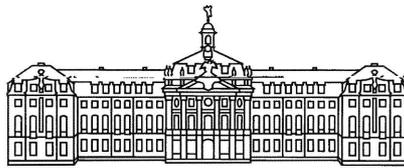


# Dekohärenz

Simon Papenkort

14. Juni 2006



## Inhaltsverzeichnis

|          |                                 |           |
|----------|---------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Problem</b>                  | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Ideale Messung</b>           | <b>3</b>  |
| <b>3</b> | <b>Dichtematrix</b>             | <b>5</b>  |
| <b>4</b> | <b>Robuste Zustände</b>         | <b>7</b>  |
| <b>5</b> | <b>Optisch aktive Moleküle</b>  | <b>7</b>  |
| <b>6</b> | <b>Streuprozesse</b>            | <b>8</b>  |
| <b>7</b> | <b>Beispiele</b>                | <b>10</b> |
| 7.1      | Gaußsche Wellenpakete . . . . . | 10        |
| 7.2      | Oszillator . . . . .            | 11        |
| 7.3      | Doppelspalt . . . . .           | 11        |
| <b>8</b> | <b>Quanten-Zeno-Effekt</b>      | <b>11</b> |

Was unterscheidet klassische von quantenmechanischen Objekten? Wie ist der Übergang zwischen der Quantenmechanik und der klassischen Physik beschaffen? Es ist bis heute kein Phänomen bekannt, das der Quantentheorie widerspricht, vielleicht mit der einzigen Ausnahme, dass bestimmte („klassische“) Phänomene überhaupt existieren. Trotz des großen Erfolgs der Quantenmechanik herrscht immernoch Uneinigkeit über ihre Interpretation, und der klassische Grenzfall bildet das Kernproblem im Verständnis. Diesem wollen wir uns nun mit der Dekohärenztheorie nähern, welche durch die Berücksichtigung der Umgebung des Systems das Entstehen von klassischen Eigenschaften erklärt.

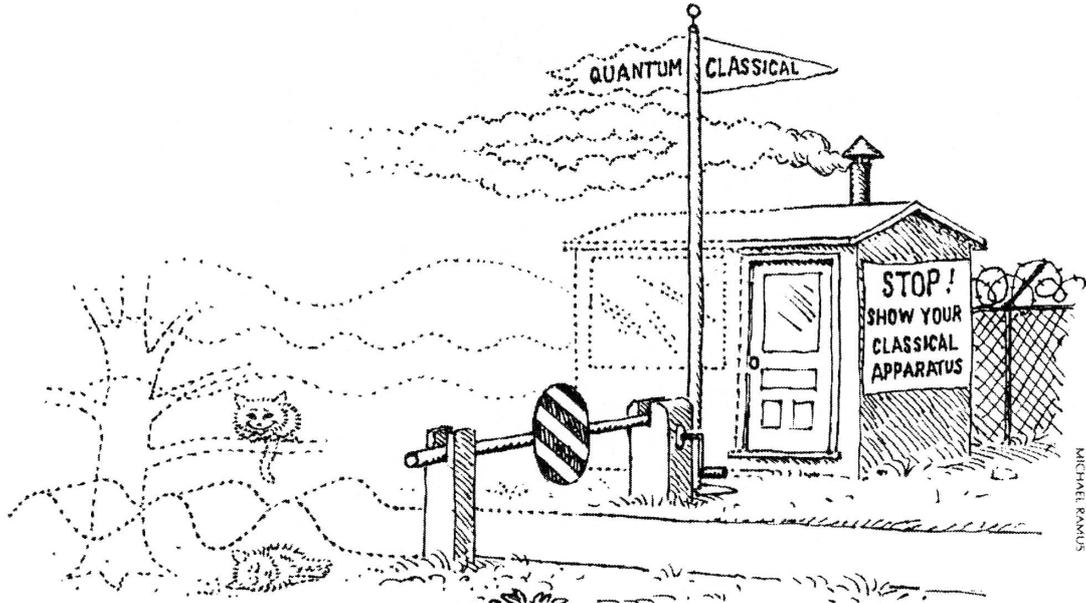
## 1 Problem

Es war Dirac, der zuerst postulierte, dass das Superpositionsprinzip *das* fundamentale Prinzip der Quantentheorie ist. Davon ausgegangen, dass die Quantentheorie universell gültig ist, ist es zunächst vollkommen unverständlich, warum makroskopische Objekte sich klassisch und mikroskopische sich quantenmechanisch verhalten. Üblicherweise wird, um dieses Problem zu lösen, angenommen, dass die klassische Physik als Grenzfall enthalten ist, ähnlich zum Grenzfall der kleinen Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie. Es wird argumentiert, dass aufgrund ihrer großen Masse die die Objekte beschreibenden Wellenpakete räumlich und zeitlich stark lokalisiert sind und sich näherungsweise nicht verbreitern. So scheint es zunächst, dass sich die Newton'sche Mechanik aus den Ehrenfestgleichungen folgern lässt. Es bleibt aber auch weiterhin unerklärlich, warum sich ein makroskopisches Objekt nicht in einer Superposition aus zwei lokalisierten Gaußschen Wellenpaketen befindet, z.B. die berühmte Schrödinger Katze sich nicht in einer Superposition der Zustände „tot“ und „lebendig“ befindet. Diese Zustände beschreiben natürlich nicht nur ein Ensemble aus Makrozuständen, sondern führen zu einem vollkommen neuen Zustand, im gleichen Sinne, wie Superposition von einem  $K$ -Meson und seinem Antiteilchen zu den „neuen“ Teilchen  $K_{\text{long}}$  und  $K_{\text{short}}$  führt.

Die Kopenhagener Interpretation verbietet an dieser Stelle die nicht erwünschten Superpositionen per Postulat und unterscheidet streng zwischen der quantenmechanischen und klassischen Welt. Es bleibt jedoch unklar, wo diese Grenze zu ziehen ist und wie sich die solche Superauswahlregeln der klassischen Welt charakterisieren lassen. Zudem widerspricht dieser Lösungsweg der Allgemeingültigkeit der Quantenmechanik, da sich alle makroskopischen Objekte aus mikroskopischen zusammensetzen. Es müsste somit eine weitere, allgemeinere Theorie für das Mesoskopische existieren, die die Quantentheorie und klassische Physik beinhaltet. Die Dekohärenztheorie verfolgt einen anderen Lösungsweg und zeigt, dass sich die Superauswahlregeln bei einer realistischen Beschreibung als Konsequenz der Umgebung in der Quantenmechanik enthalten sind.

## 2 Ideale Messung

Das Problem des Übergangs zwischen der klassischen und quantenmechanischen Welt ist eng mit dem Messproblem verknüpft, da gewöhnlich der Messapparat einer klassischen



aus: Zurek, W. (1991), Decoherence and the Transition from Quantum to Classical, Physics Today 44 (Oct.), 36-44

und das zu messende System einer quantenmechanischen Beschreibung genügt. Dies führt uns direkt zur idealen Messung.

Das zu messende System  $S$  befinde sich vor der Messung im Eigenzustand  $|n\rangle$ . Dabei sei  $\{|n\rangle\}$  ein vollständiges Orthonormalsystem. Der Messapparat  $A$  habe die Zeigerzustände  $|\Phi\rangle$ . Die ideale Messung lässt sich quantenmechanisch wie folgt beschreiben:

$$|n\rangle |\Phi_0\rangle \xrightarrow{SG} |n\rangle |\Phi_n\rangle \quad (1)$$

Das System ist von der Messung unbeeinflusst und der Zustand  $|n\rangle$  ändert sich nicht. Nach der Messung befindet sich das System und der Apparat in einem Produktzustand und der Zeigerzustand  $|\Phi_n\rangle$  gibt den Zustand  $|n\rangle$  des Systems an. Dies entspricht soweit auch noch unseren Erwartungen an eine klassische Messung. Nehmen wir jedoch an, dass sich das System vor der Messung in einem Superpositionszustand  $\sum_n c_n |n\rangle$  befunden hat, folgt aufgrund der linearen Schrödingergleichung:

$$\left( \sum_n c_n |n\rangle \right) |\Phi_0\rangle \xrightarrow{SG} \sum_n c_n |n\rangle |\Phi_n\rangle \quad (2)$$

Eine klassische Interpretation des Zustands des Gesamtsystem  $AS$  nach der Messung ist nicht möglich, da es sich hierbei um einen verschränkten Zustand handelt, der einer Superposition aller möglichen Messergebnisse entspricht. Die Messung lässt sich bis zu diesem Punkt mittels der Schrödingergleichung beschreiben, sie ist jedoch noch nicht abgeschlossen und wird deshalb *premeasurement* genannt. In der Kopenhagener Inter-

pretation folgt dem premeasurement ein *Kollaps*:

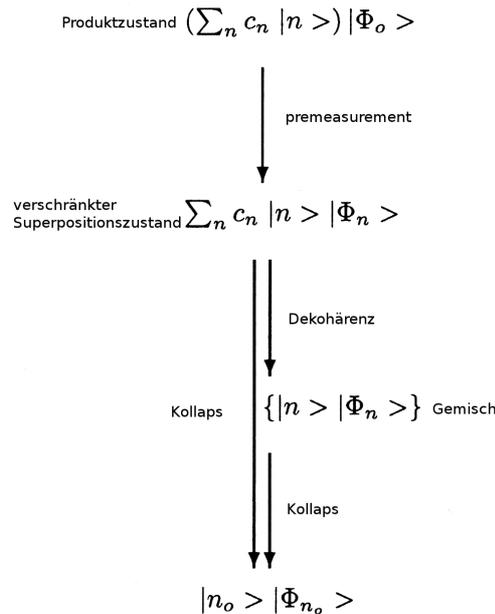
$$\sum_n c_n |n\rangle |\Phi_n\rangle \longrightarrow |n_0\rangle |\Phi_{n_0}\rangle \quad (3)$$

Der Superpositionszustand kollabiert und liefert das gewünschte klassische Messergebnis  $|n_0\rangle |\Phi_{n_0}\rangle$ . Der Kollaps folgt aber nicht aus der Schrödingergleichung, sondern ist relativ willkürlich festgelegt. Denkbar wäre auch, dass er zu einem anderen Zeitpunkt, oder alternativ eine Verzweigung im Sinne der Vielweltentheorie stattfände.

Um dieses Dilemma zu lösen, wäre es denkbar die Schrödingergleichung durch einen nichtlinearen Term entsprechend zu modifizieren. Von diesem Vorhaben nehmen wir aber aus naheliegenden Gründen Abstand. Stattdessen nähern wir uns dem Kollaps mithilfe der Dekohärenztheorie und machen ihn (vielleicht) überflüssig. Hierzu verschieben wir den Heisenberg-Schnitt bis unmittelbar vor dem Beobachter. Wir werden zeigen, dass aus dem verschränkten Superpositionszustand  $\sum_n c_n |n\rangle |\Phi_n\rangle$  ein Gemisch bildet

$$\sum_n c_n |n\rangle |\Phi_n\rangle \longrightarrow \{|n\rangle |\Phi_n\rangle, p_n = |c_n|^2\} \quad (4)$$

dessen Zustände mit den richtigen quantenmechanischen Wahrscheinlichkeiten  $|c_n|^2$  auftreten.



### 3 Dichtematrix

Dieser Zustand des Gemisches lässt sich, wie aus der Statistischen Physik bekannt, am besten mit einer Dichtematrix beschreiben. Das System befindet sich nach dem premea-

surment in dem Zustand

$$|\Psi\rangle = \sum c_n |n\rangle |\Phi_n\rangle. \quad (5)$$

Da es sich hierbei um einen reinen Zustand handelt, ist die Dichtmatrix gleich dem Projektionsoperator:

$$\begin{aligned} \rho &= |\Psi\rangle \langle\Psi| \\ &= \left( \sum_n c_n |n\rangle |\Phi_n\rangle \right) \left( \sum_m c_m^* \langle m| \langle\Phi_m| \right) \\ &= \sum_{nm} c_n c_m^* |n\rangle |\Phi_n\rangle \langle m| \langle\Phi_m| \end{aligned} \quad (6)$$

Weil  $|\Psi\rangle$  ein Superpositionszustand ist, ist die Dichtmatrix  $\rho$  nicht diagonalisierbar. Während die Diagonalelemente die Wahrscheinlichkeit für das System angeben, sich in diesen Zuständen zu befinden, sind die Werte außerhalb der Diagonalen für die Interferenzen verantwortlich und werden deshalb auch Kohärenzen genannt.

Im Allgemeinen betrachtet man nicht das gesamte System, sondern interessiert sich für ein Teilsystem  $S$ . Dieses wird durch die reduzierte Dichtmatrix  $\rho_S$  beschrieben, die man durch Spurbildung über das Apparatsystem erhält:

$$\begin{aligned} \rho_S &= \sum_k \langle\Phi_k| \rho |\Phi_k\rangle \\ &= \sum_{knm} c_n c_m^* \langle\Phi_k|\Phi_n\rangle \langle\Phi_m|\Phi_k\rangle |n\rangle \langle m| \end{aligned} \quad (7)$$

Da  $\{|\Phi_k\rangle\}$  ein VONS bilden gilt:

$$\sum_k |\Phi_k\rangle \langle\Phi_k| = 1 \quad (8)$$

Es folgt unter Ausnutzung der Orthogonalität der Zeigerstellungen:

$$\begin{aligned} \rho_S &= \sum_{nm} c_n c_m^* \underbrace{\langle\Phi_m|\Phi_n\rangle}_{\delta_{nm}} |n\rangle \langle m| \\ &= \sum_n |c_n|^2 |n\rangle \langle n| \end{aligned} \quad (9)$$

Es fällt sofort auf, dass die Interferenzterme zerstört wurden, bzw. in das Gesamtsystem delokalisiert wurden, obwohl bisher *kein* Kollaps angenommen wurde, sondern lediglich eine ideale Messung. Trotzdem erscheint das System klassisch und jeder Zustand  $|n\rangle$  tritt mit der richtigen Wahrscheinlichkeit  $|c_n|^2$  auf, jedoch nur bei einer *lokalen* Betrachtung des Systems.

Nun ist es aber im Allgemeinen nicht möglich, ein System isoliert von seiner Umwelt zu betrachten. Wie Borel 1914 zeigte, verändert bereits die Verlagerung eines kleinen Steins auf dem Sirius die Trajektorien von Gasmolekülen auf der Erde grundlegend.

Im Fall der quantenmechanischen Verschränkung gibt es keinen Zustand des Systems  $S$  und somit eigentlich kein System. Man bezeichnet deshalb  $\rho_S$  auch als *uneigentliches* Gemisch, welches aber nicht von einem echten Gemisch unterscheiden lässt, da natürlich alle Messungen lokal sind. Bei einer lokalen Betrachtung scheint unser System in die Basis  $\{|n\rangle\}$  zu kollabieren. Unser Messproblem bleibt damit ungelöst, da auch weiterhin noch ein späterer echter Kollaps (oder Verzweigung) in einen Zustand  $|n_0\rangle$  notwendig ist.

Es ist also festzuhalten, dass makroskopische Objekte ihre klassischen Eigenschaften nicht systembedingt mitbringen, sondern erst durch die Wechselwirkung mit ihrer Umgebung erhalten. Dies folgt allein aus der Schrödingergleichung unter Berücksichtigung der Umwelt, die Annahme eines Kollaps ist nicht erforderlich.

## 4 Robuste Zustände

Durch den Dekohärenzvorgang wird die Basis  $\{|n\rangle\}$  ausgezeichnet, in der die Nichtdiagonalelemente der reduzierten Dichtematrix verschwinden. In einer beliebigen anderen Basis  $\{|n^*\rangle\}$  verschwinden die Interferenzterme im Allgemeinen nicht. Um dies zu zeigen betrachten wir den Wechselwirkungsoperator der idealen Messung in von Neumann Darstellung

$$H_{\text{int}} = \sum_n |n\rangle \langle n| \otimes A_n \quad (10)$$

$A_n$  ist beliebig wählbar, aber  $n$ -abhängig und wirkt nur im Hilbertraum des Apparates (ideale Messung):

$$|n\rangle |\Phi_0\rangle \xrightarrow{t} e^{-i H_{\text{int}} t} |n\rangle |\Phi_0\rangle = e^{-i A_n t} |n\rangle |\Phi_0\rangle =: |n\rangle |\Phi_n\rangle \quad (11)$$

Nur in dieser Basis verschwindet das Skalarprodukt  $\langle n|n\rangle$  und  $\rho_S$  wird diagonal. In der anderen Basis erhalten wir:

$$|s_0\rangle |\Phi_0\rangle \xrightarrow{t} \sum_{nn^*} c_{nn^*} |n^*\rangle |\Phi_{n^*}\rangle \quad (12)$$

Es existieren also (klassische) Zustände, die robust gegen Dekohärenz sind. Diese werden allein von  $H_{\text{int}}$  festgelegt. Befindet sich das System  $S$  nicht in einem robusten Zustand, kollabiert es aufgrund der Dekohärenz in ein uneigentliches Gemisch aus diesen.

## 5 Optisch aktive Moleküle

Wir wollen nun die Dekohärenztheorie nutzen und ein Beispiel nahe der Grenze zwischen Quantenmechanik und klassischer Physik diskutieren. Abbildung 1 zeigt zwei optisch aktive Moleküle mit unterschiedlicher Chiralität, die sich nicht durch Drehung ineinander überführen lassen. Beide Moleküle drehen die Polarisationsrichtung von linear polarisiertem Licht in unterschiedliche Richtungen. Löst man die zugehörige Schrödingergleichung, so stellt man fest, dass die beiden niedrigsten Eigenenergiezustände  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$  nicht im Potentialminimum  $V(z)$  lokalisiert sind. Dies widerspricht der beobachtbaren

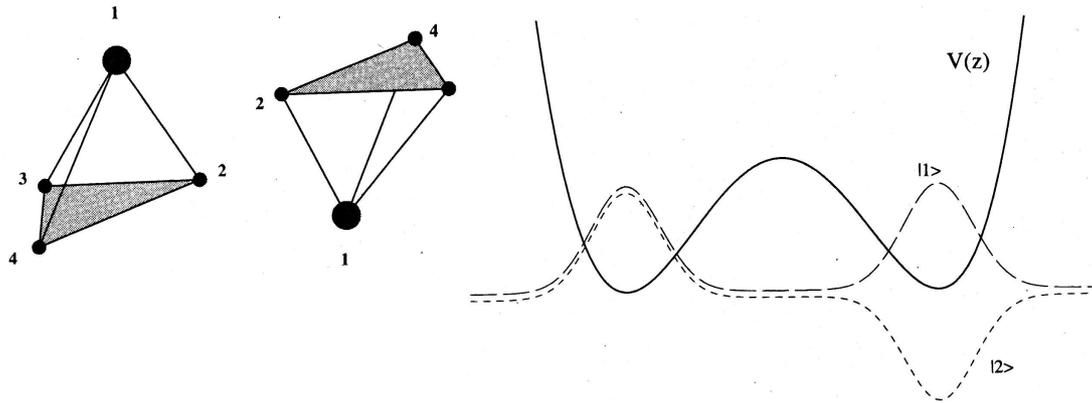


Abbildung 1: Optisch aktive Moleküle mit dem Potential  $V(z)$  und den Energie-Eigenzuständen  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$

optischen Aktivität, die Moleküle müssen sich somit in einem anderen Zustand befinden. Die einfachsten in den Potentialminima lokalisierten Zustände ergeben sich aus der Superposition von  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$ :

$$\begin{aligned}
 |L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \\
 |R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle)
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Da es sich aber bei  $|L\rangle$  und  $|R\rangle$  nicht um Eigenfunktionen handelt, sind sie nicht stabil, sondern oszillieren mit der Bohr-Frequenz  $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$ . Dies deckt sich nicht mit unserem Wissen, dass in der Biologie streng zwischen stabilen links- und rechtshändigen Molekülen unterschieden werden muss. Erst durch die Dekohärenztheorie lässt sich erklären, dass  $|L\rangle$  und  $|R\rangle$  robuste Zustände sind. Durch die Wechselwirkung der Moleküle mit ihrer Umgebung kollabieren sie innerhalb kürzester Zeit in ein scheinbares Gemisch aus diesen robusten Zuständen. Die Dekohärenz induziert also Superauswahlregeln für (große) Moleküle. Aber auch die Bohr-Oszillation lässt sich nachweisen: Bei einem Druck  $p < 0,5\text{bar}$  lässt sich bei Ammoniak eine Frequenz von  $\omega(NH_3) = 24\text{GHz}$  messen.

## 6 Streuprozesse

Im folgenden wollen wir die Wechselwirkung, und insbesondere ihre Stärke, mit der Umwelt genauer untersuchen. Wir nehmen an, dass die Streuung die einzige Wechselwirkung des Systems mit seiner Umgebung ist. Außerdem gehen wir davon aus, dass die einzelnen Streuprozesse zeitlich klein gegen die Zeitskala der Entwicklung des Systems und der Rückstoß des Systems vernachlässigbar ist (ideale Messung). Wir ergänzen deshalb die aus der Vorlesung bekannte, aber nur für isolierte Systeme gültige Liouville-Gleichung, um einen Streuterm:

$$i\frac{\partial\rho_S}{\partial t} = [H_S, \rho_S] + i\frac{\partial\rho_S}{\partial t}|_{\text{scatt}}
 \tag{14}$$

Bei einem einzelnen Streueignis ändert sich die reduzierte Dichtematrix nach Gleichung (10) wie folgt:

$$\begin{aligned}\rho_S^{nm} &\xrightarrow{\text{scatt}} \rho_S^{nm} \langle \Phi_m | \Phi_n \rangle = \rho_S^{nm} \langle \Phi_0 | S_m^+ S_n | \Phi_0 \rangle \\ &= \rho_S^{nm} (1 - \epsilon)\end{aligned}\quad (15)$$

Betrachten wir nun viele Ereignisse mit der Stoßrate  $\Gamma$  erhalten wir nach der Zeit  $t$

$$\begin{aligned}\rho_S^{nm} &\xrightarrow{t} \rho_S^{nm} (1 - \epsilon)^{\Gamma t} \\ &\approx \rho_S^{nm} e^{-\Gamma t}\end{aligned}\quad (16)$$

Dies bedeutet, dass die Kohärenzen aufgrund der Streuprozesse mit der Umwelt exponentiell verschwinden. Die Diagonalelemente der Matrix bleiben jedoch erhalten, da  $\epsilon = 0$  für  $n = m$  ist. Für den in Gleichung (14) eingeführten Streuterm ergibt sich:

$$i \frac{\partial \rho_S}{\partial t} \Big|_{\text{scatt}} = -\Gamma \epsilon \rho_S^{nm}(t) \quad (17)$$

Im folgenden wollen wir den Fall betrachten, dass ein einzelner Streuprozess nicht die Strecke  $|x - x'|$  auflöst, das heißt die Wellenlänge des Streupartikels  $\lambda \gg |x - x'|$  ist. Dies kann man annehmen, da die Interferenzterme ansonsten sowieso schnell zerstört würden. Es lässt sich zeigen, dass bei Berücksichtigung von vielen, einzeln betrachtet ineffektiven Streuprozessen, sich die Dichtematrix wie folgt entwickelt:

$$\rho_S(x, x', 0) \xrightarrow{t} \rho_S(x, x', t) = \rho_S(x, x', 0) e^{-\Lambda t (x - x')^2} \quad (18)$$

wobei  $\Lambda = \frac{k^2 N v \sigma_{\text{eff}}}{V}$  ein Maß für die Lokalisierungsrate ist.  $\frac{nv}{V}$  ist der Teilchenfluss und  $\sigma_{\text{eff}}$  ist von der Größe ein totaler Wirkungsquerschnitt. In Tabelle 1 sind einige Lokalisierungsraten  $\Lambda$  aufgeführt.

| Lokalisierungsrate $\Lambda/cm^{-2}s^{-1}$ |                 |                 |           |
|--|-----------------|-----------------|-----------|
|  | Freies Elektron | $10\mu m$ Staub | Fußball   |
| Sonnenlicht Erde                           | $10^1$          | $10^{20}$       | $10^{28}$ |
| Sonnenneutrinos                            | $10^{-15}$      | $10^1$          | $10^{13}$ |
| Kosm. Hintergrund-Strahlung                | $10^{-10}$      | $10^6$          | $10^{17}$ |

Tabelle 1: Beispiele für Lokalisierungsraten

## 7 Beispiele

### 7.1 Gaußsche Wellenpakete

Wir betrachten die Superposition von zwei allgemeinen Gaußschen Wellenpaketen, wie sie zum Beispiel bei einem Doppelspalt-Experiment auftreten kann.

$$\Psi(x) = N_1 e^{-(x-a_1)^2} + N_2 e^{-(x-a_2)^2} \quad (19)$$

Die zugehörige Dichtematrix lässt sich, wie oben gezeigt, leicht als Projektionsoperator berechnen:

$$\rho_S(x, x', 0) = \Psi_S(x) \Psi_S^*(x') \quad (20)$$

In der graphischen Darstellung (siehe Abbildung 2) erkennen wir sehr gut die beiden

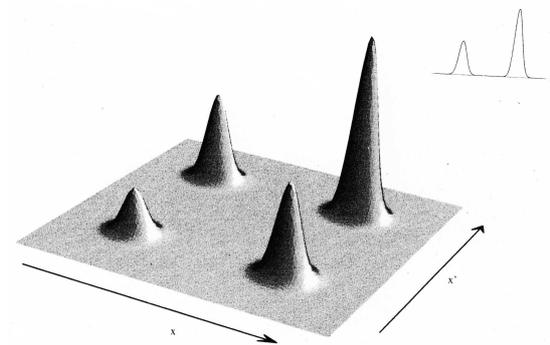


Abbildung 2: Dichtematrix der Wellenpakete zur Zeit  $t_0 = 0$

Wellenpakete auf der Hauptdiagonalen und beobachten weitere Interferenzterme. Berücksichtigt man nun die Wechselwirkung mit der Umgebung, werden genau diese Nicht-Diagonalelemente exponentiell gedämpft.

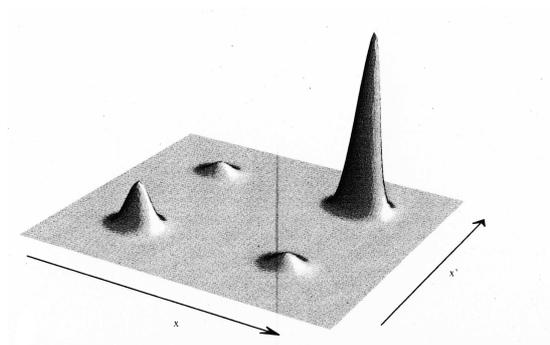


Abbildung 3: Dichtematrix nach Zeit  $t$

## 7.2 Oszillator

Häufig werden hochangeregte Oszillatorzustände als Beispiel für den Übergang zur klassischen Welt genannt. Berechnet man aber die Dichtematrix, so stellt man fest, dass auch hier erst die Wechselwirkung mit der Umgebung klassisches Verhalten induziert und hohe Quantenzahlen alleine nicht ausreichen (siehe Abbildung 4 und 5).

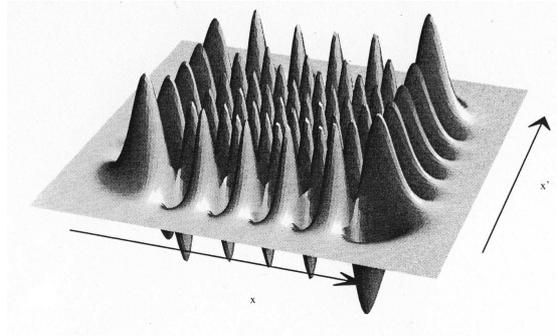


Abbildung 4: Dichtematrix des Oszillators zur Zeit  $t_0 = 0$

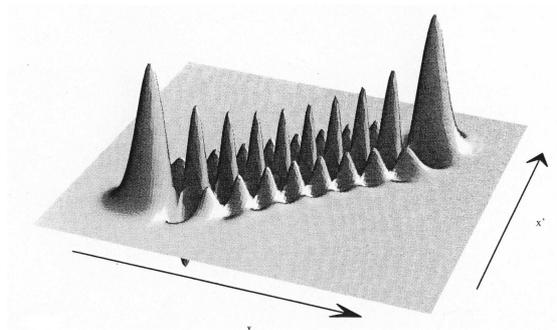


Abbildung 5: Dichtematrix des Oszillators nach Zeit  $t$

## 7.3 Doppelspalt

Als letztes Beispiel sei der Doppelspalt genannt. In Abbildung 6 lässt sich gut erkennen, wie mit wachsender Kopplung an die Umgebung die Interferenzen des zunächst isolierten Doppelspaltes (6a) zunehmend weggedämpft werden (6b,c).

## 8 Quanten-Zeno-Effekt

Der griechische Philosoph Zeno von Elea (ca. 495 bis ca. 430 v.Chr.) zeigte in vier Paradoxa, dass Bewegung unmöglich ist. Das bekannteste lautet:

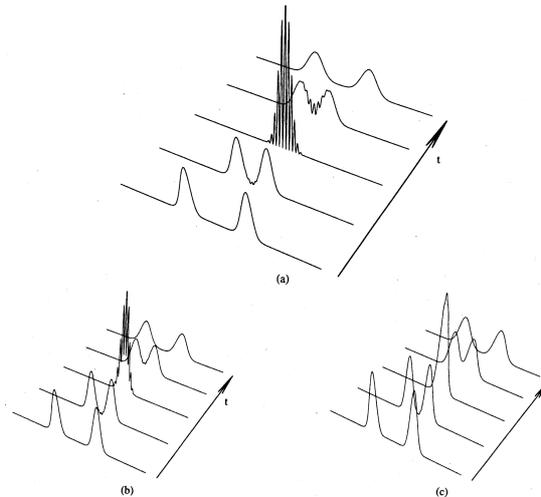


Abbildung 6: Doppelspalt mit steigender Kopplung an die Umgebung

Achilles, der schnellfüßige, unbesiegbare griechische Held, misst sich im Wettrennen mit einer Schildkröte. Weil die Schildkröte um vieles langsamer ist, gibt er ihr einen großen Vorsprung. Um sie nun einzuholen, muss Achilles aber erst den Punkt erreichen, an dem die Schildkröte startet. Wenn er diesen Punkt erreicht hat, hat sich die Schildkröte aber ebenfalls weiterbewegt, sie liegt also immer noch vorne. Hat Achilles auch diese Strecke überwunden, so hat sich auch die Schildkröte wieder ein Stück weiter bewegt. Achilles kann die Schildkröte also niemals einholen.<sup>1</sup>

Die Argumentation des Quanten-Zeno-Effekt ist wie folgt: Da auch eine rückstoßfreie und ideale Messung das System zwingt, einen robusten Zustand anzunehmen (s.o.), ist aufgrund der ständigen Wechselwirkung des Systems mit seiner Umwelt ein Verlassen dieses Zustandes und damit Bewegung unmöglich. Das Objekt friert ein. Sogar eine ideale Messung kann somit die vollständige Kontrolle über die Dynamik des Systems gewinnen.

Es ist natürlich auf die richtigen Dimensionen der Zeitskalen zu achten. So lässt sich ein Stift nicht durch Anstarren daran hindern, vom Tisch zu fallen. Dass es sich hierbei aber nicht nur um ein Paradoxon sondern um einen realen Effekt handelt, wurde mittlerweile von verschiedenen Arbeitsgruppen weltweit experimentell bestätigt.

<sup>1</sup>[http://de.wikipedia.org/wiki/Achilles\\_und\\_die\\_Schildkr%C3%B6te](http://de.wikipedia.org/wiki/Achilles_und_die_Schildkr%C3%B6te)