{2} \text{ und } p_2 = \frac{1 - \cos \theta_\beta}{2}$$

mit

$$\cos \theta_\beta = \frac{\hat{k} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = \frac{\beta_3}{|\vec{\beta}|}$$

aus der Winkelintegration erhalten wir dann

$$p_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\beta_3}{|\vec{\beta}|} \right] \text{ bzw. } p_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\beta_3}{|\vec{\beta}|} \right]$$

Wir erhalten also Wahrscheinlichkeiten, die mit den quantenmechanischen Wahrscheinlichkeiten übereinstimmen.

Das Ergebnis ist aber vollständig durch λ bestimmt!

Wir betrachten ein festes λ in der Winkelhalbierenden des y, z- Quadranten und messen $\sigma_2, \sigma_3, \vec{\sigma} \cdot \vec{m}$ in unterschiedlichen Teilen

Es gilt $\vec{\sigma} \cdot \vec{m} = \sigma_2 + \sigma_3$, die Erwartungswerte von σ_1 und σ_2 sind 1, der von σ_3 ist $\sqrt{2}$ wir erhalten somit $\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{m} \rangle \neq \langle \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_3 \rangle$ aus Axiom 3- mit den oben genannten Eigenwerten gilt aber $\langle \vec{\sigma} \cdot \vec{m} \rangle = \langle \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_3 \rangle$.

Axiom 3 ist also nicht erfüllt!

Quellen

Bell (1966) (*)

Auletta, Kap. 32.2 (*)

Selleri, Kap. II, 4-5 (*)

von Neumann, Kap. III,2, IV,2 (*)