# Bellsche Ungleichungen
# Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Seminarvortrag von Norina Richter

Münster, 04.06.2006

# 1 Einleitung

Als 1934 das EPR-Paradoxon von Einstein, Podolsky und Rosen vorgestellt wurde, erschien es zunächst sinnvoll eine Unvollständigkeit der Quantenmechanik daraus zu schlussfolgern. Im Vergleich zu den Alternativen, nämlich die Korrektheit der Quantenmechanik oder den lokalen Realismus aufzugeben, sah Einstein darin die mildeste und damit naheliegendste Lösung.
Es wurde daher eingeräumt, dass evtl. sog. Verborgene Parameter existierten, die zwar nicht durch Messung zugänglich und in der derzeitigen Quantentheorie nicht berücksichtigt wären, mit denen sich aber das EPR-Paradoxon lösen ließe.
30 Jahre später unternahm John Stewart Bell den Versuch, diesen Gedanken mathematisch zu formulieren. Er setzte dabei nur die Lokale Realität, nicht aber die Quantenmechanik voraus und fand eine Ungleichung, die nach seinen Überlegungen immer gelten müsste. Die Allgemeingültigkeit der Bellschen Ungleichung - die auf verschiedene Weise darstellbar ist - steht jedoch im Widerspruch zur Quantenmechanik.
Bell hatte damit zum einen gezeigt, dass eine lokale Theorie verborgener Parameter das EPR-Paradoxon nicht zu lösen vermag. Zum anderen bot sich nun die Chance, experimentell zwischen Korrektheit der Quantenmechanik und lokalem Realismus zu entscheiden; denn eine der beiden Annahmen musste - da die Unvollständigkeit der Quantenmechanik keine Lösung des Paradoxons lieferte - fallengelassen werden.

# 2 John Stewart Bell

John Stewart Bell wurde 1928 in Belfast geboren. Er studierte am Queen´s College in Belfast und machte dort seinen Abschluss in experimenteller und mathematischer Physik. Zunächst befasste er sich mit Atomenergieforschung in Oxfordshire in England. Er heiratete 1954. Nach seiner Promotion 1956 arbeitete er in den Bereichen Elementarteilchentheorie und Beschleunigertechnik am CERN und in Birmingham. 1964 fand er die nach ihm benannte Bellsche Ungleichung. In den folgenden Jahren beschäftigte er sich am CERN mit Quantenfeldtheorie. Er wurde für den Nobelpreis vorgeschlagen, verstarb aber kurze Zeit später unerwartet in Belfast.

# 3 Schwache Ungleichungen - Die Bellsche Ungleichung

Unter einer schwachen Ungleichung wie der ursprünglich von Bell hergeleiteten versteht man eine Ungleichung, die nur aus dem Prinzip der lokalen Realität abgeleitet ist. An dieser Stelle sei bereits erwähnt, dass schwache Ungleichungen nicht durch Experimente direkt überprüft werden können.

Für die folgenden Überlegungen ist es notwendig die sog. Korrelationsfunktion einzuführen. Man betrachte dazu N Zerfälle eines Moleküls M in zwei Systeme $S_1$ und $S_2$. Für jedes System gebe es eine zweiwertige Obsevable A(a) bzw. B(b), die von je einem Beobachter $O_1$ bzw. $O_2$ gemessen werden kann, so dass sich Messwerte $[A_1, ...A_N]$ und $[B_1, ...B_N]$ ergeben. a und b sind beliebige, experimentelle Parameter, die für einen Messvorgang aber festgehalten werden müssen.
Möchte man beispielsweise den Spin der Zerfallsprodukte messen, so entsprächen die Observablen den Pauli-Spin-Matrizen und die experimentellen Parameter wären die Richtungen, in die der Spin gemessen würde. Die Zweiwertigkeit der Observablen wäre dadurch gegeben, dass als Ergebnis einer einzelnen Messung nur 'Spin up'(=:1) oder 'Spin down'(=:-1) in Frage käme.

Die Korrelationsfunktion $P(a,b)$ ist definiert als der Mittelwert des Produktes der Werte, die die Observablen annehmen können:

$$P(a,b) = \langle AB \rangle$$

Speziell wird nun der Sigulettzustand zweier Spin$\frac{1}{2}$-Teilchen betrachtet. Gegeben sei ein Ensemble aus N Zerfällen. Die Observablen werden mit $\underline{\sigma \hat{n}}$ und $\underline{\tau \hat{n}}$ bezeichnet, wobei $\underline{\sigma}$ und $\underline{\tau}$ die Pauli-Matrizen und $\underline{\hat{n}}$ den Normaleneinheitsvektor bezeichnen. In fünf Schritten wird zunächst das EPR-Paradoxon auf die spezielle Situation angewendet:

- An den Systemen $S_1$ eines Subensembles $E_1 \subset E$ wird die Observable $\underline{\sigma \hat{n}}$ gemessen.

- Vorhersage: Eine Messung von $\underline{\tau \hat{n}}$ an den Systemen $S_2$ von $E_1$ wird $[-A_1, ... - A_N]$ liefern. Dies kann an einem Subensemble $E_2 \subset E_1$ überprüft werden.

- Jedem System $S_2$ aus $E_1$, dass unabhängig von der tatsächlichen Messung am System $S_1$ ist, kann ein Element der Realität zugeordnet werden.

- Das Element der Realität, das $S_2$ entspricht, entsteht nicht durch eine augenblickliche Fernwirkung der Messung an $S_1$. Es ist daher gleichgültig, ob die Messung an $S_1$ überhaupt ausgeführt wird, weshalb allen $S_2$ ein Element der Realität zugeordnet werden kann.
- Eine analoge Argumentation, bei der man $S_1$ und $S_2$ vertauscht, führt darauf, dass allen Systemen des Ensembles E ein Element der Realität zugeordnet werden kann.

- Die Situation ist unabhängig von der Wahl des Einheitsvektors $\underline{\hat{n}}$. Für verschiedene Einheitsvektoren existieren also verschiedene Elemente der Realität zu ein und demselben $S_1$ bzw. $S_2$ für alle $S_1$ und $S_2$ aus E.

An dieser Stelle hätten EPR die Unvollständigkeit der Quantenmechnik gefolgert. Bell führt den Gedankengang jedoch noch weiter:

- Wähle speziell zu $S_1$ ein Element der Realität s, dass $\underline{\sigma \hat{a}}$ entspricht und ein Element der Realität s', dass $\underline{\sigma \hat{a}'}$ entspricht.
  Analog sei zu $S_2$ t ein Element der Realität, dass $\underline{\tau \hat{b}}$ entspricht und t' ein Element der Realität, dass $\underline{\tau \hat{b}'}$ entspricht.
- Das Ensemble enthalte $n(s,s',t,t')$ Paare mit festen Werten für s,s't,t'. Es gilt:

$$\sum n(s,s',t,t') = N$$

Für die Korrelationsfunktion ergibt sich:

$$P(a,b) = \langle AB \rangle = \frac{1}{N} \sum n(s,s',t,t') \cdot s \cdot t$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} |P(a,b) - P(a,b')| &\leq \frac{1}{N}\sum n(s,s',t,t') \cdot |t - t'| \cdot |s| \\ |P(a',b) + P(a',b')| &\leq \frac{1}{N}\sum n(s,s',t,t') \cdot |t + t'| \cdot |s'| \end{aligned}$$

Mit $s, s', t, t' = \pm 1$ folgt daraus die Bellsche Ungleichung:

$$|P(a,b) - P(a,b')| + |P(a',b) + P(a',b')| \leq 2 \tag{1}$$

Die gleiche Situation soll quantenmechanisch betrachtet werden. Der Zustandsvektor des Singulettzustands ist gegeben durch

$$\eta_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_{S_1} \; |-\rangle_{S_2} - \; |-\rangle_{S_1} \; |+\rangle_{S_2})$$

Die Korrelationsfunktion lautet damit:

$$P(a,b) = \eta_s^*(\underline{\sigma} \cdot \underline{\hat{a}}) \otimes (\underline{\tau} \cdot \underline{\hat{b}})\eta_s = -\underline{\hat{a}} \cdot \underline{\hat{b}}$$

Für die spezielle Wahl der Einheitsvektoren zu $\underline{\hat{a}} = (0,1)$; $\underline{\hat{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$; $\underline{\hat{a}'} = (1,0)$ und $\underline{\hat{b}'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ erhält man für die kombinierte Korrelationsfunktion

$$|P(a,b) - P(a,b')| + |P(a',b) + P(a',b')| = 2 \cdot \sqrt{2} \tag{2}$$

im Widerspruch zu Gleichung 1).

# 4 Starke Ungleichungen

Im nächsten Schritt soll eine Entscheidung darüber getroffen werden, ob die Quantenmechanik korrekt oder die Bellsche Ungleichung richtig und damit die Lokalität vertretbar ist. In der vorliegenden Form ist die Bellsche Ungleichung jedoch nicht experimentell überprüfbar. Sog. starke Ungleichungen, die auf die lokale Realität und Zusatzannahmen aufgebaut sind, lösen dieses Problem. Als Beispiel für eine starke Ungleichung soll die CHSH-Ungleichung besprochen werden.
Da es technisch schwierig ist, die oben beschriebene Spinmessung durchzuführen, arbeiteten Clauser, Horne, Shimony und Holt 1969 eine starke Ungleichung aus, die sich durch Polarisationsmessung an Photonenpaaren überprüfen lässt.
Die Photonenpaare werden von einer Quelle ausgesendet und treffen jeweils auf einen Polfilter, der in Richtung a bzw. b durchlässig ist. Hinter den Filtern steht jeweils ein Detektor, mit dem die Photonen nachgewiesen werden. Die Messungen der Observablen A(a) bzw. B(b) liefern jeweils den Wert +1, falls Transmission stattfindet, und -1 für den Fall der Absorbtion.
Den möglichen Ereignissen (beide Photonen werden transmittiert, eines wird transmittiert und eines absorbiert, beide werden absorbiert) können die Wahrscheinlichkeiten $T(a_+, b_+), T(a_+, b_-), T(a_-, b_+)$ und $T(a_-, b_-)$ zugeordnet werden. Die Korrelationsfunktion lautet damit:

$$P(a,b) = \langle AB \rangle = T(a_+, b_+) - T(a_+, b_-) - T(a_-, b_+) + T(a_-, b_-)$$

$\infty$ bezeichne die Situation, dass ein Polfilter entfernt wurde. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum T &= 1 \\ T(\infty, b_+) &= T(a_+, b_+) + T(a_-, b_+) \\ T(a_+, \infty) &= T(a_+, b_+) + T(a_+, b_-) \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$P(a,b) = 4T(a_+,b_+) - 2T(a_+,\infty) - 2T(\infty,b_+) + 1$$

Um die realen Voraussetzungen des Experiments zu berücksichtigen, geht folgende Zusatzannahme ein:
'Gegeben sei ein Paar von Photonen, die aus zwei Raumbereichen stammen, in denen sich je ein Polarisator befindet. Die Wahrscheinlichkeit $D_0$ jedes der Photonen in je einem Photodetektor nachzuweisen ist unabhängig von der Existenz und Orientierung der Polarisatoren.'
Ein Übergang zur kombinierten Wahrscheinlichkeit für Durchlass und Nachweis und damit zu Raten R ist notwendig:

$$\begin{aligned}
D(a,b) &= D_0 \cdot T(a_+,b_+) = R(a,b)/N_0 \\
D(a,\infty) &= D_0 \cdot T(a_+,\infty) = R(a,\infty)/N_0 \\
D(\infty,b) &= D_0 \cdot T(\infty,b_+) = R(\infty,b)/N_0 \\
D(\infty,\infty) &= D_0 \cdot T(\infty,\infty) = R(\infty,\infty)/N_0
\end{aligned}$$

$N_0$ steht für den von der Quelle ausgehenden Teilchenfluss. Für die Korrelationsfunktion gilt nun:

$$P(a,b) = 4\frac{R(a,b)}{N_0 D_0} - 2\frac{R(a,\infty)}{N_0 D_0} - 2\frac{R(\infty,b)}{N_0 D_0} + 1$$

In Gleichung 1) eingesetzt ergibt sich die CHSH-Ungleichung, in die gemessene Raten eingesetzt werden können und die damit experimentell überprüfbar ist.

# 5 Experimente

Bereits ab 1967 wurden statische Experimente zur Überprüfung der Bellschen Ungleichung durchgeführt, von denen ein großer Teil sofort, alle aber spätestens bei ihrer Wiederholung die Quantenmechanik bestätigten und die Bellsche (starke) Ungleichung verletzten. Die meisten dieser Experimente bestanden wie oben beschrieben aus Polarisationsmessungen. Da die Richtungen der Polfilter aber fest eingestellt waren, wurden Zweifel laut, ob die Lokalitätsbedingung wirklich eingehalten worden sei. Eine Informationsübertragung von einer Messstation zur anderen mit einer Geschwindigkeit kleiner als Lichgeschwindigkeit konnte nicht ausgeschlossen werden.
Alain Aspect und seine Mitarbeiter hatten 1982 die Idee die Orientierung der Polarisatoren erst festzulegen, wenn die Lichtquanten schon losgeflogen sind. Sie bauten dazu einen optisch-akustisch gesteuerten Schalter auf beiden Seiten des Experiments ein. Die Steuerung erfolgte jeweils über die Amplitude einer Ultraschallwelle in Wasser, die von unterschiedlichen Generatoren mit unterschiedlichen Frequenzen erzeugt wurde. Die beiden Schalter wurden daher als unkorreliert angenommen. Etwa alle 10ns wechselten die Richtungen der Polfilter. Die Photonen für das Experiment stammten aus der 0-1-0 Kaskade eines Ca-Isotops. Auch dieses Experiment verletzte die Bellsche Ungleichung um mehrere Standardabweichungen und bestätigte damit die Quantenmechanik.
Da der zufällige Wechsel der Polfilter-Richtungen allerdings trotz allem nicht wirklich zufällig, sondern nach einem bestimmten vorgegebenen Schema erfolgte, wurde 1998 eine weitere Verbesserung des Experiments durch Gregor Weihs, Thomas Jennewein, Christoph Simon, Harald Weinfurter und Anton Zeilinger vorgenommen. Sie vergrößerten den Abstand der Photodetektoren auf 400m, benutzten elektronische Zufallsgeneratoren, verwendeten vollständig getrennte Messstationen und nahmen die Auswertung der Korrelationen erst am Ende des Versuchs vor. Das Ergebnis war eine Verletzung der Bellschen Ungleichung um 30 Standardabweichungen.

## Zusammenfassung

EPR-Annahmen:

1) lokaler Realismus
2) Korrektheit der Quantenmechanik
3) Vollständigkeit der Quantenmechanik

⇒ Paradoxon

⇒ Einstein: Wahrscheinlich ist 3) falsch.

Bellsche Ungleichung:

1) lokaler Realismus
n3) Unvollständigkeit der Quantenmechanik

⇒ Widerspruch zur Korrektheit der Quantenmechanik

⇒ 1) ist falsch oder 2) ist falsch

Starke Ungleichungen:
(CHSH, Freedman)

1) lokaler Realismus
\+ Zusatzannahmen

Experiment: ⇒

Quantenmechanik ist korrekt.
Die Annahme des lokalen Realismus muss falsch sein.

# 6 Quellen


- F. Selleri: Die Debatte um die Quantentheorie
- A. Rae: Quantenphysik: Illusion oder Realität?
- J. S. Bell: Speakable and unspeakable in quantum mechanics
- H. Walther: Quantenphysik zwischen Theorie und Anwendung
- G. Münster: Quantentheorie
- Baumann, Roman und Sexl: Die Deutungen der Quantentheorie
- W. Tittel, W. Martienssen: Licht - ein Fenster in die Quantenwelt