

# **Seminar über Teilchen– und Kerntheorie**

## **SS2002**

### **Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes**

Carsten Marzok

13. August 2002

#### **Zusammenfassung**

Dieser Vortrag ist der dritte in der Vortragsreihe zur Quantenelektrodynamik des SS2002 im Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster. In den vorangegangenen Vorträgen wurden die Quantisierungen des Klein–Gordon–Feldes und des Dirac–Feldes durchgeführt. Mit den dort bereits besprochenen Methoden sowie weiterer hier vorgestellter Verfahren wird nun das freie elektromagnetische Feld behandelt.

Nach kurzer Wiederholung bereits als bekannt vorauszusetzender Eigenschaften des klassischen elektromagnetischen Feldes wird der kanonische Formalismus auf Feldtheorien erweitert sowie der aufgrund der verschwindenden Ruhemasse des Feldquantes, des Photons, notwendige Helizitätsformalismus vorgestellt. Nach Findung einer relativistisch kovarianten Formulierung der klassischen freien Wellengleichung des Elektromagnetischen Feldes wird diese in der so genannten II. Quantisierungsstufe betrachtet und erste Eigenschaften des erhaltenen Quantenfeldes werden ermittelt. Zuletzt wird das **T**–Produkt eingeführt, das etwas losgelöst vom Vorhergehenden seine volle Bedeutung in den Feynmanschen Regeln erhält (siehe entsprechenden Vortrag).

# 1 Die freie Photonwellengleichung

Bevor sich eingehend mit dem Verfahren zur Erlangung der II. Quantisierung der freien Photonwellengleichung beschäftigt wird, sollen zur Wiederholung einmal die schon bekannten Relationen aus der Klassischen Elektrodynamik zitiert werden. In ihnen werden die Felder vollständig beschrieben. Da es sich hier um die freien Gleichungen handelt, tauchen keine Ströme und Ladungen auf, weswegen die Maxwell-Gleichungen die folgende Gestalt haben.

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} & \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} & \operatorname{div} \vec{E} &= 0\end{aligned}$$

Dabei haben alle Größen die üblichen Bedeutungen.

Eine relativistisch kovariante Formulierung bedeutet unter anderem, dass die Raum- und Zeitkomponenten gleichwertig aufgefasst werden. Dazu gehen alle Dreiervektoren in Vierervektoren über und man führt auch neue Differentialoperatoren ein, so dass die in den Maxwell-Gleichungen vorkommenden Divergenzen und Rotationen nun mit folgenden Operatoren ausgedrückt sind:

grad	$=$	$\nabla$	$\longrightarrow$	$\{\partial^\mu\}$	Vierervektor
div $\vec{a}$	$=$	$\nabla \cdot \vec{a}$	$\longrightarrow$	$\partial_\mu a^\mu$	Viererskalar
rot $\vec{a}$	$=$	$\nabla \times \vec{a}$	$\longrightarrow$	$\partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu$	Vierertensor

Es ist hierbei die Einstein-Konvention gültig, dass über gleich lautende Indizes summiert wird. Zusätzlich ist  $\partial^\mu$  eine Abkürzung für  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ .

Zur Kompaktifizierung der Feldstärken  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  führt man den Feldstärketensor  $F^{\mu\nu}$  mit

$$F^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & H^3 & -H^2 \\ -E^2 & -H^3 & 0 & H^1 \\ -E^3 & H^2 & -H^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

ein, der aufgrund seiner Definition die Eigenschaft  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$  hat.

In der klassischen Elektrodynamik werden die Feldstärken mit Hilfe der Potentiale  $A_0$  und  $\vec{A}$  in der Form

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \text{grad } A^0 \quad (2)$$

dargestellt. Auch dieses schreibt man mit  $\{A^\mu\} := \{A^0, \vec{A}\}$  kürzer, so dass sich daraus sowie aus (1) und (2) für den Feldstärketensor den folgenden Ausdruck ergibt.

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$$

Durch Kontraktion dieser Gleichung mit  $\partial_\mu$  erhält man die Bewegungsgleichung für  $A^\mu$ :

$$\square A^\mu - \partial^\nu \partial_\mu A^\nu = 0. \quad (3)$$

Dabei ist der d'Alembert-Operator  $\square := \partial_\mu \partial^\mu$  definiert worden.

Der zweite Term dieser Bewegungsgleichung kann identisch Null gesetzt werden. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass es in den Feldgleichungen keine Aussage über die Divergenz des Potentials  $A^\mu$  gibt. Diese Eichfreiheit nutzt man in der **Lorentz-Eichung** aus, in der man definiert

$$\partial_\mu A^\mu(x) := 0. \quad (4)$$

Hierdurch reduziert sich die Bewegungsgleichung zur freien Photonwellengleichung:

$$\Rightarrow \square A^\mu(x) = 0.$$

Es gibt noch eine weitere Eichfreiheit, die im späteren Verlauf nützlich sein wird. Die physikalisch relevanten Größen sind die Felder  $F^{\mu\nu}$ , daher sind Transformationen des Potentials dergestalt erlaubt, bei denen sich  $F^{\mu\nu}$  nicht ändert. Genau dies ist für Transformationen der Form  $A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x)$  (mit  $\Lambda(x)$  differenzierbar, aber sonst beliebig) der Fall, wie man sich leicht überlegen kann. Dies nutzt man in der **Coulomb-Eichung** (Eichung II. Art) aus, bei der man so transformiert, dass  $A^0 \equiv 0$  wird.

## 2 Helizitätsformalismus

Bekanntermaßen ist die Ruhemasse der Photonen Null, daher existiert kein Ruhesystem, in dem man den aus der Diractheorie bekannten Spinformalismus auf Basis der Gesamtdrehimpuls-Erhaltung  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  anwenden könnte. Anstelle dieses Formalismus tritt nun der Helizitätsformalismus, der sich auf die Projektion des Spins auf eine ausgewählt Richtung stützt. Dazu ist der Helizitätsoperator  $h_k$  auf folgende Weise definiert:

$$\hat{h}_k := \frac{1}{|\vec{k}|} \cdot \vec{S} \cdot \vec{k}. \quad (5)$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren sind in gegeben durch

$$h_k \vec{a}(k) = \lambda \vec{a}(x), \quad (6)$$

und man erhält damit die Eigenwerte  $\lambda = -1, 0, +1$ .

Nun soll einerseits die Coulombeichung  $A^0 = 0$  gelten, und zusätzlich  $\vec{A}$  als Fourierentwicklung nach der Eigenvektoren  $\vec{a}(x)$  ausgedrückt werden:

$$\vec{A}(x) = \int \frac{d^3k}{2k^0} (\vec{a}(k) e^{-ikx} + \vec{a}^*(k) e^{+ikx}). \quad (7)$$

Daraus lässt sich die Lorentzbedingung im Impulsraum ableiten:

$$\vec{k} \cdot \vec{a}(k) = 0$$

wobei nur die Polarisationswerte -1 und +1 physikalisch realisiert. Die zugehörigen Photonen bezeichnet man als transversale Photonen; für  $\lambda = 0$  ist die Lorentzbedingung nicht erfüllbar.

## 2.1 Polarisationsvektoren

Für das Photonenfeld erweist es sich als günstig, es durch vierdimensionale Polarisationsvektoren  $\epsilon_\lambda^\mu(k)$  auszudrücken. Dabei bezeichnet  $\lambda$  den Polarisationszustand und  $\mu$  einen Minkowskiindex. Für ein vollständiges orthonormiertes System benötigt man vier Polarisationsvektoren, daher läuft  $\lambda$  nun von 0 bis 3, wie es auch später in der Feldquantisierung benötigt wird. Hier brauchen wir uns nur auf die physikalisch realisierten Werte  $\lambda = \pm 1$  beschränken. Man definiert die Polarisationsvektoren daher in der folgenden Form:

$$\{\epsilon_\lambda^\mu(k)\} := \{\epsilon_\lambda^0(k), \vec{a}_\lambda(k)\}. \quad (8)$$

Daraus erhält man die Darstellung der Coulombbeichung und der speziellen Lorentzbedingung im Impulsraum für die gewählte Basis aus Polarisationsvektoren:

$$\Rightarrow \begin{cases} \epsilon_\lambda^0(k) = 0 & \text{Coulombbeichung} \\ \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda(k) = 0 & \text{spezielle Lorentzbedingung} \end{cases} \quad (9)$$

Der Sinn dieser Definitionen ist nun, dass sich die Eigenvektoren des Helizitätsoperators  $\vec{a}(k)$  nach den Polarisationsvektoren entwickelbar sind, wobei die  $\mathbb{C}$ -Funktionen  $\chi(\lambda, k)$  als Entwicklungskoeffizienten auftreten.

$$\vec{a}(k) = \sum_{\lambda=\pm 1} \chi(\lambda, k) \vec{\epsilon}_\lambda(k) \quad (10)$$

Diese Entwicklung lässt sich nun in die Fourierdarstellung des Potentials einsetzen, wodurch die – reelle – Lösung  $\vec{A}(x)$  der Photonwellengleichung durch folgendes Integral gegeben ist:

$$\vec{A}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k}{2k^0} \sum_{\lambda=\pm 1} \left\{ \chi(\lambda, k) \vec{\epsilon}_\lambda(k) e^{-ikx} + \chi^*(\lambda, k) \vec{\epsilon}_\lambda^*(k) e^{+ikx} \right\}, \quad (11)$$

wobei natürlich weiterhin  $k^0 = |\vec{k}|$  gilt.

### 3 Der kanonische Formalismus

Der schon im Rahmen der Theoretischen Mechanik eingeführte kanonische Formalismus, der sich auf das Wirkungsintegral stützt, soll nun für die Anwendung im Gebiet der Feldtheorie angepasst werden. So gehen die generalisierten Koordinaten  $q^k(t)$  über in die Feldkoordinaten  $\phi(x)$ , die in unserem Fall dann  $A^\mu(x)$  sein werden. Die generalisierten Impulse  $p^k(t)$ , die schon über die Lagrangefunktion  $L(t)$  gegeben sind, werden ersetzt durch die Feldimpulse  $\pi(x)$ , die sich in äquivalenter Weise aus der Lagrangedichte  $\mathcal{L}(t)$  berechnen. Die entsprechende Lagragedfunktion in der Feldtheorie ist das Raumintegral über die Lagrangedichte.

Mechanik		Feldtheorie
gen. Koordinaten $q^k(t)$	$\longleftrightarrow$	Feldkoordinaten $\phi(x)$
kan. konj. Impulse $p^k(t) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}$	$\longleftrightarrow$	Feldimpulse $\pi(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi(x))}$
Lagrangefunktion $L(t) = \sum_k L(q^k, \dot{q}^k)$	$\longleftrightarrow$	Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ $\downarrow$ $L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$

Die Dynamik des Systems erhält man dann durch Lösung der Hamiltonschen Variationsaufgabe (Hamiltonisches Prinzip). Als Ergebnis erhält man so die Euler–Lagrange–Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi(x))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = 0 \quad (12)$$

### 3.1 Energie–Impulsdichte–Tensor

Eine für die zweite Quantisierung notwendige Größe ist der Energie–Impulsdichte–Tensor  $\Theta^{0\mu}(x)$ , der in Analogie zum Energie–Impuls–Tensor an die Feldtheorie angepasst ist und sich in folgender Weise aus der Lagragedichte berechnet:

$$\Theta^{0\mu}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_0 \phi^\rho(x))} \partial^\mu \phi^\rho(x) - \mathcal{L}(x) g^{0\mu}. \quad (13)$$

Den Impulsvierervektor  $P^\mu$  erhält man dann durch einfache Raumintegration:

$$P^\mu = \int d^3x \Theta^{0\mu}(x). \quad (14)$$

### 3.2 Quantisierungspostulat

Der eigentliche Quantisierungschnitt erfolgt durch Anwendung der kanonischen Quantisierungsregeln, die bereits im Vortrag von Jürgen Wieferink über die Quantisierung des Diracfeldes besprochen wurden. Es sei nur erwähnt, dass sich das Quantisierungspostulat, welches die nicht–trivialen Kommutatoren der relevanten Feldgrößen liefert, aus Anwendung der Noether–Theoreme auf infinitesimale Translationen gewonnen wird, deren Erzeugende der Viererimpuls ist. Eine andere Bezeichnung des Quantisierungspostulates ist Verallgemeinerte Heisenberg–Gleichung.

$$\Rightarrow i\partial^\mu \phi(x) = [\phi(x), P^\mu(x)]$$

## 4 Quantisierung des e/m-Feldes

Es muss nun ein sinnvoller Ausdruck für die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes gefunden werden, aus dem man den Viererimpuls berechnen kann, um die kanonischen Quantisierungsregeln anwenden zu können.

### 4.1 Lagrangedichte

Als Ansatz für die Lagrangedichte nimmt man auf Basis des Feldstärketensors die Definition

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2}\{(\partial_\nu A_\mu(x))(\partial^\nu A^\mu(x)) - (\partial_\mu A_\nu(x))(\partial^\mu A^\nu(x))\}. \quad (15)$$

Diese Definition bereitet jedoch Probleme derart, dass der Feldimpuls  $\pi^0(x) = F^{00}(x) = 0$  eindeutig gegenüber den räumlichen Komponenten  $\pi^k(x)$  ausgezeichnet ist, was der Lorentzinvianz widerspricht. Nach einem allgemeinen mathematischen Theorem ist der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_f$  jedoch eine Lagrangedichte  $\mathcal{L}'_f$  hinsichtlich der Lösung der Variationsaufgabe äquivalent, die sich nur in einem Divergenzterm  $\partial_\nu H^\nu(x) = \mathcal{L}_f - \mathcal{L}'_f$  unterscheidet. Die zugehörige Erzeugende kann als

$$H^\nu(x) = +\frac{1}{2}A_\mu(x)\partial^\mu A^\nu(x) \quad (16)$$

identifiziert werden. Daraus ergibt sich als physikalisch widerspruchsfreie Dichte:

$$\mathcal{L}'_f = -\frac{1}{2}\{(\partial_\nu A_\mu(x))(\partial^\nu A^\mu(x)) + A_\mu(x)\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu(x))\}, \quad (17)$$

denn die Auszeichnung ist hiermit aufgehoben worden, wenn man die Feldimpulse

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}'_f(x)}{\partial(\partial_0 A_\mu(x))} = -\partial^0 A^\mu(x) \quad (18)$$

verwendet. Über die Euler–Lagrange–Gleichungen erhält man nun die Wellengleichung wieder zurück:

$$\square A^\nu(x) - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu(x)) = 0. \quad (19)$$

Aus klassischer Analogie würde man jetzt die Lorentzbedingung  $\partial_\mu A^\mu = 0$  auch als Operatorgleichung fordern; es wird sich jedoch etwas später herausstellen, dass diese Forderung zu stark ist.

Für die gleich durch zu führende Quantisierung halten wir den sich aus dieser Dichte  $\mathcal{L}'_f$  ergebenden Ausdruck für den Viererimpuls entsprechend Gleichung (14) fest:

$$\mathcal{P}^\mu = \int d^3\vec{x} \theta^{0\mu} = \int d^3\vec{x} (\pi^\rho(x) \partial^\mu A_\rho(\vec{x}) - \mathcal{L}'_f(x) g^{0\mu}). \quad (20)$$

Nun führt die Quantisierung dazu, dass sämtliche Feldgrößen Operatorcharakter annehmen. Dies gilt von jetzt an, wobei auf besondere Kennzeichnung, wie oftmals in der Form  $A \rightarrow \hat{A}$  üblich, verzichtet wird. Man kann die Quantisierung sowohl in Impulsraum als auch im Ortsraum durchführen. In diesem Vortrag wird der Weg über den Impulsraum vorgestellt.

## 4.2 Kommutatoren

Die Zuerst muss man sich Gedanken über die Statistik machen. Die ist im Falle der Photonen, die ja Bosonen sind und damit dem Pauliprinzip nicht unterliegen, entsprechend die Bose–Einstein–Statistik, welches sich in Bezug auf die Wellenfunktionen durch die Gültigkeit von Kommutator–Gleichungen, nicht wie im Falle der Fermionen durch Antikommator–Gleichungen, ausdrücken lässt.

$A^\mu$  ist ein Feldgröße, die natürlich beobachtbar sein soll, daher ist der zugehörige Operator hermitesch:  $A^\mu(x) = a^{\mu\dagger}(x)$ . Dieser hermitesche Operator lässt sich durch die oben eingeführte Fourierdarstellung mit Hilfe der Polarisationsvektoren darstellen, wenn man noch zusätzlich Funktionen  $\chi(\lambda, k)$  und  $\chi^\dagger(\lambda, k)$  einführt, die den Operatorcharakter tragen, der in dieser Darstellung nötig ist:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{2k^0} \{ \chi(\lambda, k) \epsilon_\lambda^\mu(k) e^{-ikx} + \chi^\dagger(\lambda, k) \epsilon_\lambda^{\mu*}(k) e^{ikx} \}. \quad (21)$$

Analog zu 2.1 können nun Operatoren  $a^\mu(k)$  definiert werden:

$$a^\mu(k) := \sum_{\lambda=0}^3 \chi(\lambda, k) \epsilon_\lambda^\mu(k). \quad (22)$$

Mit dieser Definition geht die Fourierentwicklung dann, wie oben bereits durchgeführt, über in

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{2k^0} \{ a^\mu(k) e^{-ikx} + a^{\mu\dagger}(k) e^{ikx} \}, \quad (23)$$

wobei es sich diesmal um eine Operatorgleichung handelt. Setzt man dies nun in den Ausdruck (20) ein, so erhält man nach Ausnutzung einiger auftretender  $\delta$ -Funktionen sowie einer Fallunterscheidung  $\vec{k} = \vec{k}'$  und  $\vec{k} = -\vec{k}'$  folgenden Viererimpuls:

$$\mathcal{P}^\mu(x) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2k^0} k^\mu \{ a^\rho(k) a_\rho^\dagger(k) + a^{\rho\dagger}(k) a_\rho(k) \} - \int d^3x \tilde{\mathcal{L}}(x) g^{0\mu}, \quad (24)$$

wobei sich der Term  $\tilde{\mathcal{L}}$  sich folgendermaßen berechnet:

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}'_f + \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu(x)) (\partial^\nu A^\mu(x)) = -\frac{1}{2} A_\mu(x) \partial^\mu (\partial_n u A^\nu(x)). \quad (25)$$

Aufgrund des so genannten Gupta–Bleuler–Formalismus ist es nun möglich, den Term mit  $\tilde{\mathcal{L}}$  zu vernachlässigen, denn mit Hilfe der in diesem Formalismus entwickelten Methoden lässt sich zeigen, dass ein beliebiges Skalarprodukt der Form  $\langle \dots | \partial_\mu A^\mu | \dots \rangle = 0$ , weswegen der entsprechende Term schadlos vernachlässigt werden darf.

Es lässt sich schon wegen der Notwendigkeit der Hermitezität von  $A^\mu(x)$  der Schluss ziehen, dass die  $a_\mu(k)$  und die  $a^{\mu\dagger}(k)$  nicht unabhängig voneinander gewählt werden dürfen. Diese Einschränkung trifft jedoch auf gleichartige Operatoren nicht zu, daher lassen sich schon einmal die folgenden trivialen Vertauschungsrelationen angeben:

$$[a^\mu(k), a^\nu(k)] = 0, \quad (26)$$

$$[a^{\mu\dagger}(k), a^{\nu\dagger}(k)] = 0. \quad (27)$$

Für die nicht–trivialen Kommutatoren muss man nun das Quantisierungspostulat bemühen. Es genügt jedoch, sich auf den positiven Frequenzzweig  $A^{\nu(+)}(x)$  zu beschränken. Das Postulat gilt dann in der Form

$$i\partial^\mu A^{\nu(+)} = [A^{\nu(+)}, \mathcal{P}^\mu(x)] \quad (28)$$

Setzt man für die entsprechenden Ausdrücke ein, so erhält man die Bedingung

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{2k^0} k^\mu a^\nu(k) e^{-ikx} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{2k^0} \left( -\frac{1}{2} \right) \int \frac{d^3k'}{2k^0} e^{-ikx} k'^\mu \times \\ &\times \{ [a^\nu(k), a_\rho(k') a^{\rho\dagger}(k')] + [a^\nu(k), a_\rho^\dagger(k') a^\rho(k')] \} \end{aligned} \quad (29)$$

Für die zwei Kommutatoren in der geschweiften Klammer berechnet man unter Zuhilfenahme der trivialen Kommutatoren

$$[a^\nu(k), a_\rho(k') a^{\rho\dagger}(k')] = a_\rho(k') [a^\nu(k), a^{\rho\dagger}(k')], \quad (30)$$

$$[a^\nu(k), a_\rho^\dagger(k') a^\rho(k')] = [a^\nu(k), a_\rho^\dagger(k')] a^\rho(k'). \quad (31)$$

Vergleich mit der linken Seite von (29) liefert dann

$$[a^\nu(k), a^{\rho\dagger}(k)] = -2 k^0 g^{\rho\nu} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'); \quad k^0 = |\vec{k}|. \quad (32)$$

Die Kommutatoren kann man nun auf die Entwicklungsoperatoren  $\chi(\lambda, k)$  umwälzen, dies ist jedoch nicht zwingend, weswegen wir hier die Operatoren  $a^\nu(k)$  und  $a^{\nu\dagger}(k)$  als Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren im Fockraum realisieren wollen. Zuerst erfolgt die Definition des Vakuumzustandes  $|0\rangle$  mit

$$a^\nu(k) |0\rangle = 0 \quad \forall \nu, k. \quad (33)$$

Jedoch taucht nun ein Problem auf, dass mit der zu starken Lorentzbedingung einhergeht. Es zeigt sich nämlich, dass man, wenn man die Norm der Zustände, die man aus Anwendung der Erzeugungsoperatoren auf den Zustand  $|0\rangle$  erhält, als nicht positiv definit.

- $a_\mu^\dagger |0\rangle$  mit  $\mu = 1, 2, 3$  hat positive Norm
- $a_0^\dagger |0\rangle$  hat negative Norm

Die Lösung dieses Problems erfolgt nun dadurch, dass man nur einen Teil der Fockraumvektoren als physikalisch relevant ansieht, wobei das Kriterium die Erfüllung der wie folgt abgeschwächten Lorentzbedingung ist (Gupta–Bleuler–Formalismus):

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}(x) |\psi\rangle = 0 |\psi\rangle. \quad (34)$$

Es kann gezeigt werden, dass die Norm dieser physikalischen Fockraumvektoren positiv semidefinit ist, dass also gilt

$$\langle phys. | phys. \rangle \geq 0. \quad (35)$$

### 4.3 Äquivalenzklassen

Den eigentlich interessierenden Hilbertraum erhält man nun durch die Definition der so genannten Äquivalenzklassen. Man definiert zwei physikalische Vektoren  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$  als äquivalent, wenn ihre Differenz die Norm Null hat:

$$(\langle 1| - \langle 2|)(|1\rangle - |2\rangle) = 0. \quad (36)$$

Nimmt man nun einen Vertreter pro Äquivalenzklasse, so ist der Raum aller Äquivalenzklassen ein Hilbertraum. Die physikalischen Interpretation ist nun derart, dass ein Systemzustand durch eine ganze Klasse von äquivalenten Zustandsvektoren im Fockraum beschrieben wird. Dies kann jedoch nur dann sinnvoll sein, wenn die Erwartungswerte aller beobachtbaren Größen in den verschiedenen Vertretern einer Klasse identisch sind.

### 4.4 Vakuumsenergie und Normalprodukt

Es soll nun eine Eigenschaft des quantisierten Feldes untersucht werden, und zwar der Energieinhalt des Vakuums  $\langle 0| \mathcal{P}^0 |0\rangle$ :

$$\langle 0| \mathcal{P}^0 |0\rangle = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2k^0} k^0 \langle 0| a^\rho(k) a_\rho^\dagger(k) + a_\rho^\dagger(k) \underbrace{a_\rho(k)}_0 |0\rangle. \quad (37)$$

Nutzt man die Kommutatorregeln aus, so taucht eine Diracdistribution in dem Integral auf:

$$\langle 0| \mathcal{P}^0 |0\rangle = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2k^0} k^0 \delta(0) \langle 0| 0\rangle. \quad (38)$$

Dieser Term ist nun offensichtlich divergent, das bedeutet, dass der Energieinhalt des Vakuums unendlich ist. Dies ist sicherlich keine sinnvolle Aussage. Man erkennt, dass es physikalisch nicht sinnvoll ist, absolute Energieangaben zu machen. Daher führt man eine Art Skalenverschiebung durch, die den Nullpunkt der Energieskala auf das Niveau der Vakuumsenergie hebt:

$$\mathcal{P}_{\text{ren.}}^0 = \mathcal{P}^0 - \langle 0| \mathcal{P}^0 |0\rangle. \quad (39)$$

Nun ist es sehr umständlich, bei jeder interessierenden Größe die Korrektur von Hand durchzuführen. Mit Hilfe des so genannten Normalproduktes lässt diese Skalenkorrektur automatisch erledigen. Das Normalprodukt wird mit Doppelpunkten gekennzeichnet und lässt alle

im Operator der interessierenden Größe vorkommenden Erzeugungsoperatoren zuerst wirken, anschließend wirken alle Vernichtungsoperatoren. Beispiele:

$$:a^\dagger(k)a(k'):= a(k')a^\dagger(k), \quad (40)$$

$$:a(k)a^\dagger(k'):= a(k)a^\dagger(k'). \quad (41)$$

Der 'renommierte' Energie–Impuls–Operator  $\mathcal{P}_{ren.}^\mu$  lautet dann in dieser Formulierung

$$\mathcal{P}_{ren.}^\mu = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2k^0} k^\mu : \{a^\rho(k) a_\rho^\dagger(k) + a^{\rho\dagger}(k) a_\rho(k)\} :. \quad (42)$$

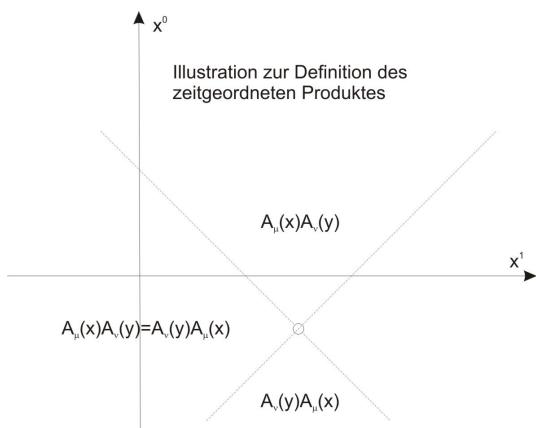
Im Rahmen dieses Vortrages wird die Untersuchung der Effekte der Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes hier verlassen. Zwar gibt es noch ein Fülle weiterer Eigenschaften des freien Photonfeldes, die für die in späteren Vorträgen durchgeführte Kopplung von Dirac– mit Photonfeld von Bedeutung sind, jedoch war ist das wesentliche Ziel dieses Vortrages erreicht.

## 5 Zeitgeordnetes Produkt

Abschließend wird nun, im Vorausgriff auf den Vortrag, der die Kopplung von Dirac– mit Photonfeld durchführt, ein Hilfsmittel vorgestellt, nämlich das zeitgeordnete oder **T**–Produkt. Es ist auf folgende Weise definiert:

$$T(A_\mu(x), A_\nu(y)) = \theta(x^0 - y^0) A_\mu(x) A_\nu(y) + \theta(y^0 - x^0) A_\nu(y) A_\mu(x). \quad (43)$$

Hierbei ist  $\theta(x)$  die  $\theta$ –Funktion, die für  $x < 0$  gleich 0 und für  $x \geq 0$  gleich 1 ist.



Wie man an der Illustration erkennt, sorgt die  $\theta$ –Funktion für die zeitlich Ordnung dargestalt, dass es darüber entscheidet, in welchem Fall  $A_\mu(x) A_\nu(y)$  und in welchem  $A_\nu(y) A_\mu(x)$  angewandt wird. Dies mutet im ersten Moment wie eine Auszeichnung einer bestimmten Koordinatenachse an, was einer Verletzung der Lorentzinvarianz gleichkommt. Es kann jedoch gezeigt werden, dass das **T**–Produkt lorentz–invariant ist.

Mit den Kommutatorregeln und der Fourierentwicklung für den Feldoperator  $A^\mu(x)$  lässt sich ebenfalls zeigen, dass die Mikroausalität gilt, d.h.

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = 0 \quad \text{für} \quad (x - y)^2 < 0 \quad (\text{raumartige Abstände}). \quad (44)$$

Es soll nun der Beweis der folgenden Behauptung angerissen werden, die sich später als nützlich erweisen wird: Der Vakuumserwartungswert des  $\mathbf{T}$ -Produktes  $T(A_\mu(x), A_\nu(y))$  soll im Wesentlichen durch eine Funktion  $D_F(x - y)$  der Form

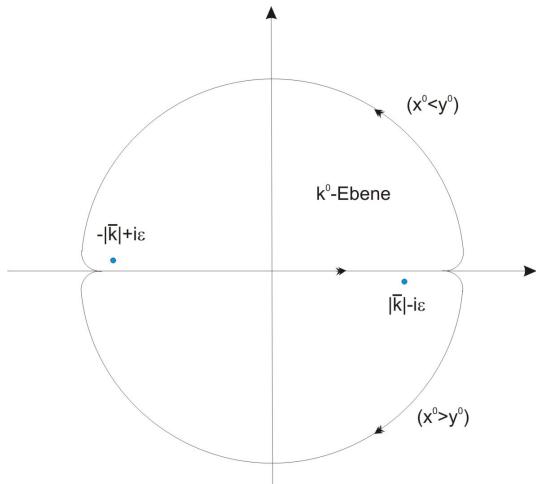
$$ig_{\mu\nu} D_F(x - y) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int \frac{dk}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad (45)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi i} e^{-ik^0(x^0-y^0)} \frac{g_{\mu\nu}}{(k^0)^2 - (\vec{k})^2 + i\epsilon} \quad (46)$$

gegeben sein:

$$\langle 0 | T(A_\mu(x), A_\nu(y)) | 0 \rangle = ig_{\mu\nu} D_F(x - y). \quad (47)$$

Der Integrand hat offensichtlich Pole an den Stellen  $k^0 = \pm\sqrt{(\vec{k})^2 - i\epsilon}$ . Zusätzlich stellt man fest, dass für  $x^0 > y^0$  im Limes  $\text{Im}(k^0) \rightarrow -\infty$  die Exponentialfunktion  $e^{-ik^0(x^0-y^0)}$  gegen Null geht. Dies erlaubt die Anwendung des Residuensatzes, wobei man entlang eines Halbkreises mit großem Radius integriert.



Man kann den Integrationsweg oberhalb oder unterhalb der  $|\vec{k}|$ -Achse wählen. Es folgt dabei:

$$\Rightarrow ig_{\mu\nu} D_F(x - y) = -g_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\{|\vec{k}|(x^0-y^0) - \vec{k}(\vec{x}-\vec{y})\}}}{2|\vec{k}|} \quad (48)$$

Mit  $k^0 = |\vec{k}|$  erhält man dann die oben angegebene Form. Auch  $\langle 0 | T(A_\mu(x), A_\nu(y)) | 0 \rangle$  lässt sich in diese Form bringen, was den Beweis schließt, hier aber nicht vorgeführt werden soll.

Es sei noch erwähnt, dass man  $ig_{\mu\nu}D_F(x - y)$  beziehungsweise seine Fouriertransformierte  $-\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$  als **Feynman–Propagator** oder genauer als **Photonen–Propagator** bezeichnet. Die Begründung für diese Namensgebung erfolgt im Rahmen der Kopplung von elektromagnetischem mit Diracfeld. Dort wird jeweils ein solcher Propagator für reelle oder virtuelle Photonen benötigt, die mit anderen Photonen oder Elektronen wechselwirken bzw. die Wechselwirkung transportieren.

## Literatur

- [1] G. Köpp, F. Krüger, *Einführung in die Quanten-Elektrodynamik*, Springer–Verlag, Teubner, 1997 [KK]
- [2] O. Nachtmann, *Elementarteilchenphysik, Phänomene und Konzepte*, Vieweg, 1986 [N]