Statistische Physik des Verkehrs

E. Ruthotto

28. Mai 2001

1 Fragen von grundsätzlichem und praktischem Interesse

Grundsätzlich:

- Was sind die dynamischen Phasen des Systems "Verkehr"?
- Wie finden Übergänge zwischen den Phasen statt?
- Gibt es Phasen–Koexistenz?
- Wie stellt sich ein stabiler Zustand ein?
- Was passiert, wenn das System gestört wird?

Die wichtigen Größen zur Beschreibung des Verkehrs sind

- der lokale Fluß $J(x, t)$
- die lokale Dichte $\rho(x, t)$
- räumliche und zeitliche Abstände aufeinander folgender Fahrzeuge

Von praktischem Interesse:

- Wie hängen die Dichte und der Fluß zusammen? ("Fundamentaldiagramm")
- Wie sind räumliche und zeitliche Abstände zwischen Fahrzeugen verteilt?
- Welchen Einfluß haben Auf– und Abfahrten auf den Verkehr? Wie wichtig ist die Anzahl der Fahrspuren?
- Wie sollten Ampeln am besten geschaltet werden?

2 Theoretische Ansätze

Bis heute existiert keine vollständige theoretische Beschreibung von Verkehr. Es gibt eine Reihe von Modellen, und alle sind in der Lage, einzelne Aspekte des komplexen Systems "Verkehr" zu beschreiben. Ein wirklich zufriedenstellendes Modell gibt es allerdings nicht. Das hängt auch damit zusammen, daß nicht einmal die grundlegendsten experimentellen Ergebnisse unumstritten sind.
Es gibt zwei fundamental verschiedene Beschreibungsmöglichkeiten:

2.1 Makroskopische Modelle

- Verkehr als 1–dim. kompressible Flüssigkeit, einzelne "Teilchen" tauchen nicht explizit auf
- Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = 0$$

  hier: keine Quellen und Senken (keine Auf– und Abfahrten)

- Annahme: Lokaler Fluß $J(x,t)$ hängt ab von lokaler Dichte $\rho(x,t)$ und Gradient der Dichte:

$$J(\rho) = j(\rho) - D\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

  $\Rightarrow$ postitiver Gradient führt zu niedrigerem Fluß, da langsamer gefahren wird, wenn Verkehr dichter
  $\Rightarrow$ Term $D(\partial\rho/\partial x)$ proportional zum Druckgradienten der Flüssigkeit

- Geschwindigkeitsgleichung:

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + v\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + X$$

  - Term $\partial^2 v/\partial x^2$ analog zur viskosen Dissipation in Flüssigkeiten
  - früheré Modelle: Änderung in lokaler Dichte ρ führt instantan (ohne Verzögerung) zu Änderung des Geschwindigkeitsfeldes
  - realistischer: Relaxation der lokalen Geschwindigkeit verzögert
    $\Rightarrow$ Term X berücksichtigt innere Kräfte zwischen Fahrzeugen

  Analog zur Navier–Stokes–Gleichung der Hydrodynamik

- Problem: Viskosität des Verkehrs nicht direkt meßbar

Mikroskopische Modelle

Verkehr als Nicht–Gleichgewichtssystem wechselwirkender Teilchen

Kinetische Theorie: analog zur kinetischen Gastheorie

- Verteilungsfunktion $f(x,v;t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$ gibt Anzahl der Fahrzeuge zur Zeit t zwischen x und $x+\mathrm{d}x$ mit Geschwindigkeit zwischen v und $v+\mathrm{d}v$
- zusätzlich: Berücksichtigung der kollektiven Ziele aller Verkehrsteilnehmer durch *gewünschte Verteilungsfunktion* $f_{\mathrm{des}}(x,v)$
- f weicht von f_{des} ab wegen äußerer Einflüsse und innerer Wechselwirkungen
  - äußere Einflüsse (Wetter, Fahrbahnzustand, ...) können zeitlich begrenzt sein $\rightarrow$ Relaxation

- Wechselwirkungen zwischen Fahrzeugen bleiben erhalten

- damit:
$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\,\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{rel}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathrm{int}}$$
  - $(\partial f/\partial t)_{\mathrm{rel}}$ beschreibt Relaxation von f nach f_{des} in Abwesenheit innerer Kräfte
  - $(\partial f/\partial t)_{\mathrm{int}}$ beschreibt Änderung von f aufgrund innerer Kräfte

  Analog zur Boltzmann–Gleichung der kinetischen Gastheorie
- Problem: physikalisch unbefriedigend
- Verbesserung: Jedes Fahrzeug hat *gewünschte Geschwindigkeit*, Relaxation von v nach v_{des} in Abwesenheit von Wechselwirkungen
- generelles Problem: kompliziert, effektiv 1-dimensional (keine mehrspurigen Straßen)

Car–following–Theorien: Newtonsche Bewegungsgleichungen für jedes Teilchen

- Grundlegende Philosophie:
$$[\text{Response}]_n \propto [\text{Stimulus}]_n$$
- Beschleunigung eines Teilchens ist die Antwort auf den Stimulus in Form einer Kraft (äußere Kraft und Wechselwirkung mit anderen Teilchen)
- Antwort auf Verkehrsverhältnisse nur durch Änderung der Geschwindigkeit
- Modelle unterscheiden sich durch Wahl des Stimulus
  - Einfachste Möglichkeit: Follow–the-leader–Modell
$$\ddot{x}_n(t) = \frac{1}{\tau}\left[\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)\right]$$
    Stimulus ist Geschwindigkeitsdifferenz zum Vordermann, Faktor $1/\tau$ bestimmt Sensitivität des Fahrers
  - Optimal–velocity–Modelle: Jeder Fahrer hat eine gewünschte Geschwindigkeit, die vom Abstand zum Vordermann abhängt
- Problem: nur einspuriger Verkehr

Zellularautomaten: später ...

3 Experimentelle Daten

- Experimentelle Daten nur schwierig zu gewinnen, da man kaum gezielte Experimente anstellen kann
- Daher: viele experimentelle Ergebnisse umstritten

Messung auf der A1 bei Köln, 6.–17. Juni 1996

$\rightarrow$ Abb. 1

- $N > 500\,000$ Fahrzeuge
- ca. 16% Lastwagen
- Geschwindigkeitsbegrenzung auf 100 km/h
- 12 einzelne Zählschleifen, geschaltet zu 4 Detektoren D1–D4; decken an zwei Stellen sämtliche Fahrbahnen ab
- Nach Detektor D1 Verringerung von 3 auf 2 Fahrspuren
- Meßgrößen:
  - Geschwindigkeit v durch zwei Induktionsschleifen in festem Abstand
  - Abstand Δx zwischen zwei Fahrzeugen, bestimmt durch

    $$\Delta x_n = v_{n-1} \Delta t_n$$

  - Eigenlich: Messung des zeitlichen Abstands zwischen zwei Fahrzeugen, wird aber aus Speicherplatzgründen nicht gespeichert
    Annahme: konstante Geschwindigkeit v_{n-1} im Zeitraum Δt_n
- Zur Auswertung: Trennung der Daten nach verschiedenen Verkehrszuständen und nach Verkehrsdichte gemäß

  $$\rho = J/v$$

  mit v: mittlere Geschwindigkeit in einem Zeitintervall $\Delta t = 1\,\mathrm{min}$
  $\rightarrow$ Abb. 2
- Man sieht in Abb. 2:
  - 2 deutlich unterscheidbare Zustände:
    - Freier Fluß: hohe Geschwindigkeit
    - stockender/zähflüssiger Verkehr: niedrige Geschwindigkeit
  - Stockender Verkehr noch weiter unterscheidbar in *synchronisierten Fluß* und *stop–and–go*.
    Unterscheidungskriterium $\rightarrow$ später

3.1 Zeitlicher Abstand der Fahrzeuge

- Rekonstruktion von Δt_n aus v und Δx
- Auflösung des Histogramms: 0.1 s
  $\rightarrow$ Abb. 3
- Freier Fluß:

- 2–Peak–Struktur unabhängig von der lokalen Fahrzeugdichte
- globales Maximum bei $\Delta t = 0.8\,\mathrm{s} \rightarrow$ typische Reaktionszeit
- mikroskopisch: Gruppen von Fahrzeugen mit hoher Geschwindigkeit und kleinem Abstand ("Stoßstange and Stoßstange"), Zustände mit hohem Fluß $\Rightarrow$ metastabil: endliche Störung zerstört diese Zustände
- zweiter Peak bei $\Delta t = 1.8\,\mathrm{s}$ entspricht empfohlenem Sicherheitsabstand ("halber Tacho")

- Stockender Verkehr:
  - kein $\Delta t = 0.8\,\mathrm{s}$–Peak mehr
  - trotzdem: signifikanter Beitrag von Abständen $\Delta t < 1.8\,\mathrm{s}$ in synchronisiertem Fluß
  - nur noch $\Delta t = 1.8\,\mathrm{s}$–Peak in Stop-and-go–Verkehr

- Man sieht: Bei freiem Fluß größter Beitrag von kurzen Abständen, bei synchronisiertem Fluß immer noch großer Beitrag $\rightarrow$ kurze Abstände haben hohes Gewicht im Übergangsbereich

3.2 Abhängigkeit: Geschwindigkeit–Räumlicher Abstand

$\rightarrow$ Abb. 4

- Wichtiger Input–Parameter für Car–following–Modelle, insbesondere für das Optimal–velocity–Modell
- mittlere Geschwindigkeit hängt nicht nur vom Abstand Δx ab, sondern auch von der lokalen Dichte
- Geschwindigkeit für große Abstände ist in synchronisierten Zuständen deutlich niedriger als in freiem Fluß
- in allen Fällen Sättigung für große Abstände
- Betrachte Geschwindigkeitsdifferenzen aufeinander folgender Fahrzeuge $\rightarrow$ Abb. 5
  - Abstand Δx maximal, wenn $\Delta v = 0$, unabhängig vom mikroskopischen Zustand
  - Bestimme optimal–velocity–Funktion durch Fit an die experimentellen Daten mit

    $$v(\Delta x) = k\,\{\tanh\,[a(\Delta x - b)] + c\}$$

    Vergleich mit früherer OV–Funktion zeigt deutliche Abweichung $\rightarrow$ Abb. 6

3.3 Das Fundamentaldiagramm

- Daten gestatten freie Wahl des Intervalls, über das gemittelt wird
- Vergleich zwischen $\Delta t = 1\,\mathrm{min}$ und $\Delta t = 5\,\mathrm{min}$ zeigt
  - weniger Fluktuationen bei längerem Mittlungsintervall
  - Extremalwerte von Fluß und Dichte fallen mit wachsendem Δt
  - Kleine J–Werte bei kleinen Dichten werden bei $5\,\mathrm{min}$–Intervallen herausgemittelt

  → Abb. 7
- Verbergen lange Intervalle echte Struktur von Verkehrszuständen oder sind zusätzliche Strukturen bei kurzen Intervallen nur statistische Artefakte?
  → mikroskopische Zustände mit kurzer Lebensdauer können nur mit kleinen Δt erkannt werden
- Bestimmung der stationären Fluß–Dichte–Beziehung: Bilde Histogramme aus den Fundamentaldiagrammen unter Auslassung von Stop–and–go–Zuständen (da dort die Dichte nicht zu bestimmen ist)
  Zwei Arten der Mittlung:
  - Mittlung über alle Fluß–Werte einer gegebenen Dichte → kontinuierliches Diagramm
  - Mittlung mit Unterscheidung nach freiem und synchronisiertem Fluß → diskontinuierliches Diagramm (→ Abb. 8)
- Form der Fluß–Dichte–Beziehung noch immer umstritten
  → Abb. 9
  Aber: deutliche Anzeichen zugunsten der diskontinuierlichen Form → Metastabilität

3.4 Zeitreihenanalyse

Kriterien zur Klassifizierung der verschiedenen Verkehrszustände

3.4.1 Korrelationen

Autokorrelation: → Abb. 10+11

$$a_x(\tau) = \frac{\langle x(t)x(t+\tau)\rangle - \langle x(t)\rangle^2}{\langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2}$$

$\langle\ldots\rangle$ bedeutet Mittlung über eine komplette Periode des Zustands

- Freier Fluß:
  - mittlere Geschwindigkeiten nur auf kurzen Zeitskalen korreliert
  - langreichweitige Korrelationen von Dichte und Fluß

- Synchronisierter Fluß:
  - alle zeitlichen Korrelationen sind kurzreichweitig
- Stop–and–go:
  - oszillierendes Verhalten für alle drei Größen, Periode $T \approx 10\,\mathrm{min}$

Kreuzkorrelation: → Abb. 12

$$c_{x,y}(\tau) = \frac{\langle x(t)y(t+\tau)\rangle - \langle x(t)\rangle\langle y(t+\tau)\rangle}{\sqrt{\langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2}\sqrt{\langle y^2(t)\rangle - \langle y(t)\rangle^2}}$$

Betrachte Korrelation von ρ und J

- starke Kopplung von Fluß und Dichte in freiem Fluß → J hängt nur von ρ ab, millere Geschwindigkeit v ist beinahe konstant
- für synchronisierten Fluß führen alle Kombinationen von ρ, J und v zu kleinen Werten der Kreuzkorrelation
- Stop–and–go–Verkehr ist gekennzeichnet durch starke Korrelationen zwischen Dichte und Fluß

3.4.2 Übergänge zwischen Verkehrszuständen

→ Abb. 13+14

- Verschiedene Zustände können jetzt unterschieden werden, betrachte nun Übergang
- Übergang im Vergleich zur Lebensdauer eines Free–flow– oder eines stockenden Zustands kurz
- Übergänge synchronisiert↔stop–and–go deutlich schneller
- Übergang freier Fluß→stockender Verkehr bei Dichten, die deutlich niedriger sind als die Dichte maximalen Flusses
- hier: Übergang nicht wegen kritischer Schwankungen (Metastabilität), sondern gegen Spurverengung hinter Detektor D1
- frühere Untersuchung: Übergang zwischen freiem Fluß und stockendem Verkehr begleitet durch Peak in der Varianz der Geschwindigkeit
  → hier nicht beobachtet

3.4.3 Korrelation zwischen Fahrspuren

→ Abb. 15+16

- Betrachte die Kreuzkorrelationen $c_{x_i,x_j}(\tau)$, wobei x_i der Fluß, die Dichte oder die Geschwindigkeit auf Fahrspur i ist.
- Kopplung zwischen ρ und J verschiedener Fahrspuren bei $\tau = 0$ ist für synchronisierten Fluß vergleichbar dem freien Fluß

- Bei synchronisiertem Fluß fallen die Korrelationen schnell mit der Zeit ab, bei freiem Fluß langsam
- Synchronisation äußert sich in großen Werten ($c_{v_i,v_j}(0) \approx 0.9$) der Korrelation der Geschwindigkeiten auf verschiedenen Spuren bei $\tau = 0$, während bei freiem Fluß völlig entkoppelt
- Charakteristikum der Angleichung der Geschwindigkeit verschiedener Spuren im synchronisierten Fluß hier nicht beobachtbar wegen der Geschwindigkeitsbegrenzung. Selbst im freien Fluß ist die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den Fahrspuren sehr klein.

3.4.4 Single–vehicle data

$\rightarrow$ Abb. 17

- Betrachte direkt die Daten einzelner Fahrzeuge
- Korrelationsfunktionen können wegen starker Fluktuationen der Zeitintervalle zwischen den Fahrzeugen nicht sinnvoll in Abhängigkeit von der Zeit bestimmt werden
- <u>Daher:</u> Bestimme Autokorrelation in Abhängigkeit von der Anzahl der den Detektor passierenden Fahrzeuge
- <u>Freier Fluß:</u>
  - Übergang von starkem zu langsamem Abfall der Autokorrelationen aller Größen für eine kleine Anzahl von Fahrzeugen ($n \approx 5$)
  - Korrelation der Geschwindigkeiten aufeinander folgender Fahrzeuge fällt zunächst langsamer, asymptotisch schneller
  - v–Korrelation deutet darauf hin, daß es bei freiem Fluß kleine Cluster von Fahrzeugen gibt, die mit der gleichen Geschwindigkeit fahren
    $\rightarrow \Delta t = 0.8\,\mathrm{s}$–Peak in der zeitl. Abstandsverteilung
- <u>Synchronisierter Fluß:</u>
  - Abfall der Geschwindigkeits–Korrelation für "kleine" n viel schwächer als in freiem Fluß
    $\rightarrow$ große Cluster ($n \lesssim 60$) von Fahrzeugen mit der gleichen Geschwindigkeit
  - keine langreichweitigen Korrelationen

4 Das Nagel–Schreckenberg–Modell

4.1 Definition

- Diskretisierung von Raum und Zeit
- Straße dargestellt durch 1–dim. Gitter mit L Zellen

- Jede Zelle kann mit max. einem Fahrzeug besetzt sein
- Die Geschwindigkeit jedes Fahrzeugs kann einen der $v_{\max} + 1$ Werte $v = 0, \ldots, v_{\max}$ annehmen
- Wenn x_n und v_n Ort und Geschwindigkeit des n–ten Fahrzeugs angeben, dann ist

  $$d_n = x_{n+1} - x_n$$

  der Abstand zwischen Fahrzeug n und dem vorausfahrenden $n+1$
- In jedem Zeitschritt $t \to t+1$: Parallel–Update des Systemzustands nach der Vorschrift

  Schritt 1: Beschleunigung
  Wenn $v_n < v_{\max}$, $\quad v_n \to v_n + 1$

  Schritt 2: Bremsen (wegen anderer Fahrzeuge)
  Wenn $d_n \leq v_n$, $\quad v_n \to d_n - 1$

  Schritt 3: Randomisierung
  Wenn $v_n > 0$, $\quad v_n \to \max(v_n - 1, 0)$ mit Wahrsch. p

  Schritt 4: Fahren
  $x_n \to x_n + v_n$
- Minimales Modell in dem Sinne, daß jede Vereinfachung zu unrealistischem Verhalten führt
- Schritt 1 drückt das Bestreben eines Fahrzeugs aus, mit maximaler Geschwindigkeit zu fahren
- Schritt 2 verhindert Kollisionen zwischen Fahrzeugen
- Schritt 3 zur Berücksichtigung des unterschiedlichen Verhaltens der Fahrer (Überreaktion beim Bremsen
- Parallel–Update ist wichtig, weil es zu einer Kette von Überreaktionen führen kann. Wenn im Randomisierungsschritt ein Fahrzeug bremst und die Fahrzeugdichte groß genug ist, kann das folgende Fahrzeug gezwungen werden, auch zu bremsen. In Schritt 3 kann dieses im Fall $p \neq 0$ noch weiter bremsen
  $\to$ wichtig für "Stau aus dem Nichts“
- Außerdem: Bei Parallel–Update gibt es dynamisch verbotene Zustände, die bei sequentiellem Update nicht verboten wären
  $\to$ "Garden–of–Eden states“
- Beispielskonfiguration $\to$ Abb. 18
- Raum–Zeit–Diagramm $\to$ Abb. 19

4.2 Eigenschaften des NaSch–Modells

- Abb. 20 zeigt Fundamentaldiagramm für $v_{\max} = 5$ und verschiedene p
  $\rightarrow$ Unterschied zu experimentellem Ergebnis: kontinuierlich
  $\rightarrow$ keine Metastabilität

- Asymptotisches Verhalten

$$J(\rho) \simeq \begin{cases} (v_{\max} - p)\rho & \text{für } \rho \ll 1 \\ (1-p)(1-\rho) & \text{für } 1-\rho \ll 1 \end{cases}$$

- Exakte Lösung für zwei Spezialfälle

  Deterministischer Grenzfall $\boldsymbol{p = 0}$:

  - Updateregeln vereinfachen sich zu
  $$\begin{aligned} v_n(t+1) &= \min\left[v_{\max}, v_n(t)+1, d_n(t)-1\right] \\ x_n(t+1) &= x_n(t) + v_n(t+1) \end{aligned}$$
  - Bei niedrigen Dichten: Selbstorganisation so, daß $d_n > v_{\max}$ für alle n
    $\rightarrow$ alle Fahrzeuge fahren mit $v_{\max}$ $\quad\Rightarrow\quad$ Fluß $J = \rho v_{\max}$
  - Nur möglich, wenn genug leere Zellen vor jedem Fahrzeug verfügbar, d.h. für
  $$\rho \leq \rho_m = \frac{1}{v_{\max}+1} \qquad \Rightarrow \qquad J_{\max} = \frac{v_{\max}}{v_{\max}+1}$$
  - Bei hohen Dichten: Für $\rho > \rho_m$ sind stabile Zustände gekennzeichnet durch
  $$v_n(t) = d_n(t) - 1 \qquad \Rightarrow \qquad J = 1 - \rho$$
  - Damit: $J = \min\left[\rho v_{\max}, 1-\rho\right]$

  Grenzfall $v_{\max} = 1$

  $$J(\rho, p) = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{1 - 4(1-p)\rho(1-\rho)}\right]$$

  aus Cluster–theoretischer, erweiterter Mean–Field–Theorie (exakt)

4.3 Untersuchung des Übergangs

4.3.1 Relaxation

- Charakteristisch für Phasenübergang 2. Ordnung: Divergenz der Relaxationszeit am kritischen Punkt

- Messung: Starte Simulation in zufälliger Konfiguration mit $v_n = 0$ und messe mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}(t)$ in jedem Zeitschritt

- Für $t \rightarrow \infty$: System erreicht stationären Zustand mit mittl. Geschwindigkeit $\langle \overline{v}_\infty \rangle$

- Relaxationszeit charakterisiert durch

$$\tau = \int_0^\infty \{\min[v^*(t), \langle\overline{v}_\infty\rangle] - \langle\overline{v}(t)\rangle\} \, \mathrm{d}t$$

mit $v^*(t)$ = mittl. Geschwindigkeit in der Beschleunigungsphase $t \to 0$ für niedrige Fahrzeugdichte $\rho \to 0$
keine Interaktion der Fahrzeuge für $\rho \to 0 \quad \Rightarrow \quad v^*(t) = (1-p)t$

- D.h.: Relaxationszeit durch Aufsummieren der Abweichungen der mittleren Geschwindigkeit $\langle\overline{v}(t)\rangle$ von den Werten eines Systems mit nur einem Fahrzeug, das ohne Wechselwirkungen mit anderen Fahrzeugen fahren kann ($\rho \to 0$)

- Ergebnis: Maximum des Relaxationsparameters in der Nähe, **aber unterhalb** der Dichte maximalen Flusses (außer für $p = 0$)
$\to$ Abb. 21+22

- Untersuchung der Abhängigkeit der Höhe und Breite der Peaks von der Systemgröße L ergibt Skalenverhalten

$$\tau_{\max}(L) \sim L^z \qquad\qquad \sigma(L) \sim L^{-1/\nu}$$

mit

$$\begin{array}{llll} p = 0.5 & : & z = 0.28 & \nu = 5.7 \\ p = 0 & : & z = 0.53 \pm 0.04 & \nu = 2.01 \pm 0.05 \end{array}$$

- Beobachtung: Auftreten neagtiver Werte für τ

- Betrachtung der Zeitentwicklung von $\langle\overline{v}(t)\rangle / \langle\overline{v}_\infty\rangle$ zeigt (Abb. 23): Für $\rho > \rho_c$ erreicht das System vorübergend Zustände mit höherer mittlerer Geschwindigkeit als der stationäre Zustand

- mikr. Deutung: In den ersten Zeitschritten verschwinden kleine Cluster aus der Anfangskonfiguration $\to$ Fluß steigt
Später: Überlebende Staus wachsen, immer mehr Fahrzeuge werden im Stau gefangen $\to$ Fluß sinkt auf seinen stationären Wert

4.3.2 Ordnungsparameter

- Suche eine Größe, die in unterschiedlichen Phasen qualitativ unterschiedliches Verhalten zeigt

- Einfachste Wahl: Dichte von Nächste–Nachbar–Paaren

$$m = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} n_i n_{i+1}$$

mit $n_i = 0$, wenn Zelle i leer, $n_i = 1$ wenn Zelle i besetzt

Deterministischer Fall $p = 0$: $\rightarrow$ Abb. 24

- Für $\rho < \rho_c = 1/(v_{\max} + 1)$ ist $m = 0$, da jedes Fahrzeug mind. $v_{\max}$ leere Zellen vor sich hat
- Für $\rho > \rho_c$: Fluß beschränkt durch Anzahl freier Zellen; auch stehende Fahrzeuge $\Rightarrow\ m \neq 0$

Fall kleiner $p > 0$: $\rightarrow$ Abb. 25

Verhalten anders in der Nähe von ρ_c:

- m fällt exponentiell als Funktion von ρ
- kein scharfer Übergang
- kein kritisches Verhalten in der Gegenwart von Rauschen ($p \neq 0$)
- Übergangsdichte ρ_c trotzdem bestimmen: Betrachte Skalenverhalten von m ($\rightarrow$ Abb. 26)
- Skalengesetz:

$$\overline{m}(\rho) = \Pi(p) m(\rho + \Delta\rho_c)$$

  mit Skalierungsfaktor $\Pi(p)$ und
  $\Delta\rho_c$ = Verschiebung der Übergangsdichte im Vergleich zum determ. Wert $\rho_c = 1/(v_{\max} + 1)$ ($\rightarrow$ Abb. 27)

4.3.3 Räumliche Korrelationen

- Bei Phasenübergang 2. Ordnung: divergierende Korrelationslänge am krit. Punkt
- Betrachte Dichte–Dichte–Korrelation

$$G(r) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} n_i n_{i+r} - \rho^2$$

Fall $p = 0$: $\rightarrow$ Abb. 28
Für $\rho = \rho_c$ ist

$$G(r) = \begin{cases} \rho_c - \rho_c^2 & \text{für } r = 0 \qquad \bmod (v_{\max} + 1) \\ -\rho_c^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\rightarrow$ Amplitude der $G(r)$–Schwingung konstant für $\rho = \rho_c$

Kleine $p > 0$: $\rightarrow$ Abb. 29

- gleiche Struktur wie im det. Fall, aber Amplitude fällt exponentiell für alle ρ
- Abfall der Amplitude bestimmt Korrelationslänge ξ für gegebenes Paar (ρ, p)
  $\rightarrow$ endlich für alle Dichten, wenn $p \neq 0$

- Maximalwert $\xi_{\max}$ der Korrelationslänge bestimmt die Übergangsdichte für kleine p ($\rightarrow$ Abb. 30)
- <u>numerisch:</u> Verhalten

  $$\xi_{\max} \sim p^{-1/2}$$

  (analytisch bestätigt für $v_{\max} = 1$)
- Exponent unabhängig von $v_{\max}$ (für kleine p) $\rightarrow$ Abb. 31
- Für größere p gibt ξ nicht mehr die relevante Längenskala an. Diese ist bestimmt durch die Größenverteilung von Staus

4.3.4 Ergebnisse

- Ordnungsparameter m verschwindet für $p \neq 0$ nicht exakt, Übergangsdichte bestimmbar aus Skalenverhalten
- Rauschen ($p \neq 0$) zerstört langreichweitige Korrelationen

  (endliche Korrelationslänge)
- $\xi_{\max}$ divergiert im deterministischen Fall wie $1/\sqrt{p}$ für alle $v_{\max}$
- Dichte maximalen Flusses $\rho(J_{\max}) \neq \rho_c$ für $p \neq 0$
- Kritisches Verhalten nur im deterministischen Fall

4.4 Erweiterungen des NaSch–Modells

Viele experimentell festgestellte Eigenschaften realen Verkehrs werden durch das NaSch–Modell nicht erfaßt. Es gibt eine Reihe von Erweiterungen des Modells, die einzelne Aspekte des Verkehrs beschreiben.

4.4.1 Das VDR–Modell und "Slow–to–start"–Regeln

- NaSch–Modell produziert keine metastabilen Zustände
- Experiment: Fluß aus einem Stau deutlich kleiner als in freiem Fluß
- Einführung von "Slow–to–start"–Regeln

<u>**Beispiel:**</u> **VDR–Modell** (velocity–dependent randomization)

- Einführung einer geschwindigkeitsabhängigen Bremswahrscheinlichkeit

  $$p(v) = \begin{cases} p_0 & \text{für } v = 0 \\ p & \text{für } v > 0 \end{cases} \qquad (p_0 > p)$$
- Im Grenzfall $p_0 \rightarrow p$ erhält man das NaSch–Modell
- Fundamentaldiagramm (Abb. 32) zeigt Hysterese–Effekt: 2 verschiedene Zweige, abhängig von der Initialisierung des Systems
- <u>Vergleich mit NaSch–Modell:</u>

- Kleine Dichte $\rho \ll 1$: keine langsamen Fahrzeuge $\rightarrow$ freier Fluß
- Große Dichte $1-\rho \ll 1$: p_0 dominiert, Fluß wie im NaSch–Modell mit $p = p_0$

$$J(\rho, p) \simeq \begin{cases} (v_{\max} - p)\rho & \text{für } \rho \ll 1 \\ (1 - p_0)(1 - \rho) & \text{für } 1 - \rho \ll 1 \end{cases}$$

- Mikroskopische Struktur der Zustände im Free–flow–Ast sehr ähnlich zu der des NaSch–Modells
- Metastabile homogene Zustände haben gewisse Lebensdauer, danach zerfallen sie und führen zum zähfließenden Ast
  $\rightarrow$ Abb. 33
- Mikroskopische Struktur des zähfließenden Asts drastisch verschieden vom NaSch–Modell:
  Phasen–Separation in makroskopischen Stau und makroskopischen Free–flow–Regime
- Grund dafür ist der reduzierte Fluß aus einem Stau heraus:
  - Ist der Fluß aus einem Stau maximal, löst sich jeder kleine Stau im Free–flow–Regime sofort auf, weil der Ausfluß größer ist als der globale Fluß
  - Ist der Fluß aus einem Stau reduziert, ist die Dichte im Free–flow–Regime kleiner als die Dichte maximalen Flusses und die Fahrzeuge bewegen sich frei
    $\rightarrow$ Bild zeigt: geringe Dichte im down–stream–Bereich
  - Wegen der Reduktion der Dichte im Ausfluß–Bereich ist die spontane Bildung von Staus unterdrückt, solange p nicht zu groß ist
- Simulationen zeigen: Fluß aus einem Stau unabhängig von der Dichte
  $\rightarrow$ in Übereinstimmung mit Experiment

4.4.2 Weitere Verbesserung: Vorausschauendes Fahren

Erweiterung beruht auf den Ideen

- Große Abstände: Fahrzeuge fahren mit gewünschter Geschwindigkeit $v_{\max}$
- Mittlere Abstände: Fahrzeuge reagieren auf Geschwindigkeitsänderungen des vorausfahrenden Fahrzeugs
- Kleine Abstände: Fahrzeuge wählen ihre Geschwindigkeit so, daß sicheres Fahren möglich ist
- Beschleunigung verzögert für stehende Fahrzeuge und direkt nach Bremsmaneuvern

Updateregeln:

Schritt 0: Bestimmung von p

- $p(v_n, b_{n+1}) = \begin{cases} p_b & \text{wenn } b_{n+1} = 1 \text{ und } t_h < t_s \\ p_0 & \text{wenn } v_n = 0 \\ p_d & \text{sonst} \end{cases}$

Schritt 1: Beschleunigung

- Wenn ($b_{n+1} = 0$ und $b_n = 0$) oder $t_h \geq t_s$:

$$v_n(t+1) = \max[v_n + 1, v_{\max}]$$

Schritt 2: NaSch–Bremsregel

- $v_n(t+1) = \min[d_n^{\text{eff}}, v_n]$
- Wenn $v_n(t+1) < v_n(t)$: $\quad b_n = 1$

Schritt 3: Randomisierung

- $v_n(t+1) = \max[v_n(t+1) - 1, 0]$ $\qquad$ mit Wahrscheinlichkeit p
- Wenn $p = p_b$: $\quad b_n = 1$

Schritt 4: Fahren

- $x_n(t+1) = x_n(t) + v_n(t+1)$

Dabei ist

$$t_h = d_n / v_n(t) \qquad \text{und} \qquad t_s = \min[v_n(t), h]$$

mit (zeitl.) Interaktions–Horizont h und

$$d_n^{\text{eff}} = d_n + \max[v_{\text{anti}} - \text{gap}_{\text{security}}, 0] \qquad v_{\text{anti}} = \min[d_{n+1}, v_{n+1}]$$

Die Größe b_n gibt den Status der Bremslichter des Fahrzeugs n an. Sie kann die Werte 0 und 1 annehmen.
Problem: In dieser Formulierung bleiben die Bremslichter (wird die Bremse einmal betätigt) eines Fahrzeugs für immer eingeschaltet. Offenbar fehlt ein Schritt im Updateverfahren.
Vergleich von Simulationsergebnissen mit exp. Daten → Abb. 34–36

5 Bilder

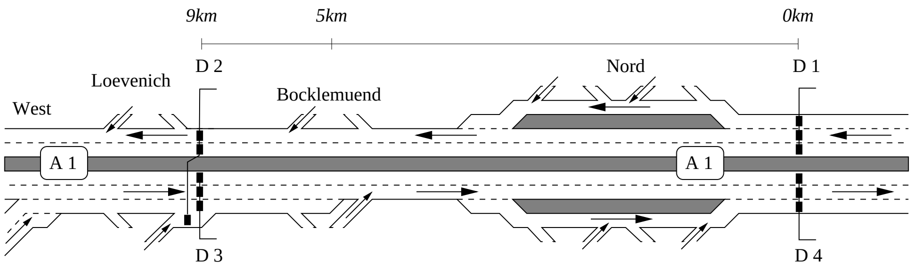

Abb. 1: Skizze des untersuchten Autobahnabschnitts

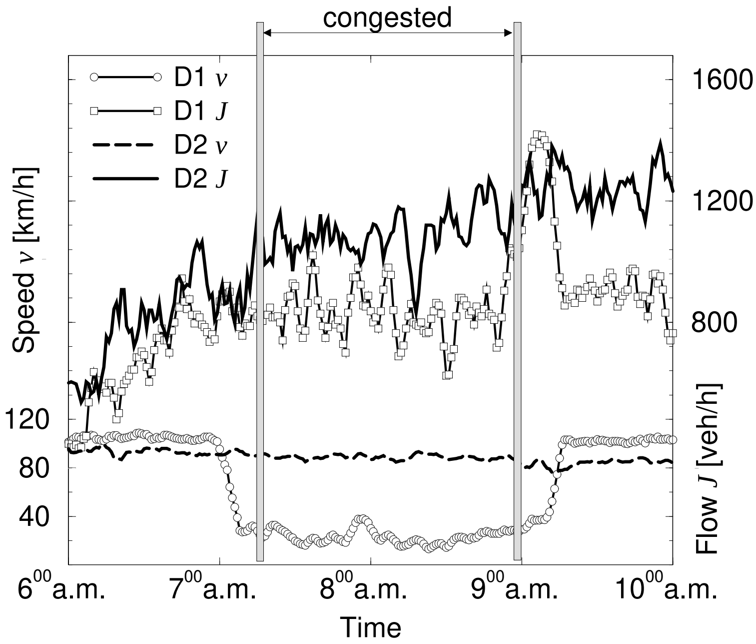

Abb. 2: Trennung nach freiem Fluß und stockendem Verkehr

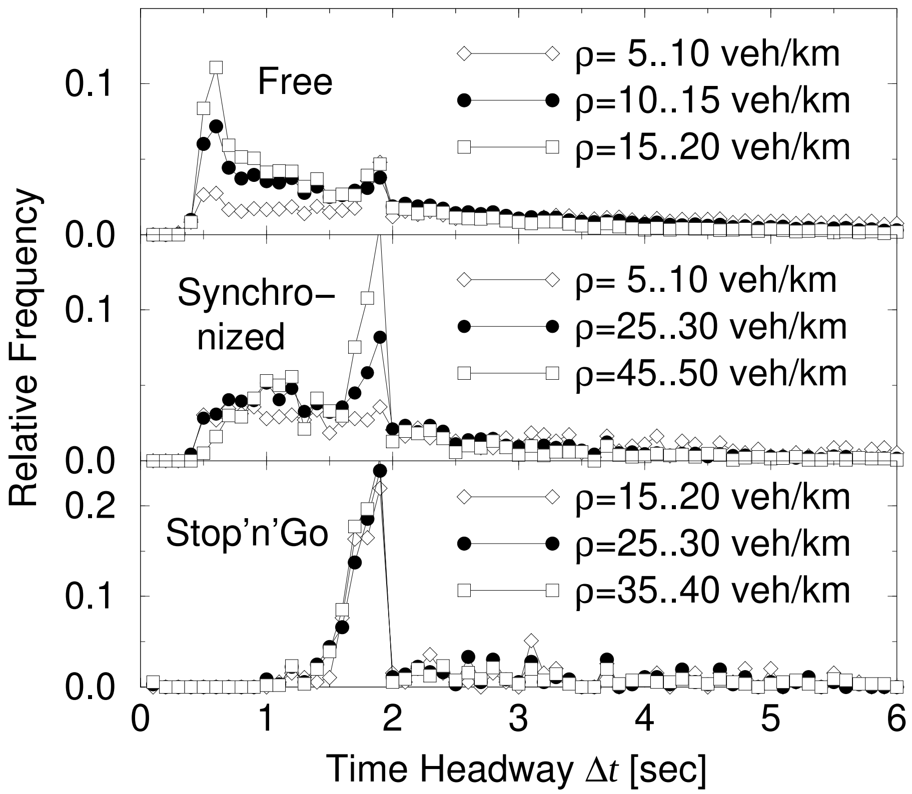

Abb. 3: Zeitl. Abstand aufeinander folgender Fahrzeuge

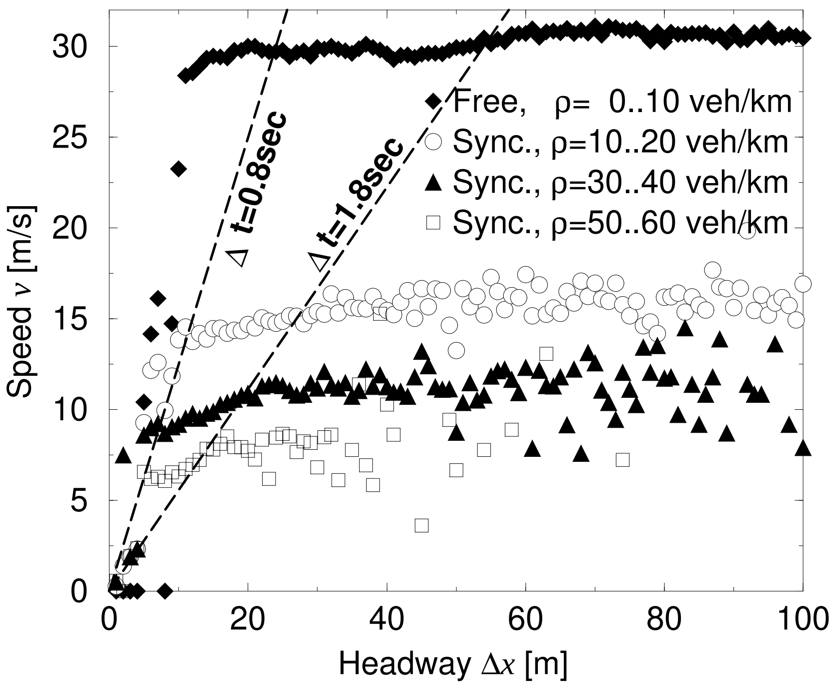

Abb. 4: Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Abstand zum Vordermann

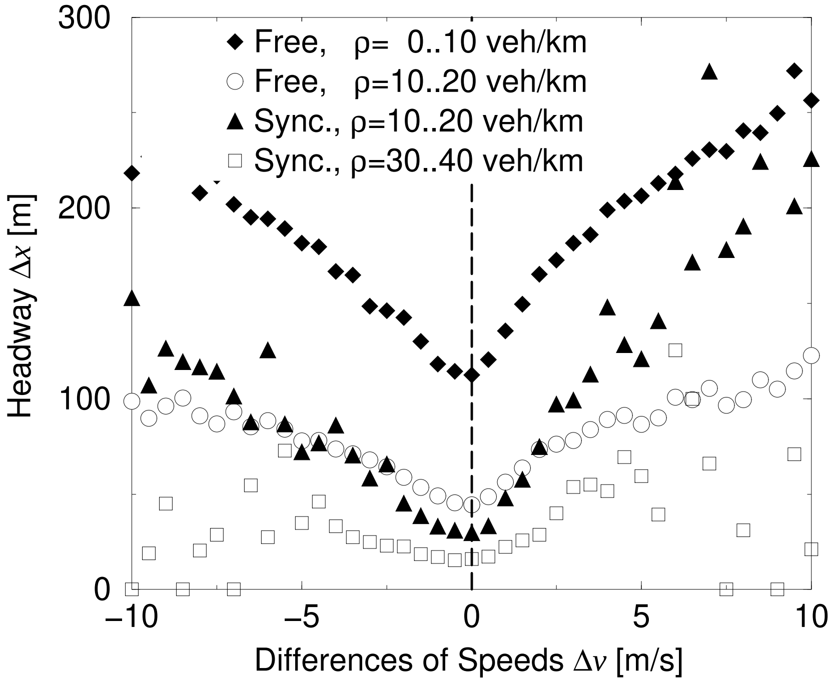

Abb. 5: Abstand in Abhängigkeit von der Geschwindigkeitsdifferenz zum Vordermann

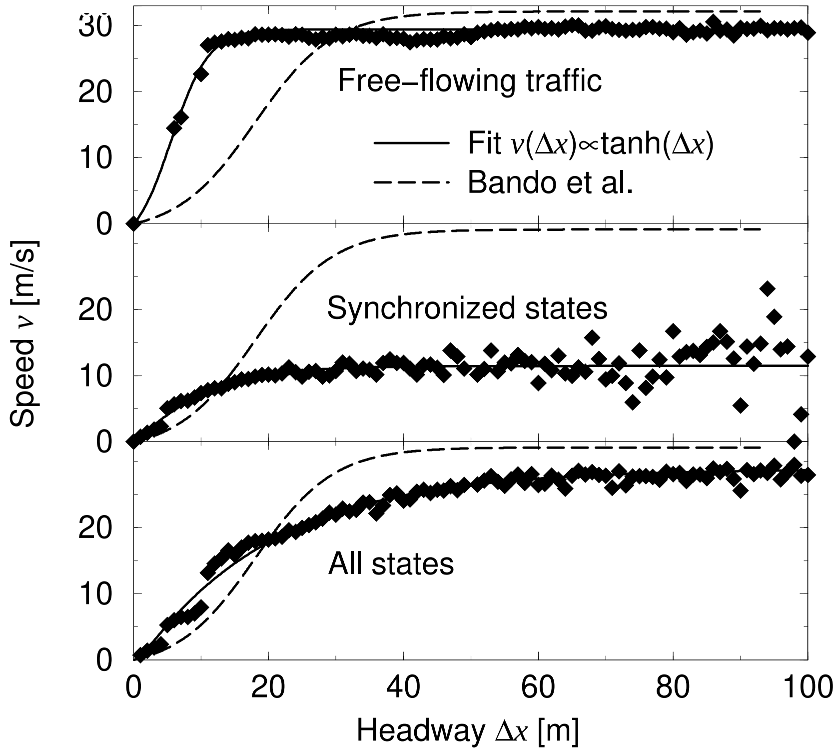

Abb. 6: Optimal–velocity–Funktion (Fit an exp. Daten)

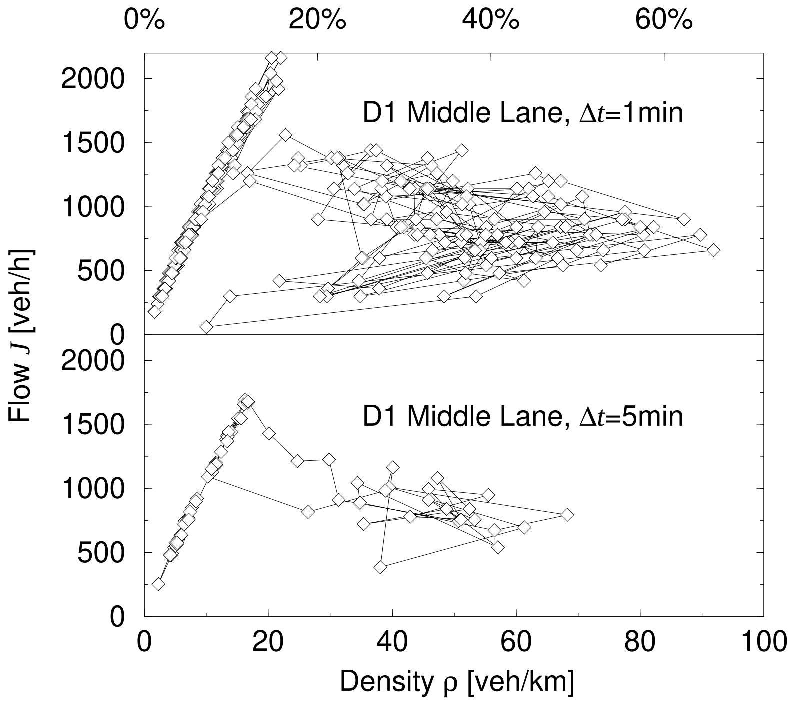

Abb. 7: Fundamentaldiagramm (Rohdaten)

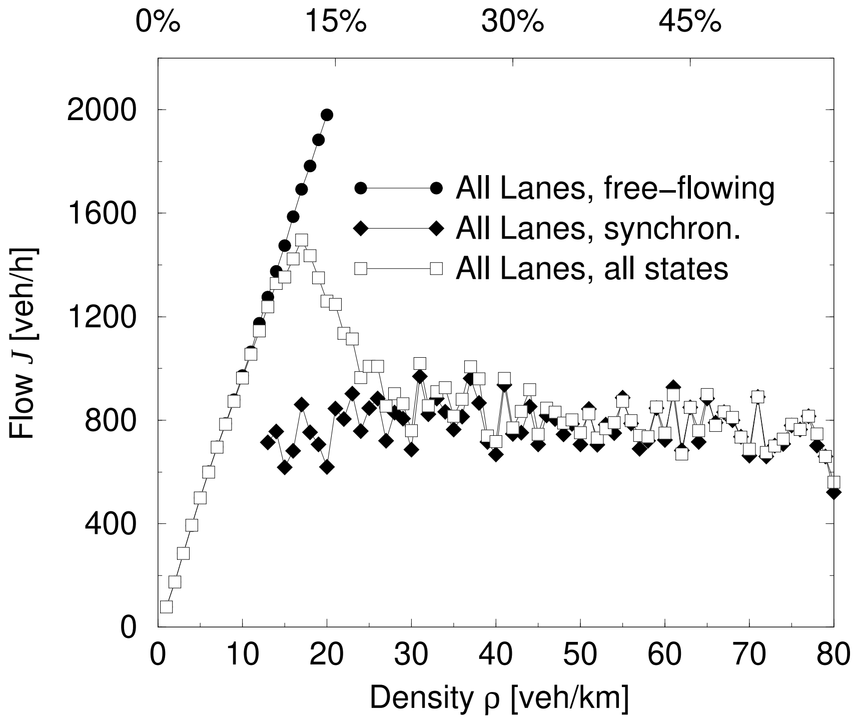

Abb. 8: Fundamentaldiagramm (Histogramm)

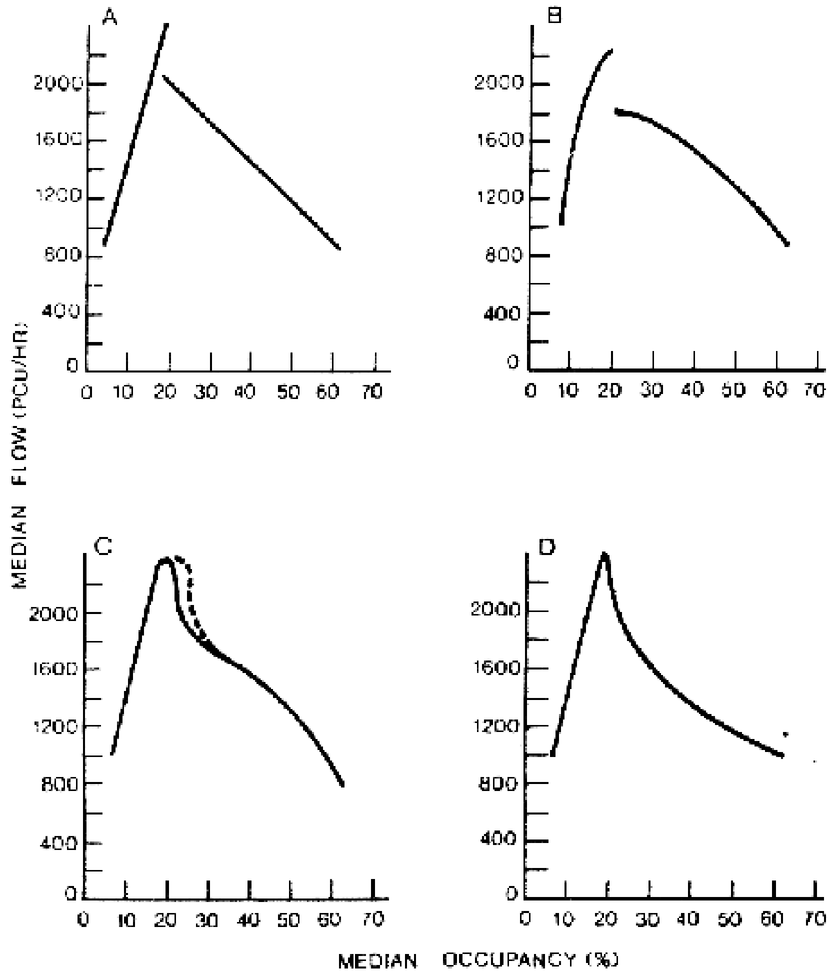

Abb. 9: Mögliche, mit Experimenten verträgliche Formen des Fundamentaldiagramms

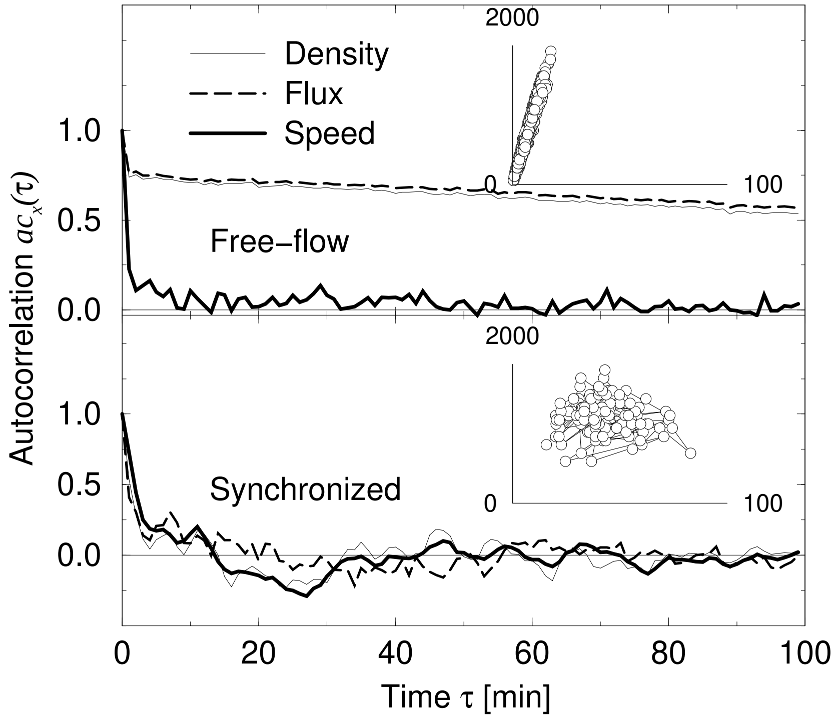

Abb. 10: Autokorrelation von J, ρ und v für freien Fluß und synchronisierten Verkehr

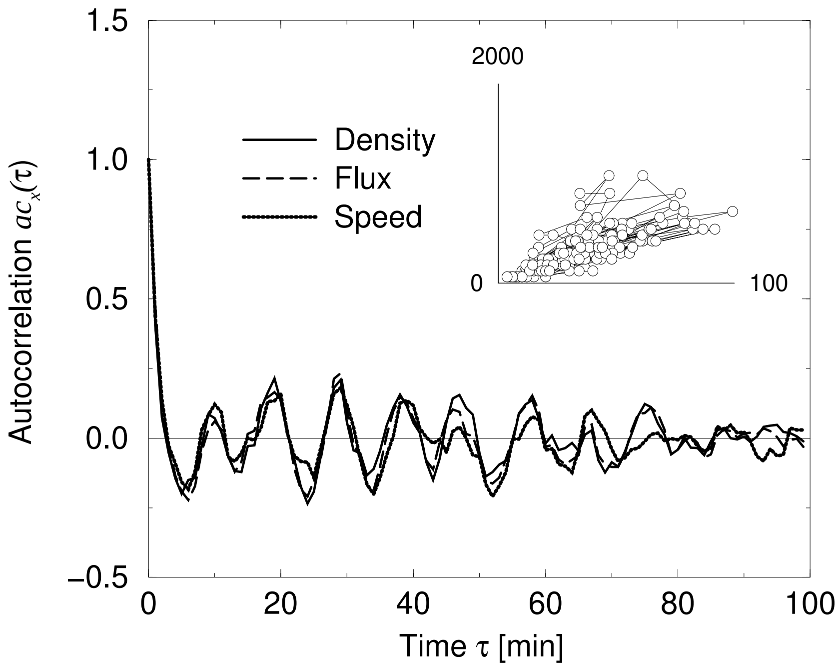

Abb. 11: Autokorrelation von J, ρ und v für stop–and–go–Verkehr

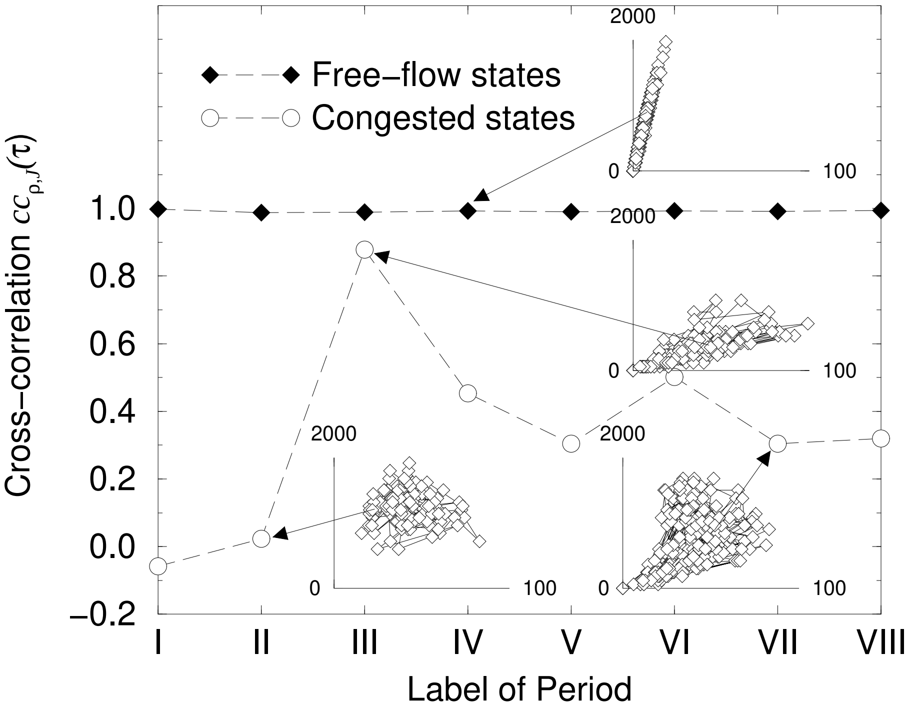

Abb. 12: Korrelation von J und ρ für versch. Verkehrszustände

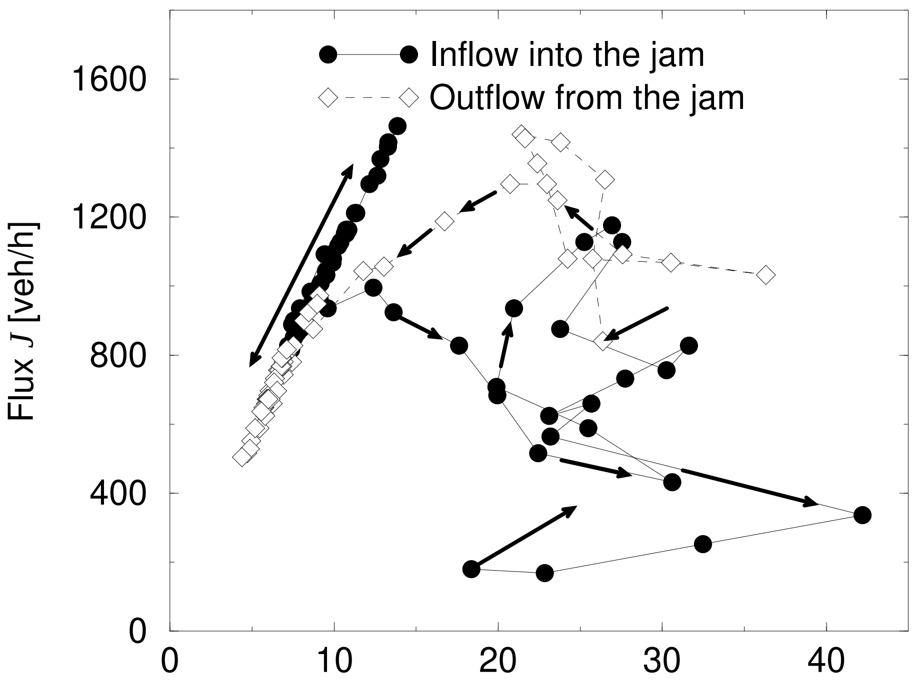

Abb. 13: Übergang freier Fluß ↔ stockender Verkehr

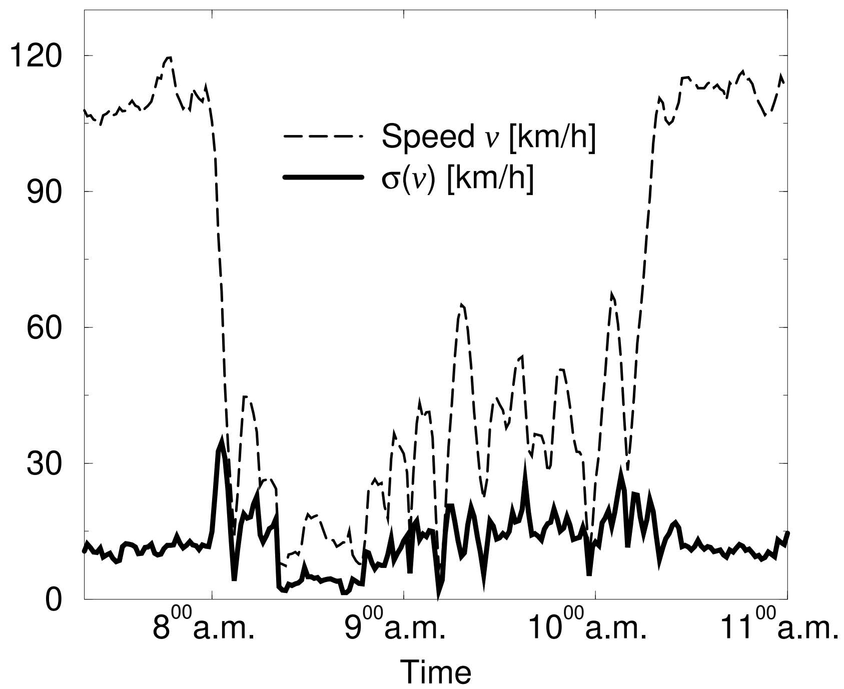

Abb. 14: Zeitreihe: mittlere Geschwindigkeit und Varianz

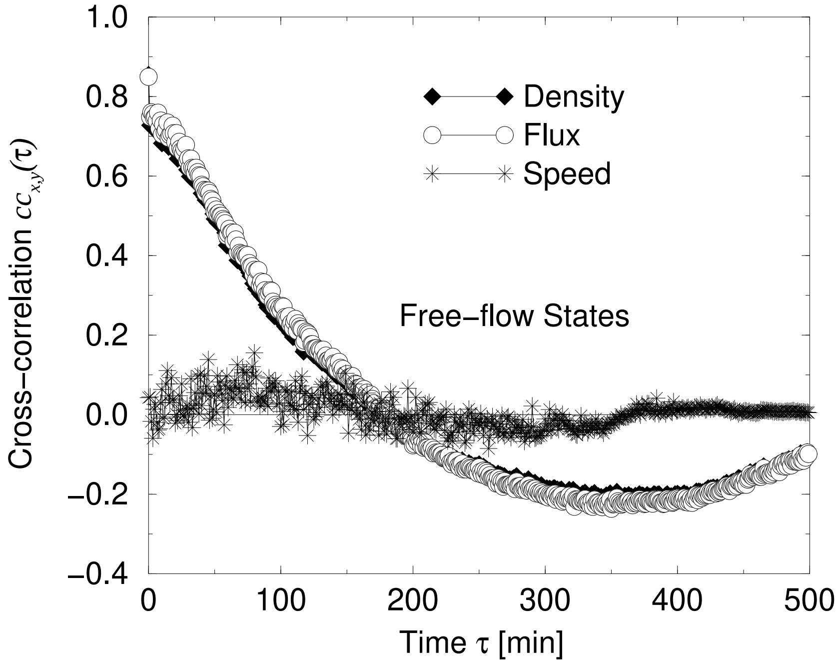

Abb. 15: Korrelation von v, ρ und J auf versch. Fahrspuren (freier Fluß)

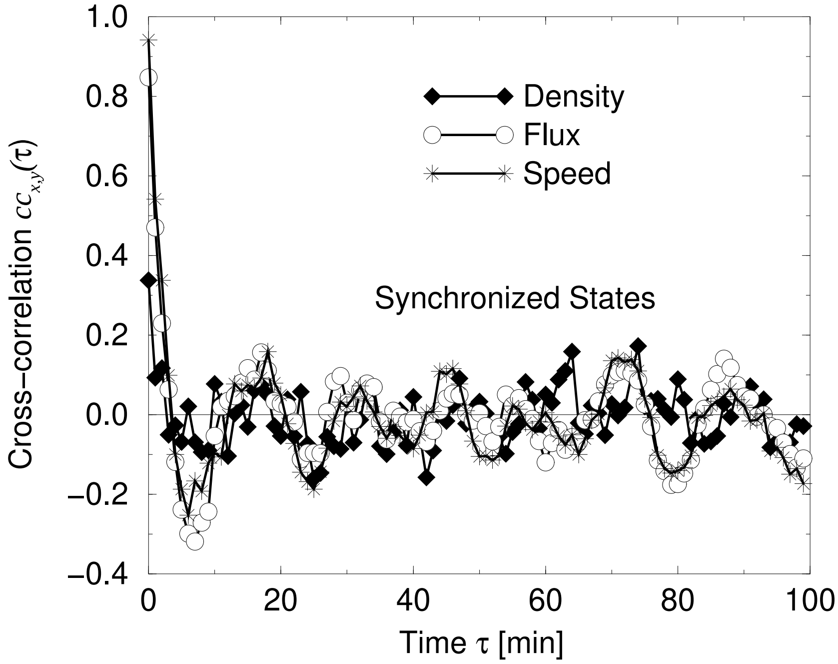

Abb. 16: Korrelation von v, ρ und J auf versch. Fahrspuren (synchr. Verkehr)

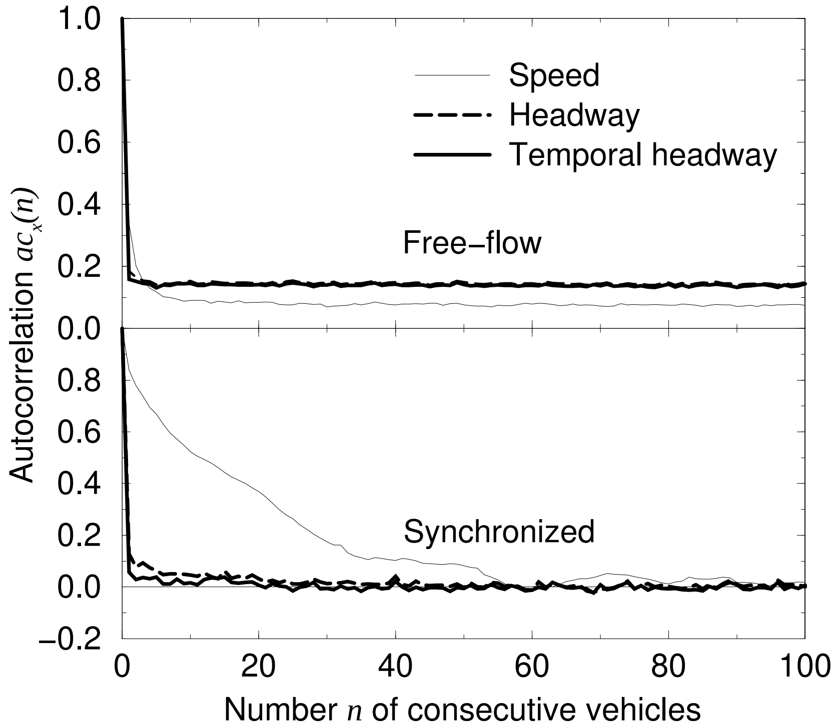

Abb. 17: Korrelation von v, Δt und Δx aufeinander folgender Fahrzeuge

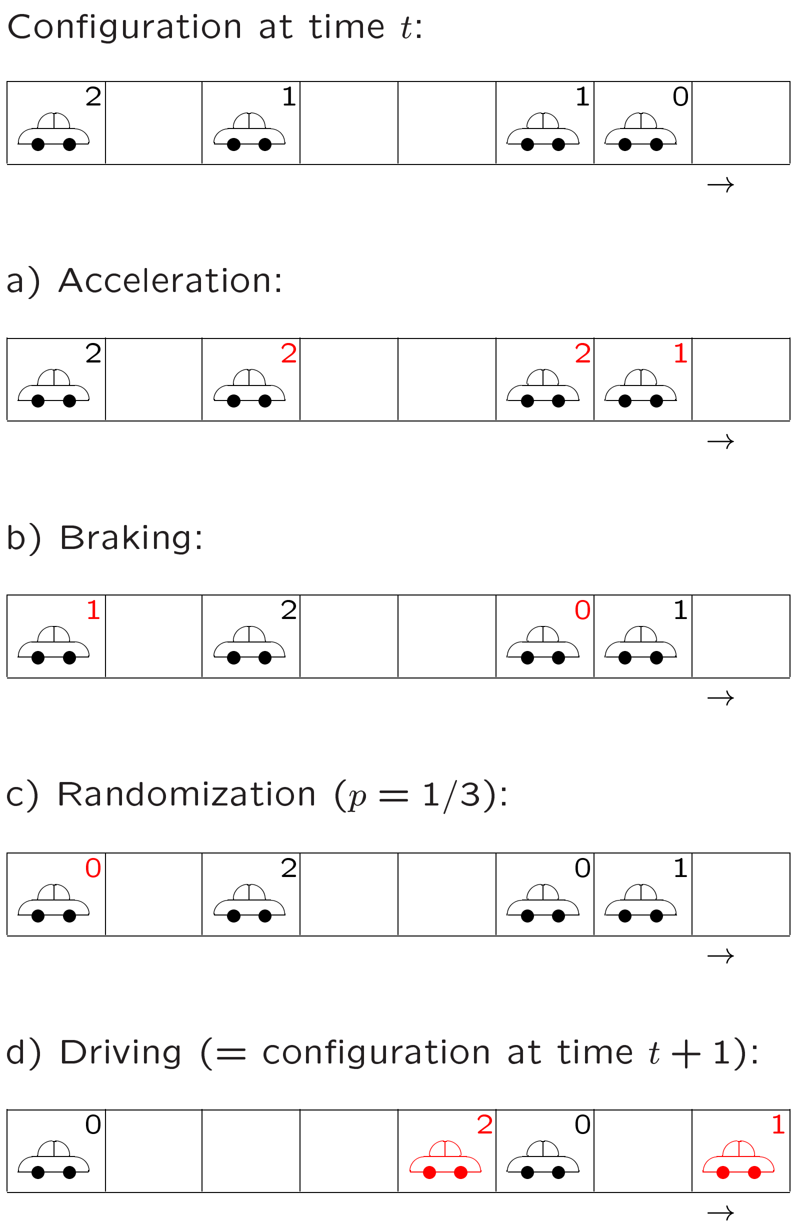

Abb. 18: Beispielkonfiguration des NaSch–Modells

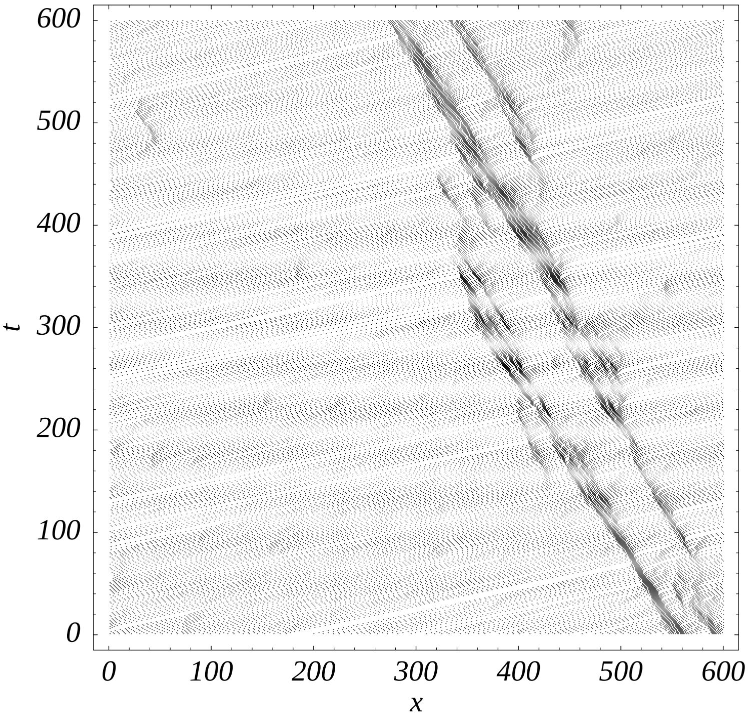

Abb. 19: Raum–Zeit–Diagramm des NaSch–Modells mit $v_{\max} = 5$, $\rho = 0.15$ und $p = 0.2$ (periodische Randbedingungen)

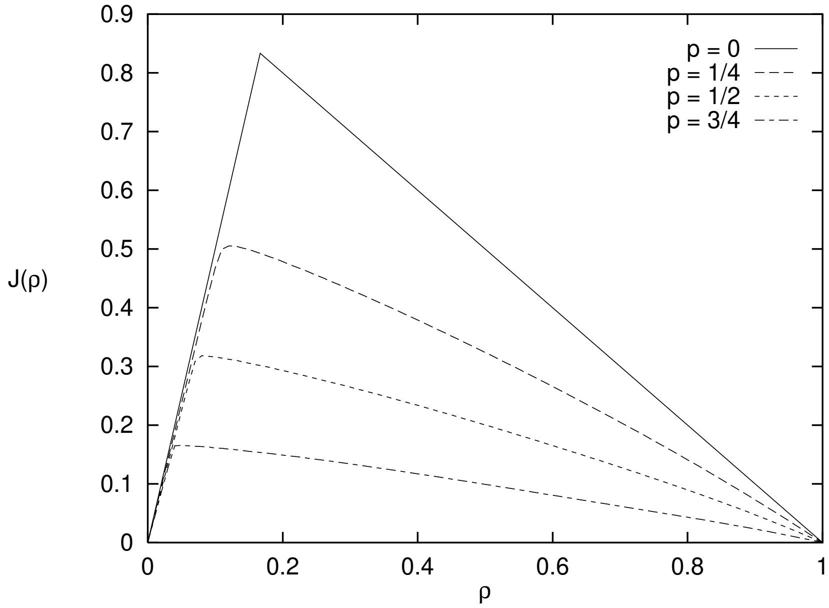

Abb. 20: Fundamentaldiagramm des NaSch–Modells

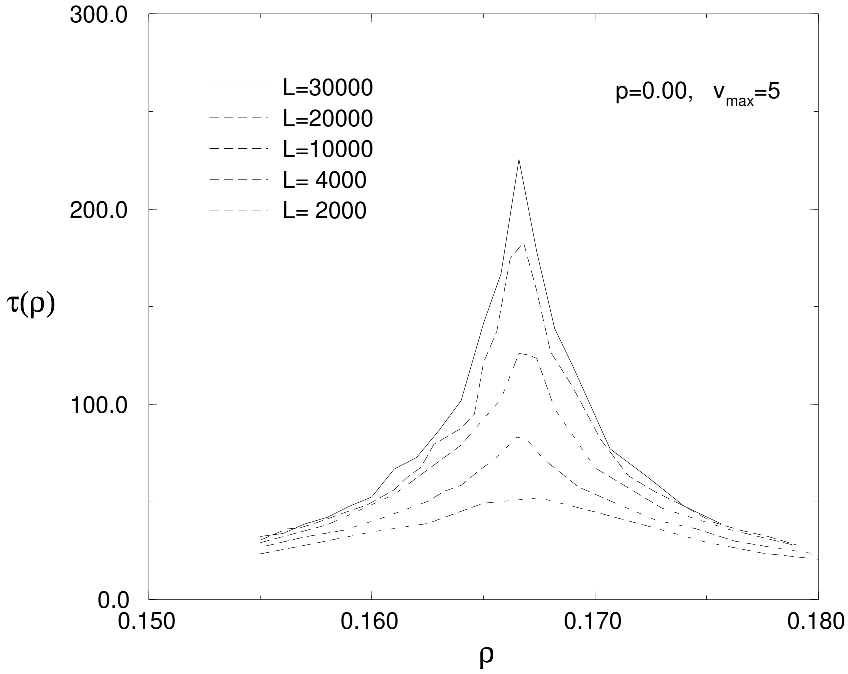

Abb. 21: Relaxationzeit im deterministischen Fall

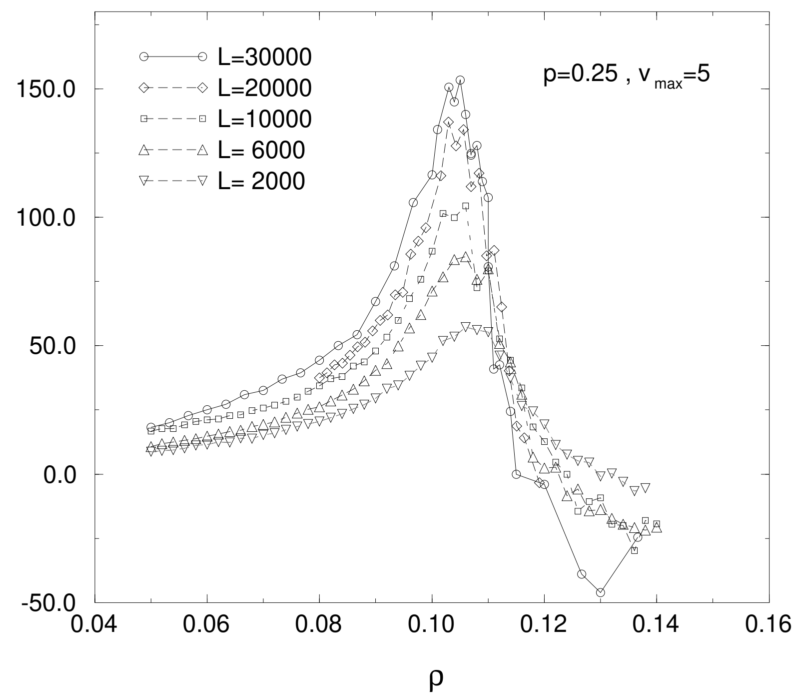

Abb. 22: Relaxationszeit für $p = 1/4$

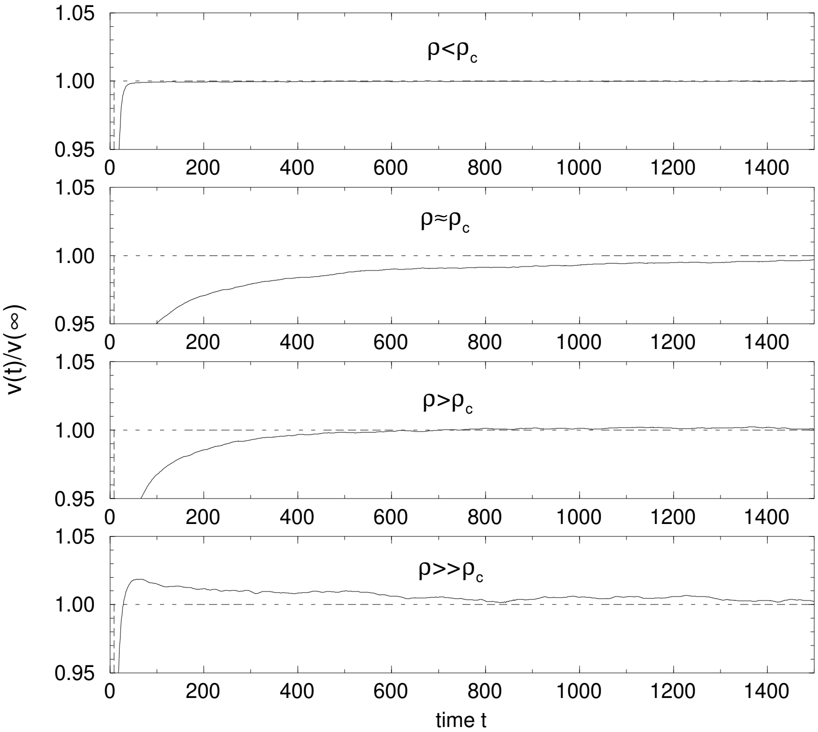

Abb. 23: Zur Erklärung negativer Relaxationszeiten

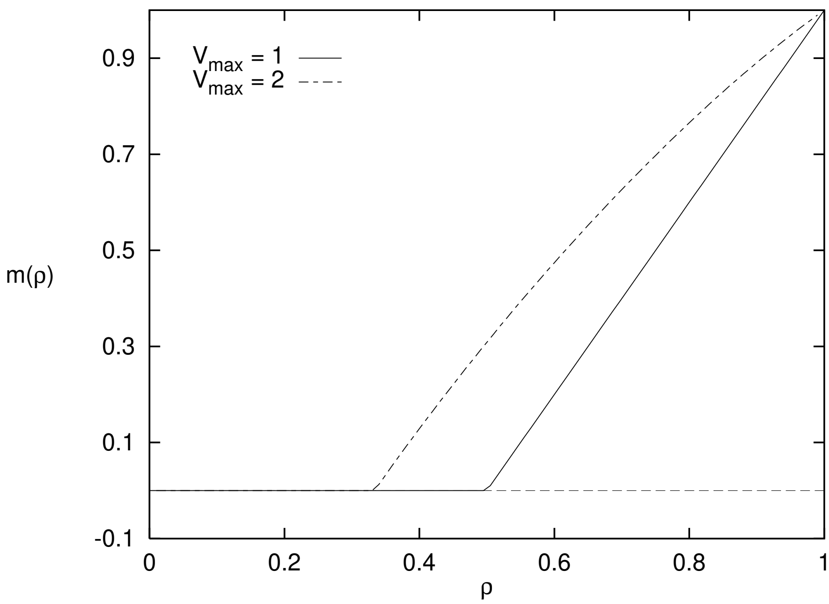

Abb. 24: Ordnungsparameter $m(\rho)$ für $p = 0$

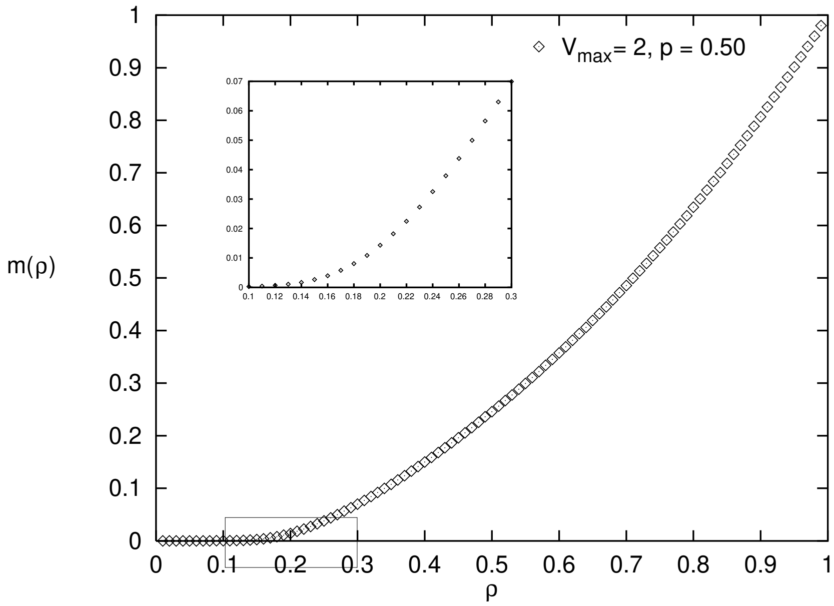

Abb. 25: Ordnungsparameter $m(\rho)$ für $p \neq 0$

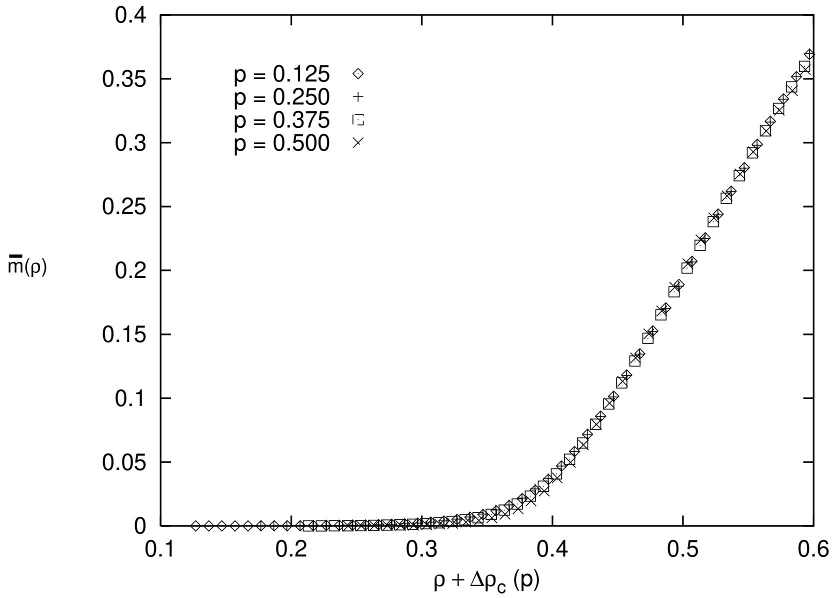

Abb. 26: Datenkollaps durch Skalierung

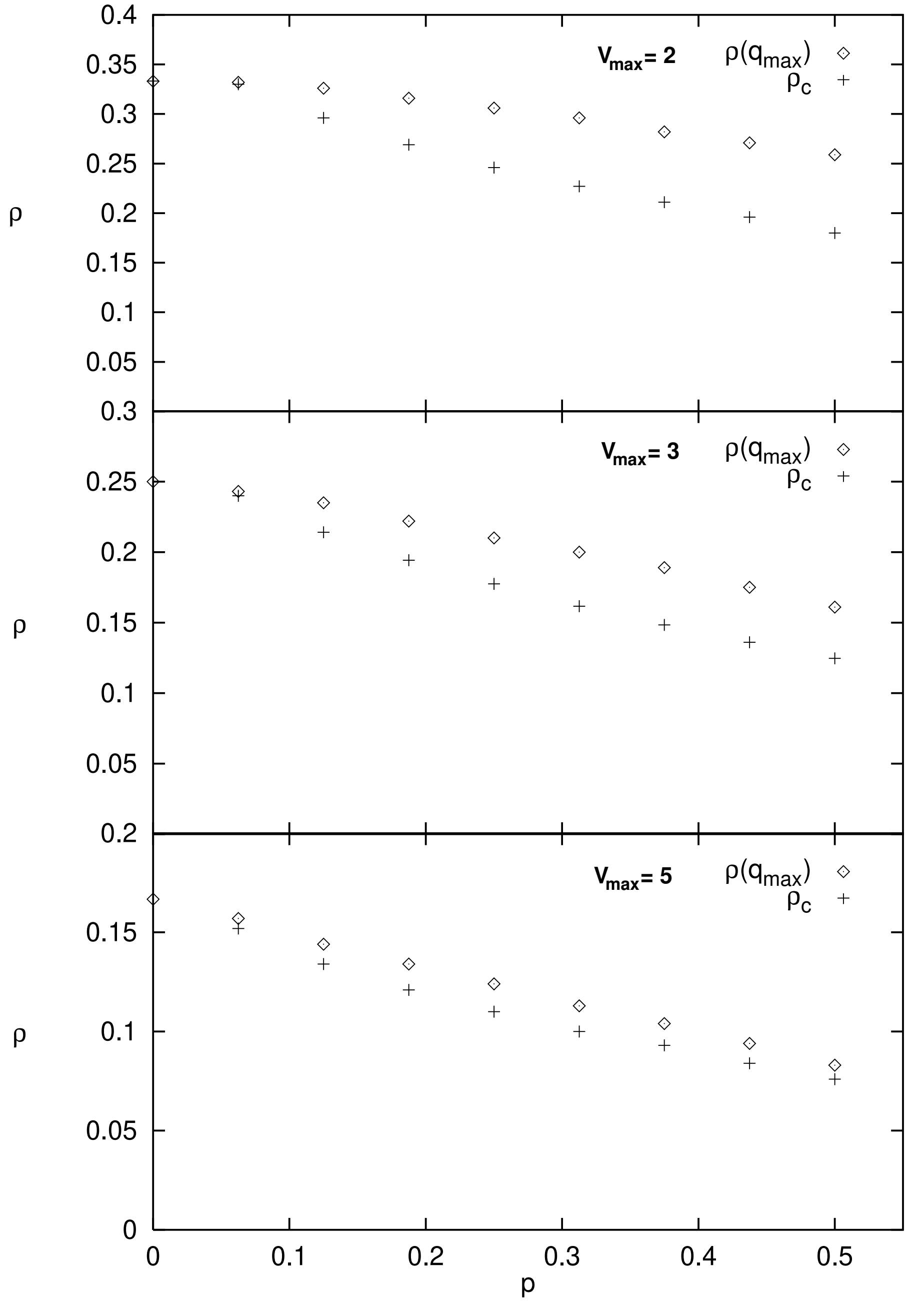

Abb. 27: Abweichung $\Delta\rho_c$ vom deterministischen Wert $\rho(J_{\max})$ in Abhängigkeit von p

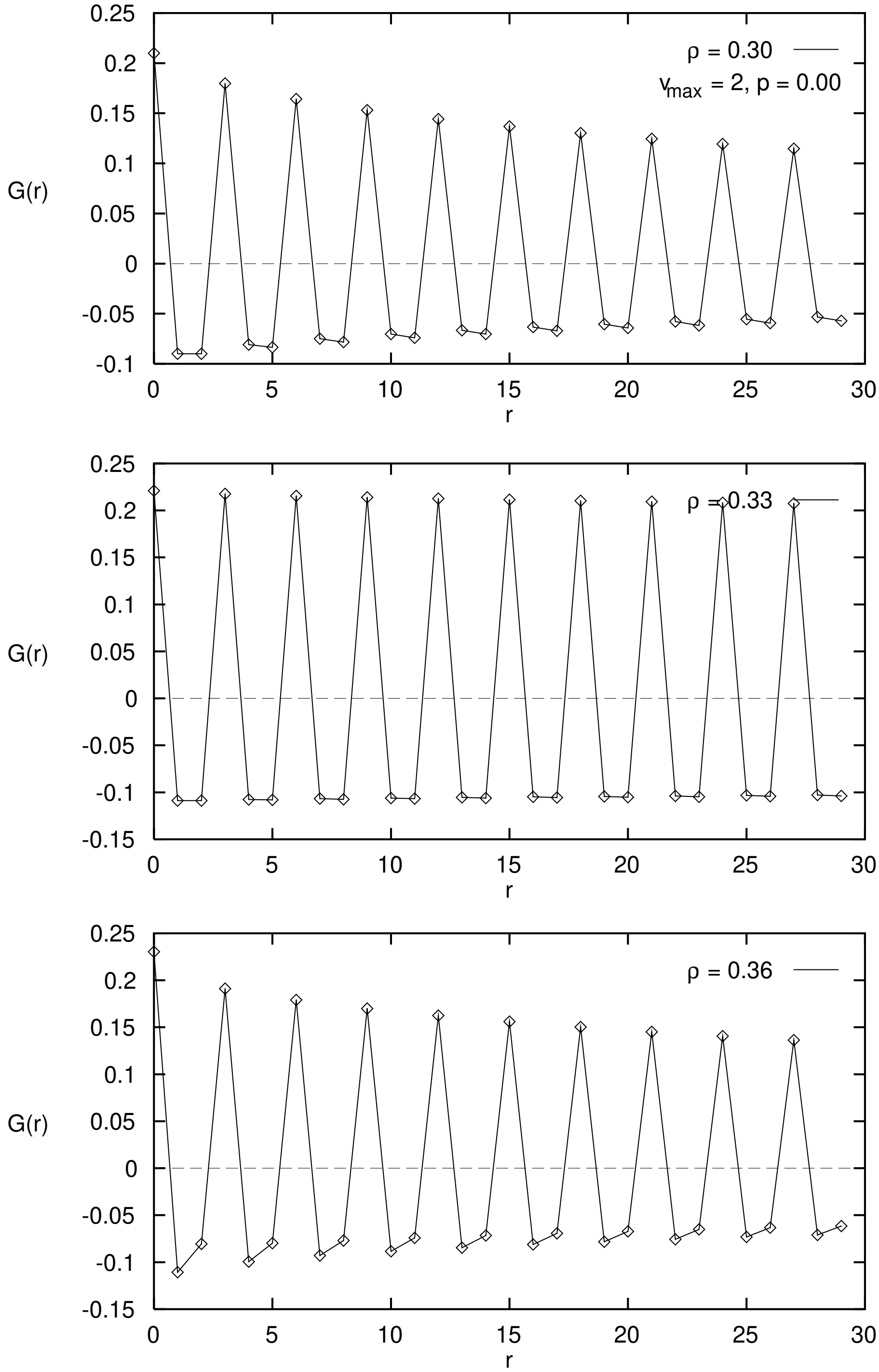

Abb. 28: Korrelationsfunktion im deterministischen Fall

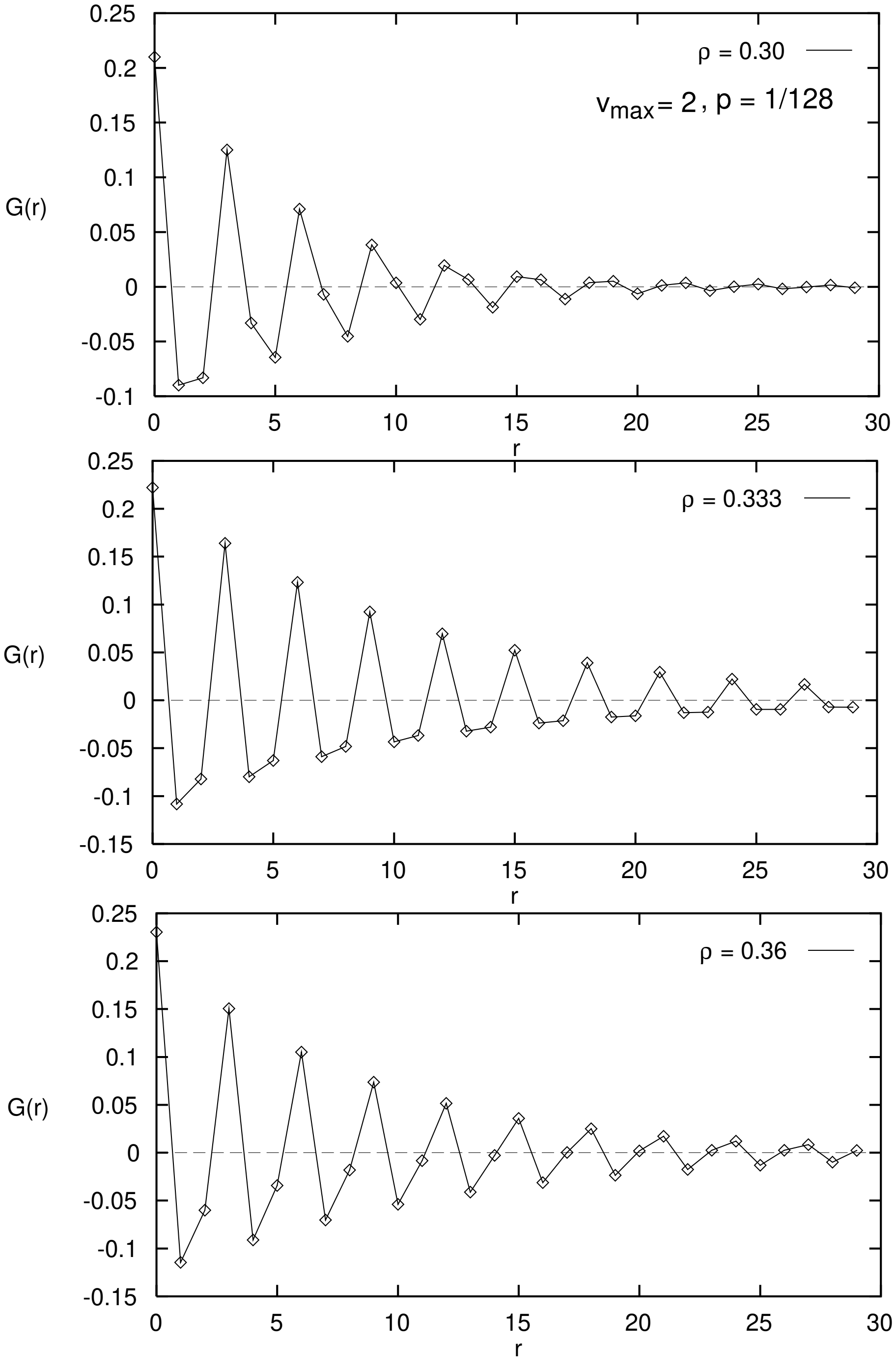

Abb. 29: Korrelationsfunktion für kleines $p > 0$

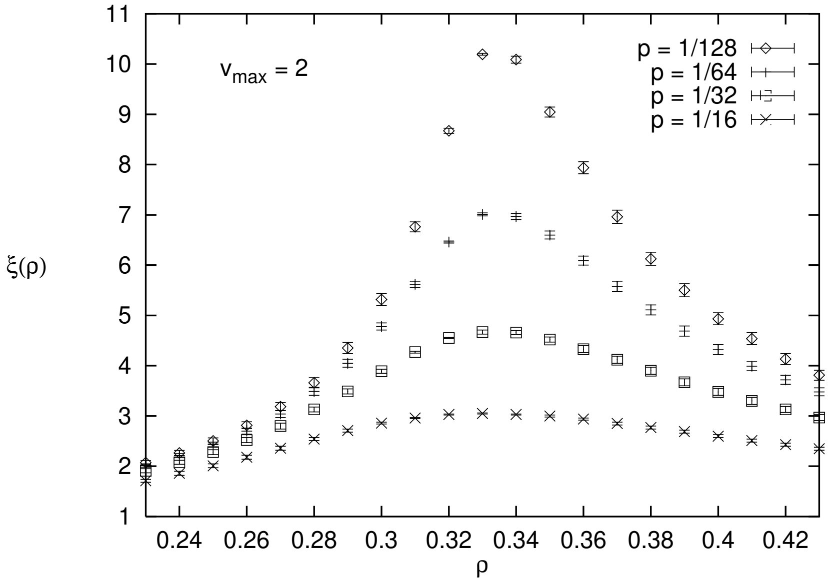

Abb. 30: Korrelationslänge $\xi(\rho)$ für verschiedene p

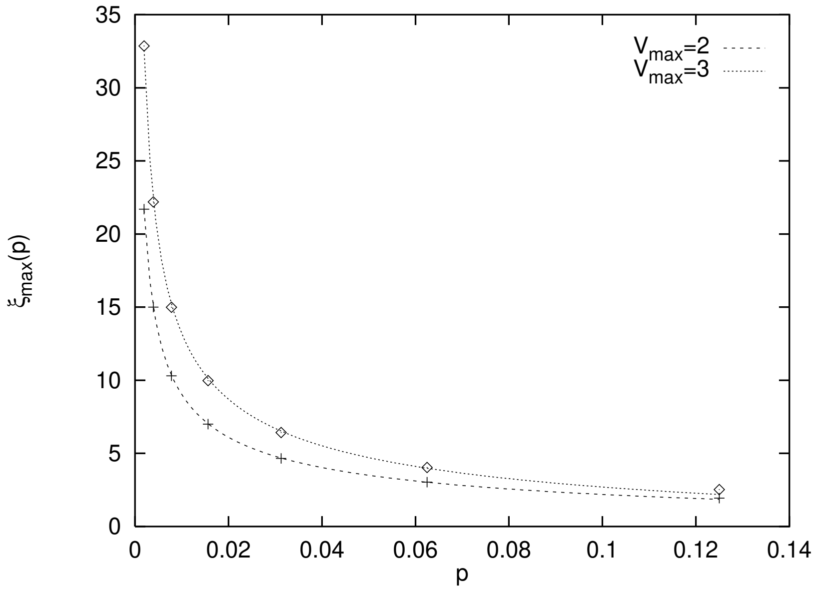

Abb. 31: Korrelationslänge $\xi_{\max}(p)$ für verschiedene $v_{\max}$

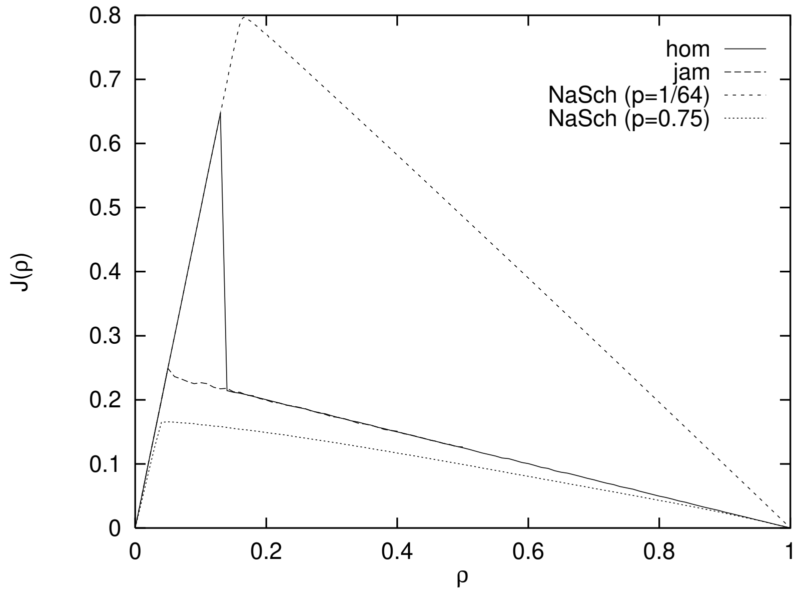

Abb. 32: Fundamentaldiagramm des VDR–Modells

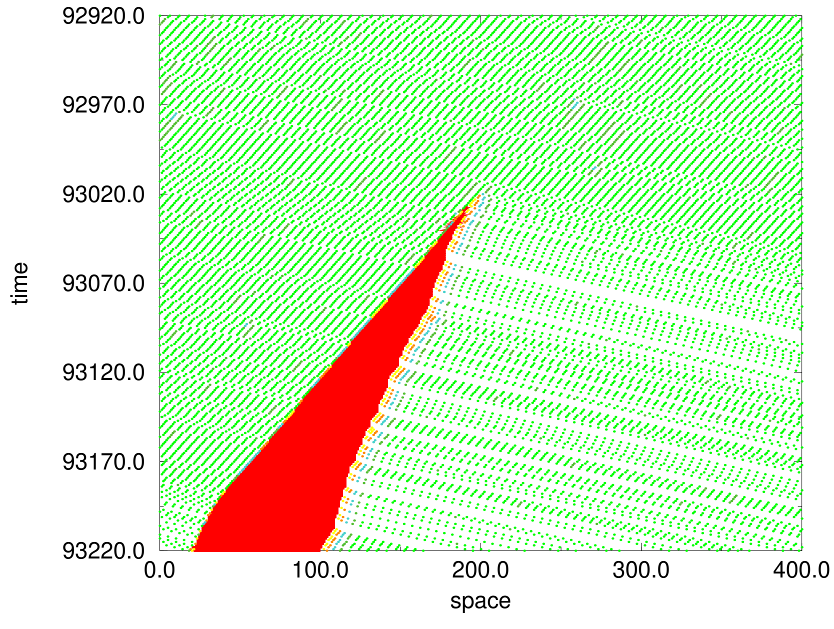

Abb. 33: Raum–Zeit–Diagramm des VDR–Modells

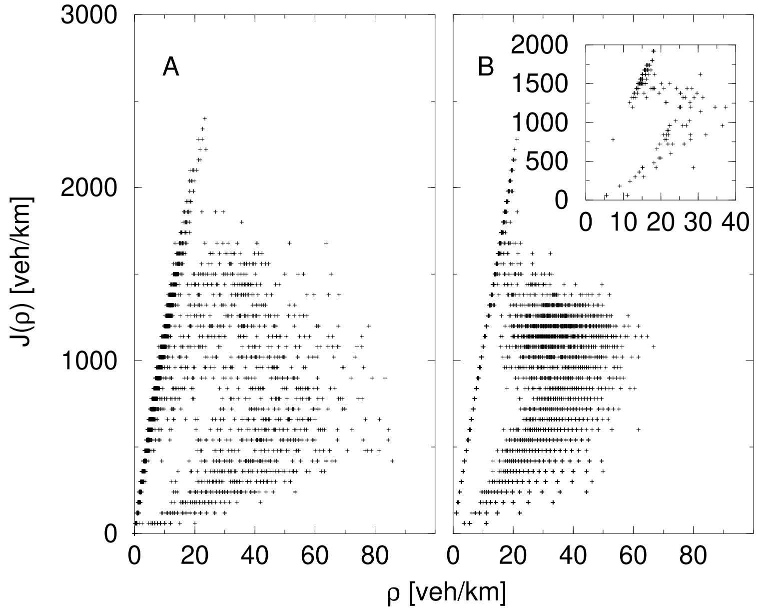

Abb. 34: Fundamentaldiagramm experimentell (links), Simulatiuon (rechts); Rohdaten

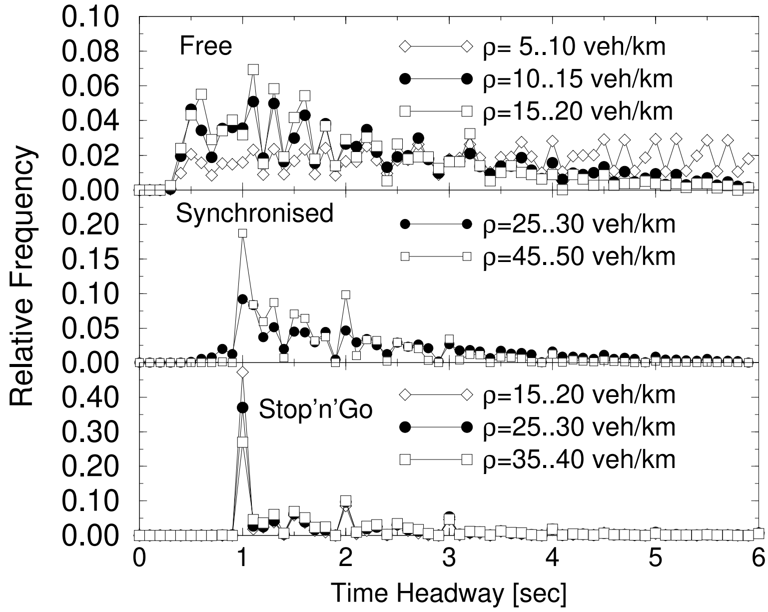

Abb. 35: Simulation: zeitl. Abstand aufeinander folgender Fahrzeuge

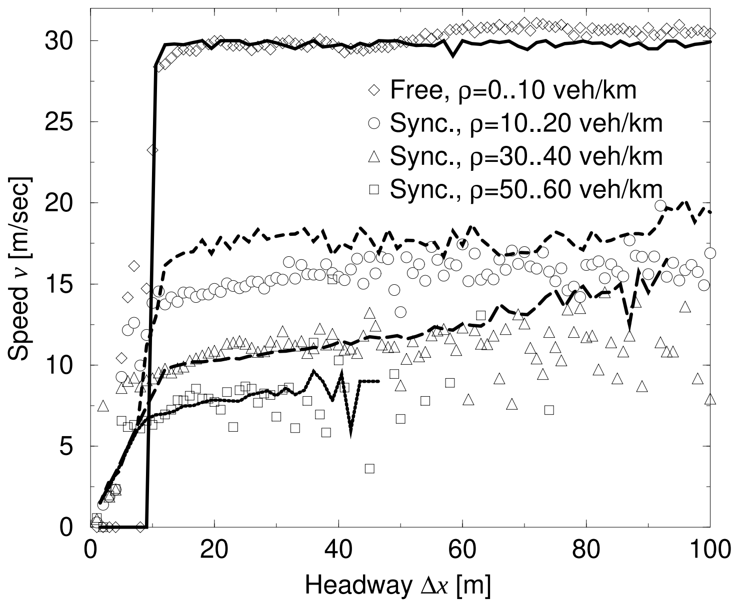

Abb. 36: Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Abstand; Experiment (Symbole), Simulation (Linien)