

# Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Skript zum ersten Vortrag am: 26.04.06

## Thema: Formalistische Grundlagen und Messprozesse in der Quantenmechanik

**Verfasser: Peter Düben**

### 1: Formalistische Grundlagen:

#### **1.1: Darstellung eines Zustands im Hilbertraum:**

In der Quantenmechanik können Zustände von Systemen nicht mehr durch einfache Variablen dargestellt werden, wie es in der Newton Mechanik der Fall ist. Der Zustand eines Systems wird hier durch einen sogenannten Zustandsvektor im Hilbertraum dargestellt. Der Hilbertraum ist hierbei ein Vektorraum über die komplexen Zahlen, auf dem ein vollständiges Skalarprodukt definiert ist. Er ist sozusagen eine Verallgemeinerung des euklidischen Raumes auf abzählbar unendlich viele Dimensionen. Man kann im Hilbertraum orthonormale Basen definieren, für die gilt:

$$\int \dots \int u_n^*(x_1, x_2, x_3, \dots) u_m(x_1, x_2, x_3, \dots) dx_1 dx_2 dx_3 \dots = \delta_{nm}$$

Der Zustandsvektor lässt sich jetzt als Linearkombination der einzelnen Elemente der Basis darstellen, es gilt:

$$\Psi(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum a_n u_n(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Die einzelnen Koeffizienten erhält man durch die Formel:

$$a_n = \int \dots \int u_n^*(x_1, x_2, x_3, \dots) \Psi(x_1, x_2, x_3, \dots) dx_1 dx_2 dx_3 \dots$$

Die Länge eines Vektors im Hilbertraum kann man berechnen, als die Summe über die Beträge der Koeffizienten zum Quadrat. Die Länge eines Vektor muss kleiner als unendlich sein. Im Hilbertraum ist die Länge eines Vektors ansonsten nicht von belang. Zwei Vektoren stellen denselben Zustand da, solange sie in dieselbe Richtung zeigen. Daher kann man die Vektoren im Hilbertraum normieren. Man nimmt die Koeffizienten alle mit dem selben reellen Faktor mal bis gilt:

$$\sum |a_i|^2 = 1$$

#### **1.2: Skalarprodukt:**

Das Skalarprodukt im Hilbertraum ist nun folgendermaßen definiert:  $(a, b) = \sum a_n^* b_n$

Man bildet die Summe über die komplex konjugierten Koeffizienten des ersten Vektors mal die Koeffizienten des zweiten Vektors.

Für zwei Zustandsvektoren ist das Skalarprodukt jetzt definiert als:

$$(\psi, \phi) = \int \dots \int \psi^*(x_1, x_2, x_3, \dots) \phi(x_1, x_2, x_3, \dots) dx_1 dx_2 dx_3 \dots = \sum a_n^* b_n$$

Hierbei sind die  $a_n$  die Koeffizienten des ersten Zustandsvektors  $\psi$  und die  $b_n$  die Koeffizienten des zweiten Zustandsvektors  $\phi$ . Die Länge eines Vektors kann man jetzt berechnen als das Skalarprodukt zwischen dem Vektor mal sich selbst. Aus den oben angeführten Rechenregeln schließt man, dass die Länge reell und positiv sein muss. Das Skalarprodukt muss linear im ersten und antilinear im zweiten Faktor sein. Es gelten also die folgenden Rechenregeln:

$$(a, \beta b + \beta' b') = \beta (a, b) + \beta' (a, b')$$

$$(\alpha a + \alpha' a', b) = \alpha^* (a, b) + \alpha'^* (a', b)$$

Hierbei sind  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  beliebige komplexe Zahlen.

### 1.3: Operatoren:

Ein Operator im Hilbertraum transformiert einen Vektor in einen anderen. Mit Operatoren werden in der Quantenmechanik Veränderungen am System dargestellt. Wenn man zum Beispiel eine Messung an einem System vornimmt, so wendet man einen Operator auf das System an. Der Operator bezieht sich dabei auf die zugehörige Variable. Wichtig sind vor allem die linearen Operatoren, für die gilt:

$$A(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha A\phi + \beta A\psi$$

Hierbei ist A der Operator. Ein Operator hat in den Rechnungen die Form einer  $n \times n$  Matrix.

Unitäre Transformationen sind invariante Transformationen, die das Skalarprodukt nicht verändern.

Eine weitere erwähnenswerte Gruppe sind die adjungierten Operatoren  $A^+$  für die gilt:

$$(\phi, A\psi) = (A^+\phi, \psi)$$

Hierbei sind vor allem die selbstadjungierten Operatoren von Bedeutung für die gilt:  $A = A^+$ . Diese Operatoren erfüllen Eigenwertgleichungen, die lauten:

$$A\psi_\nu = \lambda_\nu \psi_\nu$$

Hierbei sind die Eigenwerte  $\lambda_\nu$  reelle Zahlen. Mit Hilfe der Eigenvektoren  $\psi_\nu$  kann man eine Orthonormalbasis im Hilbertraum definieren, so dass man beliebige Zustandsvektoren als Linearkombination in der neuen Basis darstellen kann. Es gilt:

$$\phi = \sum (\psi_\nu, \phi) \psi_\nu$$

Damit kann man einen Effekt eines selbstadjungierten Operators auf einen Zustandsvektor folgendermaßen beschreiben:

$$A\phi = A \sum (\psi_\nu, \phi) \psi_\nu = \sum (\psi_\nu, \phi) A\psi_\nu = \sum (\psi_\nu, \phi) \lambda_\nu \psi_\nu$$

## 1.4: Direktes Produkt von Hilberträumen:

Man kann zwei Hilberträume, die unabhängig voneinander sind vereinigen und in einem neuen großen Hilbertraum die jeweiligen Eigenschaften der kleinen Hilberträume vereinigen. Man schreibt den neuen Hilbertraum als:  $H_1 \otimes H_2$ .

Das direkte Produkt ist linear im ersten und im zweiten Faktor. Die Definition des Skalarproduktes bleibt identisch, nur dass man jetzt nicht mehr über die einzelnen Indizes  $v$  und  $n$  summiert, sondern über die zusammengesetzten Indizes  $m$ . Hat man einen Zustandsvektor aus dem ersten Hilbertraum und einen Zustandsvektor aus dem zweiten Hilbertraum, so kann man den zusammengesetzten Zustandsvektor im großen Hilbertraum bilden, indem man das direkte Produkt aus den beiden Zustandsvektoren bildet.

## 2.: Messprozesse in der Quantenmechanik

### 2.1: Messung selbstadjungierter Operatoren

Führt man eine Messung zum selbstadjungierten Operator  $A$  durch, so erhält man als Ergebnis der Messung einen seiner Eigenwerte  $\lambda_v$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass ausgerechnet ein bestimmter Eigenwert bei der Messung herauskommt lässt sich berechnen durch:

$$p_v = |\langle \psi_v, \phi \rangle|^2$$

Hierfür müssen aber sowohl der Zustandsvektor als auch die Eigenfunktionen normiert sein. Nach der Messung befindet sich das System in einem Zustand der durch den zum Eigenwert  $\lambda_v$  zugehörigen Eigenvektor  $\psi_v$  beschrieben wird. Das System entwickelt sich dann wieder ganz normal nach der Bewegungsgleichung der Quantenmechanik, der Schrödingergleichung.

Hat man  $A, \phi, P_v \in H_1$  und  $B, \psi, Q_n \in H_2$  (hierbei sind  $P_v$  und  $Q_n$  Projektionsoperatoren) so gilt die folgende Gleichung für die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Messung gerade die Eigenwerte  $\alpha_v$  und  $\beta_n$  im ersten und zweiten Hilbertraum erhalten werden:

$$P_m = (\phi \otimes \psi, (P_v \otimes Q_n)(\phi \otimes \psi)) = (\phi, P_v \phi)(\psi, Q_n \psi)$$

Man kann natürlich auch Messungen an Operatoren mit kontinuierlichen Spektren durchführen. Hier ist es aber nicht sinnvoll zu fragen mit welcher Wahrscheinlichkeit ausgerechnet ein bestimmter Wert herauskommt, man sollte hier fragen, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Messergebnis unter einem bestimmten Wert liegt, beziehungsweise zwischen zwei bestimmten Werten. Um  $P(\lambda)$  definieren zu können muss man jetzt das Spektrum in immer kleinere Teile einteilen. So dass man mögliche Ergebnisse mit einer immer größeren Dichte vorliegen hat. Man kann das zum Beispiel auf die folgende Art machen:

$$A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^N (n + m/N) [P(n + m/N) - P(n + (m-1)/N)]$$

Hierbei geht der Index  $n$  über die natürlichen Zahlen. Die eckige Klammer drückt die Wahrscheinlichkeit aus, mit der ein Ergebnis zwischen zwei definierten Werten liegt. Die Gleichung ist im Grenzfalle  $N$  gegen unendlich ebenfalls gültig. Hier hätte man ein kontinuierliches Spektrum vorliegen. Andere Möglichkeiten sind sogenannte Stieltjes in der Mathematik. Es besteht aber die Frage ob es überhaupt sinnvoll ist mit kontinuierlichen Spektren zu rechnen, da die Messunsicherheiten für gewöhnlich so groß sind, dass man Ergebnisse sehr gut mit diskreten Spektren ausdrücken kann ohne das Ergebnis großartig zu verfälschen.

## 2.2: Beschreibung der Messung:

Man kann eine Quantenmechanische Messung sehr gut über ein direktes Produkt beschreiben. Man betrachtet die Messapparatur als einen Zustandsvektor im ersten Hilbertraum und das zu betrachtende Objekt als einen Zustandsvektor im zweiten Hilbertraum. Das direkte Produkt der beiden Hilberträume beschreibt dann das System Objekt-Apparatur.

Führt man eine Messung an einem System durch, das sich im Zustand eines der Eigenvektoren des zu messenden Operator befindetet, bei dem man das Ergebnis also eindeutig voraussagen kann, so geht man bei einer sinnvollen Messung davon aus, dass sich der Ausgangszustand der Messapparatur ( $a_0$ ) dem Zustand des Objekts ( $\sigma_k$ ) angleicht. Die Messapparatur nimmt also einen gewissen Zustand an, so dass man an der makroskopischen Apparatur den richtigen Wert ablesen kann. Es gilt:

$$a_0 \otimes \sigma_k \rightarrow a_k \otimes \sigma_k$$

Der Pfeil drückt hierbei den Moment der Messung aus.

## 2.3: Messung an zusammengesetzten Systemen:

Nimmt man eine Messung an einem System vor, das durch eine Linearkombination von Eigenvektoren beschrieben wird, so gilt analog zu oben:

$$a_0 \otimes \sum \alpha_k \sigma_k = \sum \alpha_k (a_0 \otimes \sigma_k) \rightarrow \sum \alpha_k (a_k \otimes \sigma_k)$$

Der Pfeil repräsentiert hierbei die Umsetzung der Schrödingergleichung im Verlauf der Messung. Die Wahrscheinlichkeit, dass ausgerechnet der Zustand  $v$  gemessen wird kann durch die folgende Gleichung berechnet werden:

$$\left| a_v \otimes \sigma_v, \sum \alpha_k (a_k \otimes \sigma_k) \right|^2 = \left| \sum \alpha_k (a_v, a_k) (\sigma_v, \sigma_k) \right|^2 = \left| \sum \alpha_k \delta_{vk} \right|^2 = |\alpha_v|^2$$

Hierbei gilt:  $(a_v, a_k) = \delta_{vk}$  weil das Ergebnis im makroskopischen Zustand unterscheidbar sein muss und  $(\sigma_v, \sigma_k) = \delta_{vk}$  weil die Zustände normiert sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass Apparatur und Objekt nach der Messung unterschiedliche Zustände haben ist gleich Null, da bei einer sinnvollen Messung die Messapparatur ja genau den zutreffenden Wert des Objektes anzeigen sollte.

Im Zuge der Messung reduziert man das ursprüngliche System auf genau einen der Eigenvektoren des Operators zu dem die Messung durchgeführt wird. Die Messung ist also eine sogenannte Zustandsreduktion. Das System nimmt mit der Messung einen Zustand an, der durch einen der Eigenvektoren des Systems beschrieben wird. Die Orthogonalität bleibt im isolierten System erhalten. Es verhält sich im weiteren Zeitverlauf wie es die Schrödingergleichung vorgibt.

## 2.4: Probleme bei der Beschreibung von Messprozessen:

Das große Problem bei der Beschreibung des Messprozesses in der Quantenmechanik liegt nun darin, dass man das Ergebnis der Messung nicht determiniert vorhersagen kann. Man kann nur berechnen mit welcher Wahrscheinlichkeit bei einer Messung ein bestimmtes Ergebnis herauskommt. Vor Beginn der Messung liegt das Objekt in einem klar definierten Zustand vor, der Zustandsvektor ist klar festgelegt. Führt man jetzt die Messung durch, schaut sich aber noch nicht das Ergebnis der Messung an, so weiß man lediglich, mit welcher Wahrscheinlichkeit das System einen gewissen Zustand angenommen hat. Man kann den genauen Zustand aber nicht vorhersagen. Man hat sozusagen ein Gemisch von Zuständen vorliegen. In dem Moment in dem man sich das Messergebnis anschaut geht das System wieder in einen reinen Zustand über. Man weiß jetzt welchen Eigenzustand das System angenommen hat und kann berechnen wie es sich zeitlich verhalten wird. Das Objekt hat also den Übergang: reiner Zustand → gemischter Zustand → reiner Zustand vollzogen. Derartige Übergänge sind aber mit Hilfe der Schrödingergleichung nicht berechenbar. Hier kann man nur Übergänge von reinen in reine Zustände und von gemischten in gemischte Zustände berechnen. Man kann nur sagen, dass bei einer Messung das System sich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in einen bestimmten Zustand umwandeln wird. Der Zustandsvektor wird dann zum statistischen Rechenwerkzeug und kann die Realität nicht mehr zuverlässig beschreiben.

Schrödinger hat versucht dieses Problem mit Hilfe der Schrödingerkatze zu illustrieren. Man stelle sich vor, man hätte einen großen Kasten, der schallisoliert ist, von dem man also nicht weiß was in ihm geschieht. In diesem Kasten befindet sich eine Quantenmechanische Messapparatur mit zwei möglichen Ergebnissen, eine Todesmaschine die an die Apparatur angeschlossen ist und eine Katze. Ergibt die Messung das Ergebnis 1, so wird die Katze im Kasten getötet. Ergibt die Messung das Ergebnis 2, so bleibt die Katze am Leben. Die Katze ist vor der Messung lebendig, befindet sich also in einem reinem Zustand. Hat man die Messung durchgeführt, den Kasten aber noch nicht geöffnet so befindet sich die Katze in einem gemischten Zustand zwischen tot und lebendig. Man kann über den Zustand der Katze nur aussagen, dass sie mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit tot und mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit lebendig ist. Erst wenn man den Kasten öffnet und sich die Katze anschaut kennt man wieder den reinem Zustand.

Der Zustandsvektor kann sich also auf zwei verschiedene Arten verändern. Einerseits verändert er sich unitär gemäss der Schrödingergleichung und andererseits wird der Zustandsvektor zum Beispiel im Zuge einer Messung auf einen Zustand reduziert. Diese Art der Veränderung ist nicht vorhersehbar und nicht unitär.

## 2.5: Weitere Ausführungen zur Messung:

Bei einer Messung verändert sich der Betrag der Unsicherheit nicht. Hat man zu einer gewissen Zeit  $t=0$  eine Ungewissheit bei einer Messung von  $Q$ , so gilt nach einer gewissen Zeit  $t$  für die Unsicherheit:

$$Q_t = \exp\left(-\frac{iHt}{\eta}\right) Q_0 \exp\left(\frac{iHt}{\eta}\right)$$

Die Unsicherheit entwickelt sich also im Rahmen der Schrödinger-Gleichung. Die spätere Information ist vielleicht im Zuge der Zunahme der Entropie weniger gültig, aber der Betrag der Unsicherheit bleibt gleich.

Führt man jetzt zu verschiedenen Zeitpunkten  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  Messungen zu verschiedenen Operatoren  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$  durch, so muss man beachten, dass sich Operatoren und Eigenfunktionen zum Operator nach der Schrödinger-Gleichung zeitlich verändern. Es gilt:

$$\begin{aligned} Q_j^H &= e^{iHt_j} Q_j e^{-iHt_j} \\ \varphi_k(j) &= e^{iHt_j} \psi_k(j) \\ Q_j^H \varphi_k(j) &= q_k(j) \varphi_k(j) \end{aligned}$$

Führt man die Messungen jetzt nacheinander durch, so gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass man bei den Messungen bestimmte Ergebnisse  $q_\alpha(1), q_\beta(2), \dots, q_\mu(n)$  in eben dieser Reihenfolge erhält:

$$(\phi, \varphi_\alpha(1)) (\varphi_\alpha(1), \varphi_\beta(2)) \dots (\varphi_\lambda(n-1), \varphi_\mu(n))$$

Man bildet also das Skalarprodukt aus dem Zustandsvektor und dem zum ersten Messergebnis passenden zeitlich veränderlichen Eigenvektor. Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der ersten Messung eben dieser Eigenwert als Ergebnis herauskommt. Der Zustand nimmt nun den Zustand des ersten Eigenvektors an und man multipliziert den neuen Zustandsvektor mit dem folgenden Eigenvektor. Dies führt man bis zur letzten Messung weiter durch. Man kann hier wieder nicht das Messergebnis voraussagen, sondern nur die Wahrscheinlichkeit mit der die Messergebnisse auftreten. Der Ausgang aufeinander folgender Messungen ist durch die Gesetze der Quantenmechanik nur durch Wahrscheinlichkeitsrelationen miteinander verbunden.

Die Reihenfolge mit der man die Messungen durchführt ist hierbei von ganz entscheidender Bedeutung. Mit der Heisenbergschen Unschärferelation ( $\Delta x \Delta p \geq \eta/2$ ) kann man sich zum Beispiel leicht klar machen, dass wenn man zunächst den Ort und dann den Impuls eines Teilchen misst man als Ergebnis den Impuls exakt festgelegt hat über den Ort aber keine genauen Aussagen mehr machen kann. Misst man zunächst den Impuls und dann den Ort, so ist der Ort genau bestimmt und man kann über den Impuls keine Aussagen mehr machen.

## 2.6: Der Stern-Gerlach-Versuch

Als Beispiel für eine quantenmechanische Messung kann man der Stern-Gerlach-Versuch anführen. Hier schickt man einen Teilchenstrahl, der aus gleichen Teilchen

mit zwei verschiedenen Spinpolarisationen besteht durch ein inhomogenes Magnetfeld. Zeigt das magnetische Moment der Teilchen in Richtung des zunehmenden Magnetfeldes, so wird das Teilchen in Richtung abnehmenden Magnetfeld abgelenkt und umgekehrt. Auf diese Weise kann man den Teilchenstrahl in zwei Teilchenstrahlen aufsplitten, man hat also eine Messung der Spinpolarisation vorgenommen. Man kann davon ausgehen, dass man die Teilchenstrahlen mit einem geeigneten Magnetfeld wieder vereinigen kann. Dies ist zwar experimentell kaum realisierbar, aber theoretisch möglich. Der wiedervereinigte Strahl hätte jetzt wieder dieselben Eigenschaften wie vor der Messung. Man könnte man aber über die Spinpolarisation der Teilchen keine Aussagen mehr treffen. Man hätte quasi die Messung rückgängig gemacht. Die Eigenschaften des Gesamtsystems sind dann durch die Wahrscheinlichkeitsverteilungen korrekt repräsentiert worden, da die Partikel über die gesamte Messung der Bewegungsgleichung gefolgt sind. Dies würde dafür sprechen, dass die Theorie der Quantenmechanik tatsächlich zutrifft.

## 2.7: Mögliche Lösungen des Problems:

Es hat bis heute viele verschiedene Versuche gegeben, das Messproblem zu lösen, die beiden wichtigsten sind die Theorie der versteckten Variablen und die Vielweltentheorie.

Die Theorie der versteckten Variablen geht davon aus, dass die Gleichungen der Quantenmechanik und die Beschreibung durch den Zustandsvektor unvollständig sind. Sie sagt, dass es versteckte Variablen gibt, die man bis heute noch nicht gefunden hat, mit denen man das Ergebnis einer Messung bestimmt voraussagen kann. Es gibt hierbei zum Beispiel den Ansatz, dass die Schrödingergleichung nichtlinear sein müsste. Leider führt dieser Ansatz zu sehr komplizierten Gleichungen und bis heute ist es nicht gelungen eine Theorie zu entwickeln, die bessere Ergebnisse liefert als die Quantenmechanik.

Die Vielweltentheorie hat eine andere Art, das Messproblem zu erklären. Der sogenannte Heisenbergschnitt stellt die Trennlinie zwischen System und Beobachter da. Wenn man ein System A mit der Messapparatur M misst, so kann man das Ergebnis der Messung zunächst mit einem Roboter M' einlesen lassen und das Ergebnis dann vom Roboter ablesen. Es macht für das Ergebnis der Messung und den Endzustand des Systems offenbar keinen Unterschied ob man den Roboter zum System oder zum Experimentator hinzuzählt. Es gilt:

$$A + M / M' + E \cong A + M + M' / E$$

Folglich könnte man auch den Ansatz machen das man den Experimentator selbst zum System hinzuzählt. Der Experimentator selbst würde sich dann mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in einen der verschiedenen Zustände einfinden. Die Vielweltentheorie geht davon aus, dass die Welt eine Art Superposition aller Zustände ist, die in der Praxis hätten passieren könne. Es gibt für jeden Ausgang einer Messung eine eigene Welt.

Das Problem der Messung ist seit Generationen von Physikern sehr umstritten. Viele bedeutende Physiker haben sich im Laufe ihres Lebens nie mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung abfinden können. Andererseits liefert die Quantenmechanik mit ihrer Wahrscheinlichkeitsverteilung richtige Ergebnisse. So dass sich viele Physiker einfach mit ihr zufrieden geben und die Unbestimmtheit hinnehmen.