Institut für Theoretische Physik: Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder de-Broglie-Bohm-Theorie

Svea Sauer

Münster, 20.07.06

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der folgende Text befasst sich mit den Grundlagen der de-Broglie-Bohm Theorie. Diese Theorie bietet eine alternative Sichtweise der nichtrelativistsichen Quantenmechanik gegenüber der populäreren Theorie beruhend auf der Kopenhagener Deutung. Konzentrieren wird sich dieser Text dabei auf den Teil der de-Broglie-Bohm Theorie, der auf den amerikanischen Physiker David Bohm zurückgeht.

2 Historischer Überblick

Um die Ideen der de-Broglie-Bohm Theorie historisch richtig einordnen zu können, sind die wichtigsten dazugehörigen Eckdaten in Tabelle 1 zusammengestellt.

- **1924**:
  De Broglie veröffentlicht Recherches sur la théorie des Quanta (Nobelpreis 1928)
- **1926**:
  Beschreibung der zeitlichen Entwicklung des Zustands eines Quantensystems durch die Schrödingergleichung
- **1927**:
  5. Solvay-Kongress in Brüssel
- **1932**:
  Von Neumann-Theorem
- **1935**:
  Einstein, Rosen und Podolski veröffentlichen EPR-Paradoxon
- **1952**:
  Bohm veröffentlicht Bohmsche Mechanik
- **1964**:
  Veröffentlichung der Bellschen Ungleichungen
- **1987**:
  1. Experiment von Aspect beweist nichtlokale Wechselwirkung in der Quantenmechanik
  2. In einem Vortrag der Universität Wien beklagt Bell die grobe Vernachlässigung der Bohmschen Interpretation
- **2000**:
  Zu einer Tagung anlässlich des 10. Todestag von Bell in Wien ist kein Vertreter der Bohmschen Theorie geladen.

Tabelle 1: Zeittafel 1924-2000

Bereits der französische Physiker Louis-Victor de Broglie hielt im Jahre 1927 auf dem 5. Solvay Kongress einen Vortrag über die von ihm entwickelte Pilot-Wellen-Theorie. Diese Theorie kann als nicht ausgereifte Version der späteren de-Broglie-Bohm Theorie verstanden werden. Unter den anwesenden Naturwissenschaftlern fand diese Theorie jedoch wenig Anklang, da sie bei Verallgemeinerung auf Mehrteilchensysteme nichtlokale Phänomene vorraussagte. Der 5. Solvay Kongress steht auch für den Höhepunkt der Diskussion zwischen den Physikern Nils Bohr und Albert Einstein, welche sich heftige Debatten lieferten über die Richtigkeit der Kopenhagener Deutung. Betrachtet man den historischen Verlauf, ist Bohr als Sieger aus dieser Debatte herausgegangen, da sich die von ihm mitentwickelten Ideen, beschrieben in der Kopenhagener Deutung, bis heute durchsetzen konnten.
Im Jahre 1952 veröffentlichte der Physiker David Bohm in zwei Artikeln seine sogenannte Bohmsche Mechanik, welche auch als de-Broglie-Bohm Theorie bezeichnet wird. Anlass zu dieser Veröffentlichung war wahrscheinlich ein Buch, welches Bohm selber im Jahre 1950 über die orthodoxe Quantenmechanik verfasst hatte. Während der Arbeit an diesem Buch und durch viele Diskussionen mit seinem Mentor Albert Einstein,entwickelte Bohm eine starke Unzufriedenheit mit genau dieser Deutung der Quantentheorie.
Die Bohmsche Mechanik fand nur geringe Betrachtung zur Zeit seiner Veröffentlichung. Das Interesse an Bohms Ideen wurde jedoch größer mit der Veröffentlichung der Bellschen Ungleichungen durch den Physiker John Bell. Bell war ein starker Vertreter der Bohmschen Mechanik, jedoch brachte auch der Erfolg seiner Bellschen Ungleichungen dieser nicht sehr viel mehr Beachtung. Dieser rote Faden des Desinteresses der Ideen des Physikers David Bohm zieht sich bis in die heutige Zeit, in der die Bohmsche Mechanik immer noch nur geringe Beachtung findet.

3 Grundlagen der orthodoxen Deutung der Quantentheorie

Die Quantentheorie basiert auf zwei Annahmen:

1. Die Wellenfunktion und ihre Wahrscheinlichkeitsdeutung geben die vollständig mögliche Festlegung des Zustands eines individuellen Systems.
2. Die Übertragung eines einzelnen Quants vom beobachteten System auf den Messapparat ist inhärent, unvorhersehbar, unkontrollierbar und nicht analysierbar.

Analog lassen sich diese Grundannahmen auch durch das Komplementaritätsprinzip(Bohr 1927) beschreiben:

1. Auf atomarem Niveau kann ein individuelles System nicht als einheitliches und präzise definiertes Ganzes gesehen werden.
   $\hookrightarrow$Die Wellenfunktion ist kein begriffliches Modell
2. Statt eines exakten Modells, existiert nur die Beschränkung auf komplementäre Paare von inhärent unexakt definierten Begriffen
   $\hookrightarrow$ Beispiele für komplementäre Paare sind dabei Begriffe wie Ort und Impuls oder Welle und Teilchen. Genau diese Beschränkung legt die Notwendigkeit eines inneren Mangels im betrachteten System fest.

Genau diese Voraussetzungen, die in der orthodoxen Quantentheorie getroffen werden haben zur Folge, dass diese Theorie keine detaillierte Beschreibung liefern kann, dass heißt, eine Beschreibung zukünftiger Probleme ist mit ihr nicht möglich.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass die orthodoxe Quantentheorie nur eine Aussage über den statischen Zusammenhang liefert.

4 Motivation der de-Broglie-Bohm Theorie

Wie schon erwähnt, motivierte die Arbeit an einem Buch Bohm zu einer eigenen Interpretation der nichtrelativistischen Quantenmechanik. Grundlegend war dabei für Bohm die Idee, dass " die Konsistenz einer Theorie nicht die Möglichkeit anderer gleichermaßen konsistenter Deutungen ausschließt´´.
Sein Hauptkritikpunkt an der orhtodoxen Deutung der Quantentheorie war, dass diese Theorie von vorneherein überhaupt die Möglichkeit ausschloss, eine Theorie entwickeln zu können, die in der Lage war, exakte Vorhersagen treffen zu können. Also mit anderen Worten die Möglichkeit ausschloss, Vorgänge auf dem Quantenniveau in exakten Termen formulieren zu können. Zusätzlich kritisierte er die Unüberprüfbarkeit der Grundannahmen der orthodoxen Deutung.
Beruhend auf diesen Ideen forderte Bohm, dass die Grundannahmen daher nur als Hypothesen zu verstehen sind, deren Korrektheit nur durch gegensätzliche Annahmen zu widerlegen sei. Bohm wählte dabei den Ansatz, dass " Das exakte Ergebnis jeder Messung im Prinzip durch derzeit **variable** Elemente oder Variablen bestimmt wird ´´.
Zur Motivation ist letztendlich noch zu sagen, dass Bohms Interpretation nicht auf die Pilot-Wellen-Theorie von de Broglie zurückgeht. Bohm sagt, er habe erst nach der Veröffentlichung seiner zwei Arbeiten über die Bohmsche Mechanik von den Analogien zu den Ideen de Broglies aus dem Jahre 1927 erfahren.

5 Bohms Interpretation der Schrödingergleichung

Die Bohmsche Mechanik basiert auf folgender Aussage:

Ein System von Teilchen wird beschrieben durch:

1. Die Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{X},t)$
2. Die Konfiguration im Ortsraum $\mathbf{X}$

Es ist zu erkennen, dass es sich bei der Bohmschen Mechanik um eine dynamische Teilchentheorie real existierender Teilchen handelt, deren Ort zu jeder Zeit durch die Variable $\mathbf{X}$ beschrieben werden kann. Die Bewegung der Teilchen kann also durch eine Bahnkurve exakt beschrieben werden. Die Grundlage für die Bohmsche Mechanik bilden dabei zwei Bewegungsgleichungen.

5.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Im folgenden wird ein System S betrachtet, welches durch den Hamiltonoperator H beschrieben wird. Dabei soll zunächst nur ein Einteilchensystem betrachtet werden. Ausgangspunkt der Herleitung ist die Schrödinger-Gleichung für ein Ein-Teilchen-System

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{X},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{X},t) + V(\mathbf{X})\psi(\mathbf{X},t)$$

Setzt man den Ansatz $\psi(\mathbf{X},t) = R(\mathbf{X},t)e^{iS(\mathbf{X},t)/\hbar}$ in die Schrödinger Gleichung ein sol zerfällt das Problem zur Seperation der Real- und Imaginärteile in zwei

Differentialgleichungen der Form:

$$\frac{\partial}{\partial t}R = -\frac{1}{2m}[R(\nabla^2 S) + 2(\nabla R)(\nabla S)] \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}S = -[\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}] \tag{2}$$

Mit $|\psi|^2 = R^2 =: P$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}P + \nabla(P \cdot \frac{\nabla S}{m}) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}S + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{4m}[\frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{1}{2}\frac{(\nabla P)^2}{P^2}] = 0 \tag{4}$$

Bildet man nun den Grenzübergang zur klassichen Mechanik, dass heißt lässt man $\hbar$ gegen Null laufen so vereinfacht sich Gleichung (4) zu:

$$\frac{\partial}{\partial t}S + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V = 0 \tag{5}$$

Ein Vergleich mit der Hamilton-Jacobi Differentialgleichung legt dann die Annahme nah das gilt:

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla S}{m} \tag{6}$$

Der deterministsiche Charakter der Bohmschen Mechanik wird nun dadurch deutlich, dass Gleichung (6)auch ohne Grenzübergang zur klassichen Mechanik seine Deutung beibehält. Möglich wird dies durch eine neue Deutung der Gleichung (2), indem der Term

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R} =: U \tag{7}$$

als zusätzliches Potential interpretiert wird. Bohm bezeichnete dieses Potential als Quantenpotential.
Die Bewegung der Teilchen in der Bohmschen Mechanik beruht also:

1. auf der Ein-Teilchen Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{X},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{X},t) + V(\mathbf{X})\psi(\mathbf{X},t) \tag{8}$$

. ψ wird dabei häufig auch als Führungswelle bezeichnet

2. auf der Führungsgleichung (mit $\psi(\mathbf{X},t) = R(\mathbf{X},t)e^{iS(\mathbf{X},t)/\hbar}$ folgt)

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{\nabla S(\mathbf{X},t)}{m} \tag{9}$$

Bildlich gesprochen “surft´´ also ein Teilchen auf der Führungswelle wie ein Surfer auf einer Wasserwelle durch den Raum(1).

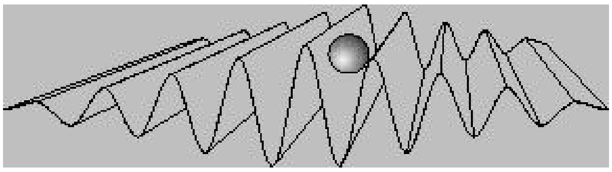

Abbildung 1: Führungswelle *(Quelle: physik.uni-dortmund.de)*

5.2 Bemerkungen zur Bohmschen Interpretation

5.2.1 Vergleich klassiche Mechanik gegenüber Bohmscher Mechanik

Die Verwendung der Hamilton-Jacobi Gleichung zur Herleitung der Führungsgleichung könnte die Idee aufkommen lassen, dass es sich bei der Bohmschen Mechanik um eine klassische Mechanik handeln könnte. Dies ist jedoch nicht der Fall. In der klassichen Mechanik ist eine Teilchenbahn durch Ort und Geschwindigkeit festgelegt. Im Gegensatz dazu ist in der Bohmschen Mechanik die Geschwindigkeit nicht als freie Variable zu betrachten, da sie über die Phase der Führungswelle mit der Schrödinger Gleichung verknüpft ist.

5.2.2 Determinismus

Bei der Bohmschen Mechanik handelt es sich um eine rein deterministsiche Theorie, dass heißt, die zeitliche Entwicklung **jedes** Systems ist durch ψ und die Anfangsorte **vollständig** bestimmt.

5.2.3 Quantengleichgewichtsbedingung

Auch in der Bohmschen Mechanik spielt die Statistik eine Rolle. Sie wird eingeführt durch das statische Ensemble $\rho(\mathbf{X}, t)$ über die Teilchenorte. Ein Vergleich mit den Messprozessen führt auf die sogenannte Quantengleichsgewichtsbedingung:

$$\rho(\mathbf{X}, t) = |\psi(\mathbf{X}, t)|^2 \tag{10}$$

Dabei bezieht sich diese Relation nur auf die Wertigkeit des statistischen Ensembles und der orthodoxen Wahrscheinlichkeitsdichte, dass bedeutet, die zugehörigen Interpretationen sind absolut verschieden. So begründet sich das statistisches Ensemble nur aus unvorhersehbaren und unkontrollierbaren Störungen der Messapparatur und ist somit im Gegensatz zur ortodoxen Wahrscheinlichkeitsdichte keine inhärente Eingenschaft der Struktur der Materie.
Zusätzlich liefert das statistische Ensemble die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen am Ort $\mathbf{X}$ aufzufinden und zwar nicht, wie in der orhtodoxen Deutung, messungsabhängig. Das Teilchen befindet sich also laut Bohmscher Mechanik am Ort $\mathbf{X}$ unabhängig davon, ob eine Messung durchgeführt wird oder nicht.

6 Doppelspaltversuch

Der Doppelspaltversuch ist einer der grundlegenden Versuche der orthodoxen Deutung der Quantentheorie. Am Beispiel dieses Versuches kann auch die Theorie der Bohmschen Mechanik und die zugehörigen berechenbaren Trajektorien auf ihre Richtigkeit hin überprüft werden.
In Abbildung 2 ist der schematische Aufbau eines Doppelspaltexperimentes gezeigt. Abbildung 3 zeigt die Ergebnisse auf einer Fotoplatte nach Durchführung eines

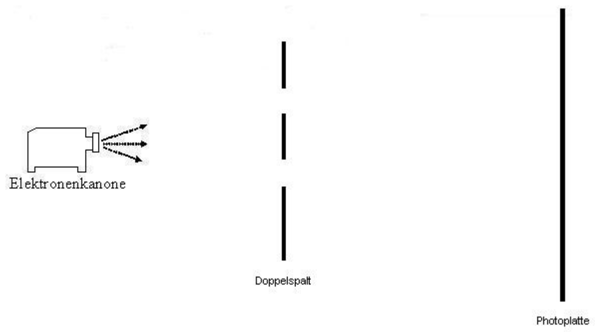

Abbildung 2: Versuchsanordnung*(Quelle: homepage.hispees.ch)*

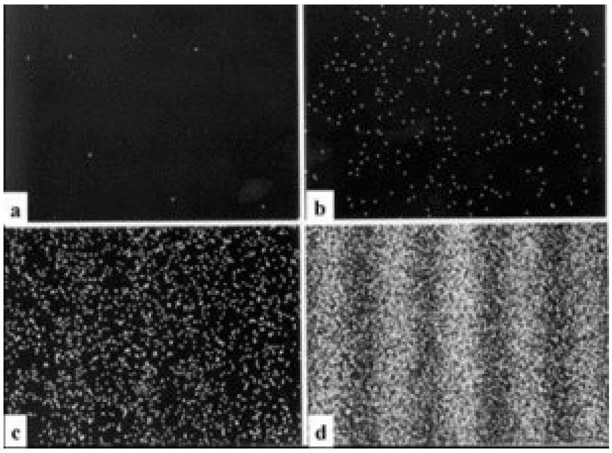

Abbildung 3: Interferenzmuster Doppelspaltversuch*(Quelle: wikipedia.org)*

Doppelspaltversuches. Die Bohmsche Mechanik liefert folgende Deutung der auftretenden Interferenzen:
Ausgehend von der Aussage, dass die Anfangslage der Teilchen nicht exakt bestimmbar ist folgt, dass eine genaue Vorhersage, welchen Spalt ein Teilchen passieren wird, ebenfalls nicht möglich ist. Es gilt aber, dass auf ein Teilchen zu allen Zeiten das Quantenpotential

$$U = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}$$

wirkt. Bevor das Teilchen auf das Spaltsystem einfällt ist die statistische Verteilung der Teilchenorte eine Konstante. Mit Hilfe der Quantengleichgewichtsbedingung folgt, dass die Amplitude des Führungswelle konstant ist und somit das Quantenpotential U vor dem Spaltsystem Null ist und keinen Einfluss auf die Bewegung der Teilchen hat. Nach dem Durchgang durch das Spaltsystem wirkt jedoch ein stark ortsabhängiges Potential. Dies begründet sich dadurch, dass das statistische Ensemble nun nicht mehr konstant ist und somit auch die Amplitude der Führungswelle stark ortsabhängig ist.
Orte, an denen das Betragsquadrat der Wellenfunktion verschwindet, sind nach der

orthodoxen Interpretation nicht erreichbar für ein Elektron. Dies erklärt sich auch mit Hilfe der Bohmschen Mechanik. Geht das Betragsquadrat gegen Null, so geht auch die Amplitude gegen Null und das Quantenpotential läuft gegen $\pm\infty$. An Orten, wo das Quantenpotential positiv unendlich wird, entsteht eine unendlich große Kraft, die das Teilchen von diesem Ort fernhält. Geht das Quantenpotential jedoch gegen negativ unendlich, so entsteht eine unendlich große attraktive Kraft, so dass das Teilchen den Ort mit unendlich großer Geschwindigkeit durchqueren und daher keine Zeit dort verbringen wird.
Die Einführung des Quantenpotentials in der Bohmschen Mechanik ist also in der Lage, die auftretenden Phänomene des Doppelspaltexperiments theoretisch konsistent zu erklären. So beschreibt auch die Fernwirkung des Quantenpotentials, woher ein Elektron "wissen´´ kann, ob das Spaltsystem aus einem oder zwei offenen Spalten besteht, da eine Veränderung des Spaltsystems auch eine Veränderung des Quantenpotentials bewirkt.
Die theoretischen Teilchentrajektorien des Doppelspaltexperiments sind mit Hilfe der Bohmschen Mechanik auch berechenbar. Anhand der Wellenfunktion und Anfangsbedingungen ist das Problem für eine endliche Anzahl von Teilchenbahnen numerisch lösbar. Abbildung 4 zeigt die berechneten "Bohmschen Bahnen´´. Die sichtbaren Anhäufungen der Teilchenbahnen zeigen Übereinstimmungen mit den in Abbildung 3 gezeigten experimentellen Befunden. Tatsächlich lässt sich aussagen, dass sich für eine unendliche Anzahl berechneter Teilchenbahnen die theoretischen Ergebnisse mit den experimentellen decken.

6.1 Messbarkeit der Bohmschen Mechanik

Die Überlegungen anhand des Beispiels des Doppelspaltversuchs und der Vergleich der theoretischen Vorhersagen mit den experimentellen Befunden legen nahe, dass eine experimentelle Überprüfung der Teilchentrajektorien die Korrektheit der Bohmschen Mechanik zeigen könnte. Jedoch existiert kein Experiment zur Bestimmung der Teilchenbahnen. Zwar ist eine Ortsmessung prinzipiell möglich, jedoch ist kein Messprozess zur Bestimmung der Wellenfunktion denkbar. Klar wird dies durch Betrachtung des Quantengleichgewichts. So impliziert eine genaue Kenntnis des Ortes auch eine Änderung der Wellenfunktion. Ein experimentelles "Ausmessen´´ der Teilchenbahnen ist somit nicht möglich.

7 Nichtlokalität

Bisher wurde die Bohmsche Mechanik nur für Ein-Teilchensysteme eingeführt. Eine Verallgemeinerung zu einem n-Teilchensystem führt auf folgende Führungswelle:

$$\psi = R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \exp(iS(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)/\hbar \tag{11}$$

Damit ergibt sich die Führungsgleichung für das j-te Teilchen zu:

$$\frac{d\mathbf{x}_j}{dt} = \frac{\nabla_j S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n)}{m_j} \tag{12}$$

Bei Betrachtung dieser Vielteilchensysteme kommt der nichtlokale Chrakter der Bohmschen Mechanik sehr gut zum Vorschein. Klar wird dies anhand eines Beispiels eines Zwei-Teilchen-Systems mit den Koordinaten $\mathbf{X}_1(t)$ und $\mathbf{X}_2(t)$. In diesem Fall ergibt sich die Führungsgleichung für Teilchen 1 als:

$$\dot{\mathbf{X}}_1 = -\frac{\hbar}{m_1}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} Imln\psi(\mathbf{x}, \mathbf{X}_2(t))|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_1(t)} \tag{13}$$

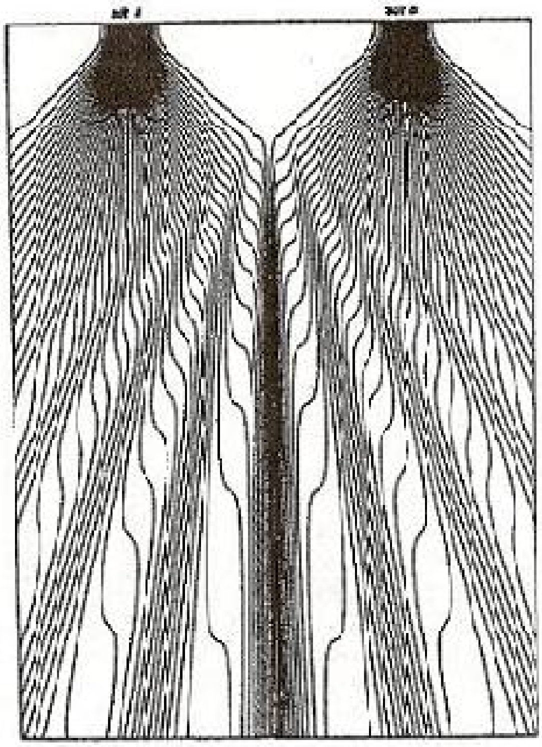

Abbildung 4: Bohmsche Teilchenbahnen *(Quelle:http://evans-experientialism.freewebspace.com/bohmphysics.htm)*

Teilchen 1 und Teilchen 2 sind also über die Führungsgleichung miteinander verknüpft und somit hat eine Veränderung an Teilchen 2 am Ort $\mathbf{X}_2(t)$ einen unmittelbaren Einfluss auf Teilchen 1 am Ort $\mathbf{X}_1(t)$. Dies ist allerdings nur der Fall, falls die Wellenfunktion verschränkt ist, also nicht in Produktzustände zerfällt.
Es lässt sich also sagen, dass es sich bei der Bohmschen Mechanik um eine streng nichtlokale Theorie handelt. Gerade Einstein hatte mit diesem Punkt der de-Broglie-Bohm Theorie Probleme. Laut Einstein war eine sich nichtlokal verhaltene Natur absolut undenkbar. Erst 1987 wurde mit dem Experiment von Alan Aspect der experimentelle Beweis für nichtlokale Phänomene in der Natur gefunden.

8 Warum hatte die Bohmsche Mechanik keinen Erfolg

Das Scheitern der Bohmschen Theorie ist wahrscheinlich auf mehrere Gründe zurückzuführen. Der wohl wichtigste Grund dabei ist, dass die Bohmsche Mechanik keine neuen Vorhersagen, sondern nur neue Interpretationsmöglichkeiten lieferte.
Kritiker bemängeln zudem die, wie sie es nennen, künstliche Hervorhebung des Ortsraumes in der Bohmschen Mechanik.
Anfang der fünfziger Jahre fand auch die in der Theorie beinhaltete Nichtlokalität wenig Anklang. Besonders Anhänger Einsteins hätten sich eine lokale Alternative zur orthodoxen Quantentheorie gewünscht.
Unabhängig von den inhaltlichen Kritikpunkten lieferte auch Bohms Privatleben

Gründe für den geringen Erfolg seiner Bohmschen Mechanik.So war Bohm in seiner Jugend Mitglied in einem kommunistischen Jugendclub. Diese Tatsache sollt ihm in seinem späteren Berufsleben zum Verhängnis werden. Zur Zeit des Kalten Kriegs geriet Bohm aufgrund seiner Vergangenheit ins Visier der amerikanischen Polizei. Als er sich weigerte gegen Kollegen seiner Arbeitsgruppe auszusagen, wurde er verhaftet. Seine spätere Verurteilung wurde zwar aufgehoben, jedoch erhielt er trotz großer Proteste nicht seinen Arbeitsplatz an der Universität Princeton zurück. Bohm wanderte anschließend nach Brasilien aus, wo er seine Bohmsche Mechanik schrieb und veröffentlichte. Bohms Reputation war daher zum Zeitpunkt der Veröffentlichung schon stark angeschlagen, was den Erfolg der de-Broglie-Theorie behindert haben könnte.

9 Literaturverzeichnis

- D. Bohm, A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden´´ variables, I and II, Phys. Rev. 85 (1952) 166, nachgedruckt in: Wheeler, Zurek, deutsche Übersetzung in: Baumann, Sexl
- G. Auletta, Foundations and Interpretation of Quantum Mechanics, World Scientific, Singapur, 2000
- D. Duerr, Bohmsche Mechanik, Springer-Verlag GmbH, März 2001
- Universität Dortmund,(2006): Oliver Passon, Was sie schon immer über Bohmsche Mechanik Wissen wollten sich aber nie zu fragen trauten, Internet: www.physik.uni-dortmund.de/E5/download/dpg06/OliverPassondpg.pdf
- Philipp Wehrli, (2002), Der Doppelspaltversuch: Einstieg in die Quantentheorie, Internet:www.homepage.swissonline.ch/philipp.wehrli/Physik/Quantentheorie/Doppelspalt