

# Thermische Feldtheorie und Zustandsgleichung der QCD

Lars Zeidlewicz

Forschungsseminar QFT

10.07.2006

# I. Thermische Feldtheorie

## Übersicht:

- Pfadintegralformulierung bei nichtverschwindender Temperatur
- Beispielrechnung: Thermodynamisches Potential für Bosonen
- Gitterformulierung

Wie berechnet man thermodynamische Größen ( $p, \varepsilon$ ) bei  $T \neq 0$  im Rahmen der QFT?

Ausgangspunkt:

- Zentrale Größe: Zustandssumme

$$Z(\beta) = \text{Tr} \left( e^{-\beta H} \right)$$

- Formale Übereinstimmung mit Eukl. Feldtheorie bei  $T = 0$ :

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S}$$

# Übergangsamplitude

$$\langle \phi_b | e^{-iHt} | \phi_a \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp \left( i \int_0^t dt \int d^3x \mathcal{L} \right)$$

Randbedingungen für die Integration:

$$\phi(0, \mathbf{x}) = \phi_a \quad \text{und} \quad \phi(t, \mathbf{x}) = \phi_b$$

- Aufteilen des Zeitintervalls:  $t = N\Delta t$
- wiederholtes Einschleiben von **1**
- Grenzübergang:  $N \rightarrow \infty$
- (ggfs.) Integration über konjugierte Impulse

# Thermodynamik: Zustandssumme

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta H} = \int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-\beta H} | \phi_a \rangle$$

- Übergangsamplitude mit Zeitentwicklungsoperator in imaginärer Zeit  $\beta = it$
- Ausgangszustand wird wieder angenommen;  
Randbedingung:

$$\phi(0, \mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x}) = \phi_a$$

- Zusätzlich Spurbildung, d. h. Integration über alle  $\phi_a$

$$\Rightarrow \phi(0, \mathbf{x}) = \phi(-i\beta, \mathbf{x})$$

# Thermodynamik: Euklidisches Pfadintegral

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} e^{-\beta H} = \int \mathcal{D}\pi \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\int_{\beta} d^4x (i\pi\dot{\phi} - \mathcal{H})\right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp(-S(\beta)) \end{aligned}$$

Für periodische Felder  $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}, \beta)$

mit  $\int_{\beta} d^4x = \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x$  und  $S(\beta) = \int_{\beta} d^4x \mathcal{L}$

# Thermodynamik: Euklidisches Pfadintegral

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} e^{-\beta H} = \int \mathcal{D}\pi \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\int_{\beta} d^4x (i\pi\dot{\phi} - \mathcal{H})\right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp(-S(\beta)) \end{aligned}$$

Für periodische Felder  $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}, \beta)$

mit  $\int_{\beta} d^4x = \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x$  und  $S(\beta) = \int_{\beta} d^4x \mathcal{L}$

Erhaltungsgrößen:  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} - \mu \mathcal{N}$

Über die erhaltene Ladung  $N$  (z. B. Baryonenzahl, ...) wird ein chemisches Potential  $\mu$  eingeführt.

# Matsubara Frequenzen

- diskrete Frequenzen wegen periodischer Randbedingungen
- Antikommutatorrelationen für Fermionen: antiperiodische Randbedingungen

Bosonen:

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$$

Fermionen:

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$$

Damit Propagatoren nur für diskrete Frequenzen, z. B.:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$
$$\Rightarrow \Delta_F(\omega_n, \mathbf{k}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2}$$

# Funktioniert das wirklich?

Berechnung einer thermodynamischen Größe:  $\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Z$   
(freies reelles Skalarfeld)

# Funktioniert das wirklich?

Berechnung einer thermodynamischen Größe:  $\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Z$   
(freies reelles Skalarfeld)

$$\begin{aligned}\Omega &= -\frac{1}{\beta} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \Delta_F \\ &= \frac{1}{2\beta} V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \underbrace{\sum_n \ln(\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)}_{=: F}\end{aligned}$$

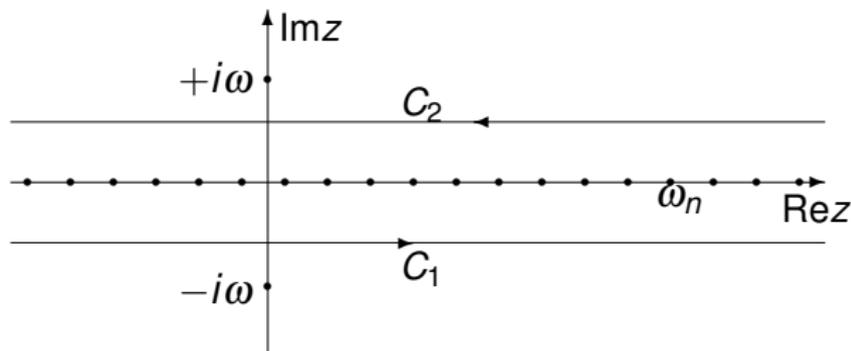
Zur Auswertung der Frequenzsumme  $F$  (mit  $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ ):

$$\frac{1}{2\omega} \frac{d}{d\omega} F = \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2} = \sum_n g(\omega_n)$$

# Konturintegration

- $g(z) = \frac{1}{z^2 + \omega^2}$  hat Pole bei  $z = \pm i\omega$  und fällt ab wie  $|z|^{-2}$
- $\frac{\beta}{2} \cot\left(\frac{\beta}{2}z\right)$  hat Pole mit Residuum 1 für  $z = 2\pi n/\beta = \omega_n$  und ist sonst beschränkt.

$$\Rightarrow \sum_n g(\omega_n) = \int_{C_1 \cup C_2} \frac{dz}{2\pi i} g(z) \frac{\beta}{2} \cot\left(\frac{\beta}{2}z\right) = -\sum_z \text{res}[g(z)] \frac{\beta}{2} \cot\left(\frac{\beta}{2}z\right)$$



# Auswertung der Frequenzsumme

Aus dem Konturintegral:

$$\frac{1}{2\omega} \frac{d}{d\omega} F = - \sum_z \text{res}[g(z)] \frac{\beta}{2} \cot\left(\frac{\beta}{2}z\right) = \frac{\beta}{2\omega} \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} + \frac{e^{-\beta\omega}}{1 - e^{-\beta\omega}} \right)$$

$$\Rightarrow F = \beta\omega + 2 \ln(1 - e^{-\beta\omega}) + \text{konst.}$$

- Nullpunktsenergie:  $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k$
- Konstante ist temperaturunabhängig. Bestimmt über Normierung  $\Omega(T=0) = 0$
- Übereinstimmung mit dem aus der statistischen Physik erwarteten Ergebnis:

$$\Omega = \frac{V}{2\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta\omega_k})$$

# Gitterformulierung

- Das endliche Zeitintervall  $\beta$  führt zu einer endlichen Zahl an Gitterplätzen  $N_t$ :

$$\beta = aN_t$$

- Typische Gitter haben eine Größe von  $N_t = 4; 8$  und  $N_s = 16; 32$ .
- Bestimmung der Temperatur in Simulationen mithilfe von  $(T = 0)$ -Größen (Massen, Strings Spannung, ...):

$$\frac{T}{m} = \frac{1}{amN_t}$$

# Berechnung thermodynamischer Größen

## Die Freie Energie

$$f = -\frac{T}{V} \ln Z$$

Für homogene Systeme gilt  $p = f$

$$Z = \int \mathcal{D}[U, \psi, \bar{\psi}] e^{-\beta S_G - S_F}$$

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[U, \psi, \bar{\psi}] S_G e^{-\beta S_G - S_F} = -\langle S_G \rangle$$

$$\frac{f}{T^4} = -\left(\frac{N_t}{N_s}\right)^3 \int_{\beta_0}^{\beta} d\beta (\langle S_G \rangle_{T=0} - \langle S_G \rangle_T)$$

(Auf dieser Folie steht  $\beta$  für die Kopplung!)

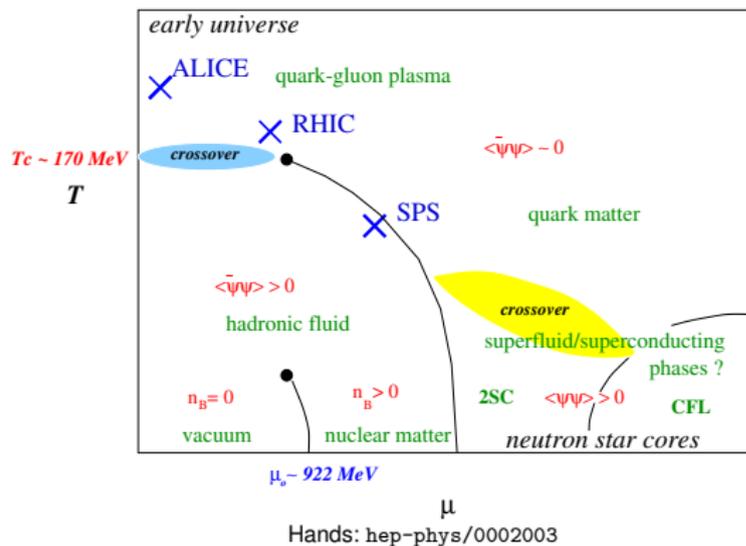
- Die Quantisierung thermischer Systeme erfolgt mithilfe Euklidischer Pfadintegrale.
- Die inverse Temperatur  $\beta$  gibt ein endliches Zeitintervall vor.
- Bosonische Felder genügen periodischen, fermionische Felder antiperiodischen Randbedingungen.
- Die endliche Ausdehnung in Zeitrichtung führt auf diskrete (Matsubara-)Frequenzen.

## II. Zustandsgleichung der QCD

### Übersicht:

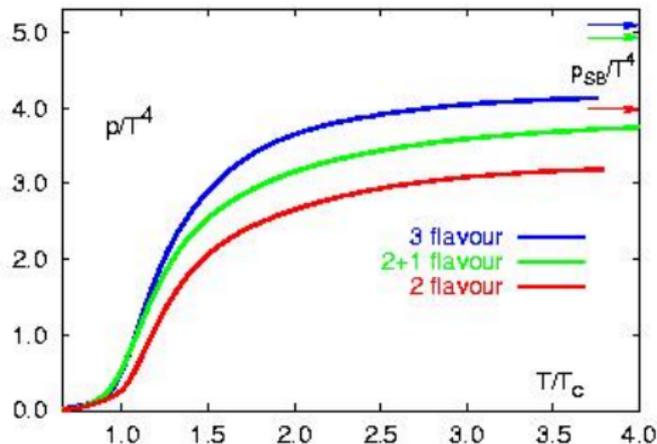
- Die Zustandsgleichung
- Stefan-Boltzmann-Limit
- Gittereffekte

## Das Phasendiagramm der QCD



Hier: Zustandsgleichung der QCD:  $p(T)$  für  $\mu = 0$

# Zustandsgleichung der QCD



Karsch, Laermann, Peikert: *Phys. Lett.* B478:447 (2000)

- Übergangstemperatur etwa bei 170 MeV (insb. von Strange-Quark-Masse abhängig).
- Abweichen vom idealen Gas-Grenzwert bis zu enorm hohen Temperaturen.

# Idealer Gas-Grenzwert: Bosonen

- Aus statistischer Mechanik:  $Z = \text{Tr} e^{-\beta H} = \left( \prod_{\rho} \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_{\rho}}} \right)^g$
- Betrachte Teilchen mit  $m = 0$ ,  $\mu = 0 \rightarrow \omega_{\rho} = \rho$

$$\begin{aligned} F &= -T \ln Z = gT \sum_{\rho} \ln(1 - e^{-\beta \rho}) \\ &= gT V \int \frac{d^3 \rho}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta \rho}) \\ &= \frac{gVT}{2\pi^2} T^4 \underbrace{\int_0^{\infty} dx x^2 \ln(1 - e^{-x})}_{-\pi^4/45} \end{aligned}$$

- Damit ergibt sich das Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = g \frac{\pi^2}{90} T^4$$

# Idealer Gas-Grenzwert: Fermionen

- Masseloser Fall:

$$\begin{aligned} F &= -VT \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(1 + e^{-\beta\omega_p}) \\ &= -\frac{7}{8} \frac{\pi^2}{90} T^4 V \end{aligned}$$

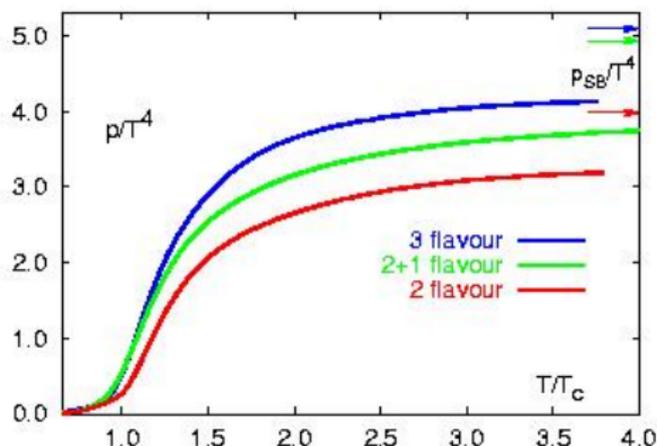
- Bei Berücksichtigung von Fermionen und Antifermionen, zwei Spinfreiheitsgraden und  $N_C = 3$  ergibt sich analog zum Stefan-Boltzmann-Limit für Bosonen:

$$\frac{p}{T^4} = \frac{21}{2} n_f \frac{\pi^2}{90}$$

- Massiver Fall: Integral nicht mehr analytisch auswertbar. Ersetze  $n_f \rightarrow \sum_f g(m_f/T)$ :

$$g(m/T) = \frac{360}{7\pi^4} \int_{m/T}^{\infty} dx x \sqrt{x^2 - (m/T)^2} \ln(1 + e^{-x})$$

# $p(T)$ -Diagramm und SB-Limit



Pionengas (Bosonen,  $g=3$ ):

$$\frac{\rho_{SB}}{T^4} = 3 \frac{\pi^2}{90}$$

Quark-Gluon-Plasma:

$$\frac{\rho_{SB}}{T^4} = \left( 16 + \frac{21}{2} n_f \right) \frac{\pi^2}{90}$$

$\Rightarrow$  Freiwerden von Freiheitsgraden im QGP

# Zustandsgleichung auf dem Gitter

Inwieweit ist die Abweichung vom SB-Limit physikalisch bzw. durch Gittereffekte bestimmt?

- Quantifizierung durch Bestimmung des SB-Limits für die verwendeten Wirkungen: Wechselwirkungsfreie Quarks und Gluonen auf dem Gitter.
- Quantifizierung erlaubt Vergleich verschiedener Wirkungen.

# Vergleich für ideale Gase

- Berechnung getrennt für Fermionen und Eichbosonen.
- Wirkung  $S$  ergibt (Gitter-)Propagator  $\Delta(k)$ .
- $\ln Z = \text{Tr} \ln \Delta^{-1}$  (Grassmann-Integration)  
(entsprechend für Bosonen:  $\ln Z = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \Delta$ )
- Wichtige Vergleichsgrößen:

$$p/T^4 = -\frac{1}{VT^3} \ln Z = -\frac{1}{VT^3} \text{Tr} \ln \Delta^{-1} - [(T=0)\text{-Anteil}]$$
$$\varepsilon = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{1}{V} \text{Tr} \left. \frac{\partial}{N_t \partial a_t} \ln \Delta^{-1} \right|_{a_t=a} - [(T=0)\text{-Anteil}]$$

- Tr: Spur über alle Freiheitsgrade; insb. Integration über  $\mathbf{p}$  und Summation über  $\rho_0$

# Spezielle Wirkungen

$N_t$	$\rho_F/\rho_{SB,F}$		$(\varepsilon_F - 3\rho_F)/T^4$		$\rho_F/\rho_{SB,F}$ Wilson
	p4	Naik	p4	Naik	
4	0.5932	0.8070	1.3393	1.5992	2.14
6	0.9378	0.7718	-0.0867	0.8079	1.77
8	0.9778	0.9303	0.0236	0.1156	1.42
10	0.9889	0.9809	0.0155	0.0202	1.2

Karsch, Laermann, Peikert hep-1at/0002003

- Damit Auswahl geeigneter Wirkung für dynamische Simulation. (hier Staggared Fermionen)
- Formulierung auf Basis von Wilson-Fermionen? (tmQCD)

# Zusammenfassung

- Die Thermische QFT wird mithilfe Euklidischer Pfadintegrale formuliert.
- Die inverse Temperatur bestimmt die Ausdehnung in Zeitrichtung.
- Das Stefan-Boltzmann-Limit gibt den Grenzwert für  $p/T^4$  für ein ideales Gas aus Quarks und Gluonen vor.
- Die berechnete Zustandsgleichung  $p(T)$  zeigt deutliche Abweichungen vom SB-Limit.
- Die Größe von Gittereffekten kann durch die Berechnung der entsprechenden SB-Limits bestimmt werden.