Supersymmetrie

Tobias Galla

10. November 1998

Inhaltsverzeichnis

1 Spinoren et al.

In diesem Kapitel sollen Begriffe wie Weyl- und Majorana-Spinoren sowie die gepunktete und ungepunktete Notation eingeführt werden. Dazu ist es zunächst nötig, einen Blick auf die Darstellung der Lorentzgruppe zu werfen.

1.1 Generatoren der speziellen Lorentzgruppe

Wir betrachten dazu die Untergruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ der speziellen Lorentztransformationen:

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \left\{ \Lambda \in O(1,3) \mid det\Lambda = 1, \Lambda_0^0 > 0 \right\}. \tag{1.1}$$

Diese Gruppe wird von den 6 Generatoren

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{K} = \begin{pmatrix} K^1 \\ K^2 \\ K^3 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

erzeugt. Dabei erzeugt $\vec{J}$ Drehungen und $\vec{K}$ Boosts. Diese Generatoren genügen den folgenden Kommutatorrelationen:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k \tag{1.3}$$
$$[J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk} K^k \tag{1.4}$$
$$[K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk} J^k \tag{1.5}$$

Wir betrachten jetzt einen anderen Satz von Generatoren, nämlich:

$$T_\pm^i := \frac{1}{2}(J^i \pm iK^i) \tag{1.6}$$

Diese Generatoren sind hermitesch, man beachte, daß im alten Satz von Generatoren nur $\vec{J}$ hermitesch, $\vec{K}$ aber antihermitesch war. Es ergeben sich die folgenden Kommutatoren:

$$[T_+^i, T_+^j] = i\epsilon^{ijk} T_+^k \tag{1.7}$$
$$[T_-^i, T_-^j] = i\epsilon^{ijk} T_-^k \tag{1.8}$$
$$[T_+^i, T_-^j] = 0. \tag{1.9}$$

Man erkennt, dass sowohl T_+^1, T_+^2, T_+^3 als auch T_-^1, T_-^2, T_-^3 jeweils für sich die Kommutatorrelation der Lie-Algebra der $SU(2)$ erfüllen. Da wir in (1.6) komplexe Linearkombinationen verwendet haben, gilt allerdings trotzdem nicht $\mathcal{L}_+^\uparrow \cong SU(2) \otimes SU(2)$, sondern es ist $\mathcal{L}_+^\uparrow \cong SL(2,C)$. Wenigstens sind beide Gruppen aber lokal isomorph, sodaß ihre Lie-Algebren übereinstimmen. Die endlich-dimensionalen Darstellungen von $SU(2)$ sind aber bekannt, die Darstellungsmatrizen sind die Drehimpulsmatrizen zu Spins $j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$. Die Darstellung mit Spin j ist $(2j+1)$-dimensional, d.h. die Darstellungsmatrizen sind $(2j+1)\times(2j+1)$-Matrizen. Aus diesen Darstellungen lassen sich nun die einfachsten irreduziblen Darstellungen der speziellen Lorentzgruppe wie folgt gewinnen:

1.2 Linke und rechte Fundamentaldarstellung, Weyl-Spinoren

Es existieren zwei Operatoren, die mit allen Generatoren (den T's) kommtutieren, man nennt sie Casimir-Operatoren. Diese sind gegeben durch $\vec{T}_+^2$ und $\vec{T}_-^2$. Die Zustände, auf denen die Darstellungsmatrizen operieren, können also als Eigenzustände zu $\vec{T}_+^2$ und $\vec{T}_-^2$ mit Eigenwerten j und j' gewählt werden. Es handelt sich dann um eine $(2j+1)(2j'+1)$-dimensionale Darstellung. Sie wird durch das Paar (j, j') gekennzeichnet.
Einige spezielle irreduzible Darstellungen der speziellen Lorentzgruppe sind dann:

- (0,0) : skalare Darstellung
- ($\frac{1}{2}$,0) : linke Fundamentaldarstellung
- (0,$\frac{1}{2}$) : rechte Fundamentaldarstellung

Die erstgenannte Darstellung ist trivial, hier ist die Darstellungsmatrix jedes Elements aus $\mathcal{L}_+^\uparrow$ gegeben durch die Einheitsmatrix (und diese ist im Fall $j = j' = 0$ auch noch eindimensional). Die beiden anderen Darstellungen sind hingegen deutlich interessanter.
Jedes Element aus $\mathcal{L}_+^\uparrow$ (genauer jede Darstellungsmatrix) läßt sich in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} \Lambda &= exp\left\{-i\left(\vec{\varphi}\cdot\vec{J} + \vec{v}\cdot\vec{K}\right)\right\} \\ &= exp\left\{-i\left(\vec{\varphi} - i\vec{v}\right)\cdot\vec{T}_+\right\} exp\left\{-i\left(\vec{\varphi} + i\vec{v}\right)\cdot\vec{T}_-\right\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Dabei wurde benutzt, daß $\vec{J} = \vec{T}_+ + \vec{T}_-$ und $\vec{K} = -i(\vec{T}_+ - \vec{T}_-)$ und $[\vec{T}_+, \vec{T}_-] = 0$. Die rechte und linke Fundamentaldarstellung sind beide 2-dimensional, wirken also auf 2-komponentige Spinoren. Solche Spinoren nennt man *Weyl-Spinoren.* Im Fall der linken Fundamentaldarstellung ist $\vec{T}_+ = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ und $\vec{T}_- = 0$, im Fall der rechten Fundamentaldarstellung verhält es sich genau umgekehrt.

Die Transformationen der Spinoren sind dann gegeben durch:

$$\begin{array}{lcll} \psi_L(x) & \longrightarrow & \psi'_L(x') = A_L\psi_L(x) & \text{linke Fundamentaldarstellung} \\ \psi_R(x) & \longrightarrow & \psi'_R(x') = A_R\psi_R(x) & \text{rechte Fundementaldarstellung} \end{array}$$

Dabei ist

$$A_L := \Lambda^{(0,\frac{1}{2})} = exp\left\{-\frac{i}{2}\left(\vec{\varphi} - i\vec{\nu}\right)\cdot\vec{\sigma}\right\} \tag{1.11}$$

$$A_R := \Lambda^{(\frac{1}{2},0)} = exp\left\{-\frac{i}{2}\left(\vec{\varphi} + i\vec{\nu}\right)\cdot\vec{\sigma}\right\} \tag{1.12}$$

Wegen $A_L^{-1} = A_R^{\dagger}$, d.h. $A_L = A_R^{-1\dagger}$ nennt man die Darstellungen auch zueinander konjugiert. Sie sind jedoch nicht äquivalent.
Man macht nun Weyl-Spinoren durch gepunktete bzw. ungepunktete Indices kenntlich, je nachdem, ob sie zur $(\frac{1}{2},0)$- oder $(0,\frac{1}{2})$-Darstellung gehören:

$$\begin{array}{lcll} \psi_L & = & \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} & \text{(linke Fundamentaldarstellung)} \\ \psi_R & = & \begin{pmatrix} \bar{\psi}^{\dot{1}} \\ \bar{\psi}^{\dot{2}} \end{pmatrix} & \text{rechte Fundamentaldarstellung} \end{array} \tag{1.13}$$

1.3 Adjungierte Weyl-Spinoren, Skalarprodukte

Wir untersuchen nun die Transformationen der adjungierten Weyl-Spinoren. Man betrachtet dazu die folgenden vier Darstellungen für eine Matrix $A \in SL(2,\mathbb{C})$:

- Selbstdarstellung : $D(A) = A$
- duale Selbstdarstellung: $D(A) = A^{-1T}$
- konjugierte Darstellung: $D(A) = A^{-1\dagger}$
- duale konjugierte Darstellung : $D(A) = A^*$

Setzt man $A = A_L$, so erkennt man wegen $A_R = A_L^{-1\dagger}$, daß es sich bei der Selbstdarstellung um die linke Fundamentaldarstellung und bei der konjugierten Darstellung um die rechte Fundamentaldarstellung handelt. Diese beiden sind nicht äquivalent. Hingegen sind die Selbstdarstellung und die duale Selbstdarstellung zueinander äquivalent, wie man an $A_L^{-1T} = \sigma^2 A_L(\sigma^2)^{-1}$ erkennt. Analoges gilt auch für die konjugierte bzw. duale konjugierte Darstellung. In der linken Fundamentaldarstellung wirken die Transformationen auf linkshändige Weyl- Spinoren ψ_L, wie wir gesehen haben. Die rechte Fundamentaldarstellung operiert auf rechtshändigen Weyl-Spinoren ψ_R. Wie sieht nun der Darstellungsraum für die verbleibenden zwei Darstellungen aus ? Dazu betrachte man:

$$\psi_R'^{\dagger} = (A_R\psi_R)^{\dagger} = \psi_R^{\dagger} A_L^{-1} \tag{1.14}$$

$$\psi_L'^{\dagger} = (A_L\psi_L)^{\dagger} = \psi_L^{\dagger} A_L^{\dagger} \tag{1.15}$$

In der dualen Selbstdarstellung wirken die Transformationen also via A_L^{-1} auf adjungierte rechtshändige Weyl-Spinoren, in der dualen konjugierten Darstellung via $A_L^{\dagger}$ auf adjungierte linkshändige Weyl-Spinoren. Allerdings muß man etwas aufpassen: In (1.14) bzw. (1.15) treten A_L^{-1} und $A_L^{\dagger}$ auf, was jeweils genau die transponierten Matrizen von $A_L^{-1\,T}$ bzw. A_L^* sind, durch die die duale Selbstdarstellung bzw. die duale konjugierte Darstellung gegeben sind. Dies liegt daran, daß die Matrizen in (1.14) und (1.15) nach links wirken.
Um später Skalarprodukte mithilfe von hoch- und tief-gestellten Indices schreiben zu können, schreiben wir die in (1.14) und (1.15) auftretenden adjungierten Spinoren wie folgt:

$$\begin{aligned} \psi_R^{\dagger} &= (\psi^1, \psi^2) \\ \psi_L^{\dagger} &= (\bar{\psi}_{\dot{1}}, \bar{\psi}_{\dot{2}}) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Zusammenfassend haben wir also

- linke Fundamentaldarstellung: $\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ und $\psi_R^{\dagger} = (\psi^1, \psi^2)$
- rechte Fundamentaldarstellung: $\psi_R = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^{\dot{1}} \\ \bar{\psi}^{\dot{2}} \end{pmatrix}$ und $\psi_L^{\dagger} = (\bar{\psi}_{\dot{1}}, \bar{\psi}_{\dot{2}})$

Sei nun ψ_L ein linkshändiger Weyl-Spinor. Mittels $\sigma^2\sigma^i\sigma^2 = -\sigma^{i*}$ (beachte σ^2 meint die 2. Pauli-Matrix und kein Quadrat) sieht man:

$$\begin{aligned} \sigma^2 A_L \sigma^2 &= \sigma^2 exp\left\{-\frac{i}{2}\left((\vec{\varphi} - i\vec{\nu})\,\vec{\sigma}\right)\right\}\sigma^2 \\ &= exp\left\{\frac{i}{2}\left((\vec{\varphi} - i\vec{\nu})\,\vec{\sigma}^*\right)\right\} \\ &= A_R^*. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Hieraus folgt:

$$-i\sigma^2\psi_L^* \longrightarrow -i\sigma^2 A_L^*\psi_L^* = -i\sigma^2 A_L^* \underbrace{\sigma^2\sigma^2}_{1} \psi_L^* = A_R\left(-i\sigma^2\psi_L^*\right), \tag{1.18}$$

d.h. mit ψ_L linkshändig ist $\sigma^2\psi_L^*$ rechtshändig. Für einen gegebenen linkshändigen Weyl-Spinor ψ_L schreiben wir daher

$$\psi_R = -i\sigma^2\psi_L^* \tag{1.19}$$

bzw.

$$\psi_L = i\sigma^2\psi_R^*. \tag{1.20}$$

Mit $\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, $\psi_R^\dagger = (\psi^1, \psi^2)$, $\psi_R = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^{\dot{1}} \\ \bar{\psi}^{\dot{2}} \end{pmatrix}$ und $\psi_L^\dagger = (\bar{\psi}_{\dot{1}}, \bar{\psi}_{\dot{2}})$ und der Definition für die komplexe Konjugation einzelner Spinorkomponenten:

$$\begin{aligned} (\psi_A)^* &:= \bar{\psi}_{\dot{A}} \\ (\psi^A)^* &:= \bar{\psi}^{\dot{A}} \end{aligned} \tag{1.21}$$

folgen aus

$$\begin{aligned} \psi_R &= -i\sigma^2\psi_L^* \\ \psi_L &= i\sigma^2\psi_R^* \end{aligned} \tag{1.22}$$

die folgenden Zusammenhänge für die Spinorkomponenten:

$$\psi^1 = -\psi_2, \psi^2 = \psi_1, \bar{\psi}^{\dot{1}} = -\bar{\psi}_{\dot{2}}, \bar{\psi}^{\dot{2}} = \bar{\psi}_{\dot{1}}. \tag{1.23}$$

Man vereinbart zusätzlich, daß Spinorkomponenten a-Zahlen sind, beim Vertauschen zweier Spinorkomponenten etwa in Skalarprodukten ist also ein Vorzeichenwechsel zu spendieren. Man definiert Skalarprodukte zwischen Weyl-Spinoren wie folgt:

$$\begin{aligned} (\phi\psi) &:= \phi^A\psi_A \\ (\bar{\phi}\bar{\psi}) &:= \bar{\phi}_{\dot{A}}\bar{\psi}^{\dot{A}}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Es wird dann

$$\begin{aligned} (\psi\psi) = \psi^A\psi_A = \psi^1\psi_1 + \psi^2\psi_2 &= \psi^1\psi^2 - \psi^2\psi^1 = 2\psi^1\psi^2 \\ (\bar{\psi}\bar{\psi}) = \bar{\psi}_{\dot{A}}\bar{\psi}^{\dot{A}} &= 2\bar{\psi}^{\dot{2}}\bar{\psi}^{\dot{1}} \end{aligned} \tag{1.25}$$

Man stellt fest, daß solche Skalarprodukte sich unter Lorentztransformationen wie Skalare verhalten, also invariant bleiben. Man kann einen Haufen anderer Bilinearformen konstruieren, die sich dann wie Vektoren, Tensoren, usw. transformieren, vergleiche dazu Soff p.334.

1.4 Dirac- und Majorana-Spinoren

Bispinoren haben in der chiralen Darstellung folgende Form:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \bar{\chi}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

mit ψ_A linkshändig und $\bar{\chi}^{\dot{A}}$ rechtshändig. Ein solcher Dirac-Spinor hat 8 reelle Parameter (4 komplexe Einträge). Die konjugiert-komplexe Form ist per Definition:

$$\bar{\Psi} := \Psi^\dagger \gamma_0 = \left(\bar{\psi}_{\dot{A}}, \chi^A\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\chi^A, \bar{\psi}_{\dot{A}}\right). \tag{1.27}$$

Das Lorentz-Skalar $\bar{\Psi}\Phi$ schreibt sich dann:

$$\bar{\Psi}\Phi = \chi\Phi + \bar{\psi}\bar{\lambda}, \tag{1.28}$$

wobei $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \bar{\lambda}^{\dot{A}} \end{pmatrix}$.

Für einen Dirac-Spinor $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}$ ist der konjugierte Spinor gegeben durch $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0 = \left(\phi_R^\dagger, \psi_L^\dagger\right)$. Es gilt dann also:

$$\bar{\Psi}^T = \begin{pmatrix} \phi_R^* \\ \psi_L^* \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

Die *Ladungskonjugation* ist gegeben durch die folgenden diskrete Transformation:

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \phi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} =: \psi^C. \tag{1.30}$$

Es gilt also $\psi^C = C\bar{\psi}^T$ mit $C = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}$ der Ladungskonjugationsmatrix. Man benutzt dabei $\psi_R = -i\sigma^2\psi_L^*$ und $\psi_L = i\sigma^2\psi_R^*$, vergleiche dazu (1.22).

Unter einem *Majorana-Spinor* versteht man einen Dirac-Spinor, der unter Ladungskonjugation in sich selbst übergeht ($\Psi = \Psi^C$), d.h. einen Spinor der Form $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$. Ein Majorana-Spinor verfügt im Gegensatz zu einem allgemeinen Dirac-Spinor nur noch über 4 reelle Parameter.

2 Poincaré-Superalgebra

Im Jahr 1967 zeigten COLEMAN und MANDULA, daß es nicht möglich ist, die Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$ mit einer inneren Symmetrie nicht trivial zu vereinigen. Die innere Symmetrie soll dabei durch eine Lie-Gruppe $\mathcal{I}$, die durch Generatoren T_a mit $[T_a, T_b] = f_{abc}T_c$ festgelegt wird, beschrieben werden. Entweder ist die entstehende Gruppe trivial im Sinne von $\mathcal{G} = \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ oder die resultierende Theorie hat eine triviale S-Matrix, d.h. verschwindende Streuamplituden. Dieses Resultat ist unter dem Namen no-go-Theorem von COLEMAN und MANDULA populär. 1971 konnten GOLFAND und LIKHTMAN zeigen, daß man dieses Theorem umgehen kann, indem man das Konzept der Lie-Gruppen erweitert: zu den Kommutatorrelationen zwischen den Generatoren kommen dann auch Antikommutatorbeziehungen hinzu. Man bekommt dann in gewissem Sinne gerade (bosonische) und ungerade (fermionische) Generatoren, was schließlich auf das Konzept der graduierten Lie-Algebren führt. 1975 stellten HAAG, LOPUSZANSKI und SOHNIUS fest, daß die sogenannte $Z/2Z$-Graduierung die einzige mit der relativistischen Quantenfeldtheorie vereinbare Ereiterung darstellt. Diese führt dann schließlich zur Super-Poincaré-Algebra.

2.1 Graduierung der Poincaré-Algebra

Definition

Unter einer $Z/2Z$-graduierten Algebra verstehen wir einen Vektorraum L, welcher direkte Summe zweier Untervektorräume ist:

$$L = L_0 \oplus L_1 \tag{2.31}$$

und auf dem ein bilineares Produkt $\circ$ definiert ist mit folgender Eigenschaft:

$$L_0 \circ L_0 \subset L_0 \tag{2.32}$$
$$L_0 \circ L_1 \subset L_1 \tag{2.33}$$
$$L_1 \circ L_0 \subset L_1 \tag{2.34}$$
$$L_1 \circ L_1 \subset L_0 \tag{2.35}$$

Allgemein kann man auch Vektorräume der Form $L = L_0 \oplus L_1 \cdots \oplus L_{n-1}$ mit Graduierung $L_i \oplus L_j \in L_k$ betrachten, wobei $k \equiv j + k \; mod \; n$. Aus einer graduierten *Algebra* erhält man eine graduierte *Lie-Algebra*, indem man folgende zusätzliche Forderungen an das Produkt stellt:

$$Supersymmetrie: \quad x_i \circ x_j = (-1)(-1)^{i \cdot j} x_j \circ x_i \tag{2.36}$$

$$Jacobi-Identität: \quad x_k \circ (x_l \circ x_m)(-1)^{k \cdot m} + x_l \circ (x_m \circ x_k)(-1)^{l \cdot k} + x_m \circ (x_k \circ x_l)(-1)^{m \cdot l} = 0 \tag{2.37}$$

Man beachte, daß L_0 für sich eine Lie-Algebra bildet (dort ist das Produkt $\circ$ antisymmetrisch und entspricht daher dem üblichen Kommutator $[\cdot, \cdot]$),

L_1 hingegen ist mit $\circ$ nicht einmal eine Algebra, denn das $\circ$-Produkt zweier Elemente aus L_1 liegt ja in L_0.
Wir wollen nun die Poincaré-Gruppe $Z/2Z$-graduieren. L_0 wird hier also aufgespannt von den 10 Generatoren P^μ und $M^{\mu\nu}$ (Zur Def der $M^{\mu\nu}$ vgl. Soff p259). Wir erweitern die Algebra um $4N$ SUSY-Generatoren Q_a, $a = 1, ..., 4N$. Man spricht dann von $N = 1$-, $N = 2$-, ... Supersymmetrie. Im folgenden wollen wir immer N=1 voraussetzen. Man konstruiert nun die graduierte Algebra wie folgt:

- $L_0 \times L_0 \longrightarrow L_0$: Poincaré-Algebra
- $L_0 \times L_1 \longrightarrow L_1$:

$$[P^\mu, Q_a] = 0 \tag{2.39}$$
$$[M^{\mu\nu}, Q_a] = -\Sigma^{\mu\nu}_{ab} Q_b \tag{2.40}$$

- $L_1 \times L_1 \longrightarrow L_0$:

$$\{Q_a, Q_b\} = -2\,(\gamma^\mu C)_{ab}\, P^\mu \tag{2.41}$$

Dabei ist

$$\Sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

und

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{4}\left(\sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu - \sigma\nu\tilde{\sigma}^\mu\right) \tag{2.43}$$
$$\tilde{\sigma}^{\mu\nu} := \frac{i}{4}\left(\tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \tilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu\right). \tag{2.44}$$

Man muß jetzt noch sagen, was unter σ^μ und $\tilde{\sigma}^\mu$ zu verstehen ist:

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}) \qquad \text{und} \qquad \tilde{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma}) \tag{2.45}$$

Mit etwas Magie identifizieren wir Q_a als Majorana-Spinor, d.h. für

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{Q} = Q^\dagger \gamma_0 \tag{2.46}$$

soll gelten:

$$Q = C\bar{Q}^T \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{Q} = Q^T C \tag{2.47}$$

Dabei sind Q und $\bar{Q}$ jeweils 4-komponentige Spinoren. Man macht auch von $C^{-1T} = (-C)^T = C$ Gebrauch.
Statt über den Antikommutator $\{Q_a, Q_b\} = -2\left(\gamma^\mu C\right)_{ab} P^\mu$ kann man das Produkt der graduierten Algebra auf $L_1 \times L_1$ auch über folgende Relation definieren:

$$\left\{Q_a, \bar{Q}_b\right\} = 2\gamma^\mu_{ab} P_\mu. \tag{2.48}$$

Zusammenfassend wird die SUSY-Algebra also durch die 14 Generatoren

$$P^\mu, \qquad M^{\mu\nu} \qquad \text{und} \qquad Q_a$$

aufgespannt. Sie genügen folgenden Relationen:

$$\boxed{\begin{gathered} \text{Poincaré-Algebra} \\ [P^\mu, Q_a] = 0 \\ [M^{\mu\nu}, Q_a] = -\Sigma^{\mu\nu}_{ab} Q_b \\ \left\{Q_a, \bar{Q}_b\right\} = 2\gamma^\mu_{ab} P_\mu \end{gathered}} \tag{2.49}$$

2.2 SUSY-Generatoren als Weyl-Spinoren

Oft werden die SUSY-Generatoren nicht als vierkomponentiger Majorana-Spinor, sondern als Paar von Weyl-Spinoren ($N = 1$) angegeben:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_A \\ \bar{Q}^{\dot{A}} \end{pmatrix}. \tag{2.50}$$

Aus $\left\{Q_a, \bar{Q}_b\right\} = 2\gamma^\mu_{ab} P_\mu$ folgt dann

$$\begin{aligned} \left\{Q_A, Q^B\right\} &= \left\{\bar{Q}^{\dot{A}}, \bar{Q}_{\dot{B}}\right\} = 0 && (2.51) \\ \left\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\right\} &= 2\sigma^\mu_{A\dot{B}} P_\mu && (2.52) \\ \left\{\bar{Q}_{\dot{A}}, Q^B\right\} &= 2\tilde{\sigma}^{\mu\dot{A}B} P_\mu && (2.53) \end{aligned}$$

Man beachte dabei, daß die Argumente in den Antikommutatoren als volle Weyl-Spinoren zu interpretieren sind und nicht als einzelne Komponenten. Man schreibt die SUSY-Algebra oft auch abkürzend wie folgt:

$$
\boxed{\begin{array}{c}
\text{Poincaré-Algebra} \\[1ex]
[Q, P^\mu] = [\bar{Q}, P^\mu] = 0 \\[1ex]
[Q, M^{\mu\nu}] = \sigma^{\mu\nu} Q \\[1ex]
[\bar{Q}, M^{\mu\nu}] = \tilde{\sigma}^{\mu\nu} \bar{Q} \\[1ex]
\{Q, \bar{Q}\} = 2\sigma_\mu P^\mu \\[1ex]
\{\bar{Q}, Q\} = 2\tilde{\sigma}_\mu P^\mu \\[1ex]
\{Q, Q\} = \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0
\end{array}} \tag{2.55}
$$

Auch hier sind alle Einträge als Weyl-Spinoren zu sehen, die Indices wurden hier weggelassen. Die letzten drei Zeilen von (2.55) sind also nur als Abkürzung für (2.51), (2.52) und (2.53) zu sehen. Dann treten auch keine Probleme mit der Symmetrie des Antikommutators auf, wie man anhand von (2.55) leicht denken könnte.

2.3 Die Bosonen-Fermionen-Regel

In diesem Abschnitt werden wir sehen, daß die Anzahl der fermionischen und bosonischen Freiheitsgrade in supersymmetrischen Theorien übereinstimmt. Man definiert dazu zunächst den *Witten-Index* wie folgt:

$$
\Delta := Tr(-1)^{N_F}. \tag{2.56}
$$

Dabei ist N_F der Teilchenzahloperator für Fermionen, sodaß der Operator $(-1)^{N_F}$ den Eigenwert $+1$ besitzt, wenn er auf bosonische Zustände (gerade Zahl von Fermionen) wirkt und den Eigenwert -1 bei fermionischen Zuständen. Es ist dann klar, daß

$$
\Delta = n_b - n_f \tag{2.57}
$$

die Differenz zwischen den Anzahlen der bosonischen und fermionischen Zuständen angibt (Wenn man pingelig ist, sollte man nur die Zustände zum Energieeigenwert 0 betrachten.). Die Behauptung, die wir also zeigen müssen, ist, daß in supersymmetrischen Theorien stets $\Delta = 0$ ist, dann stimmen die Anzahl der fermionischen und bosonischen Freiheitsgrade überein. Nun wandeln die SUSY-Generatoren Q und $\bar{Q}$ Fermionen in Bosonen um und umgekehrt, also gelten die Operatorgleichungen:

$$
\begin{aligned}
(-1)^{N_F} Q &= -Q(-1)^{N_F} \\
(-1)^{N_F} \bar{Q} &= -\bar{Q}(-1)^{N_F}.
\end{aligned} \tag{2.58}
$$

Es folgt dann $Tr\left[(-1)^{N_F} Q\bar{Q}\right] = -Tr\left[Q(-1)^{N_F}\bar{Q}\right] = -Tr\left[(-1)^{N_F}\bar{Q}Q\right]$, also

$$Tr\left[(-1)^{N_F}\{Q,\bar{Q}\}\right] = 0. \tag{2.60}$$

Wegen $\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 2\sigma^{\mu}_{A\dot{B}} P_\mu$ folgt dann $Tr\left[(-1)^{N_F} P_\mu\right] = 0$. Fixiert man also einen von Null verschiedenen Viererimpuls (der Grundzustand mit $E = 0$ ist also ausgeschlossen), so folgt $\Delta = Tr\left[(-1)^{N_F}\right] = 0$, qed.

3 Superraum und Superfelder

Nachdem wir nun die Algebra der Generatoren der SUSY-Transformationen kennengelernt haben,wollen wir jetzt die Gruppe der Transformationen konkret angeben und untersuchen auf welche Objekte ihre Darstellungen wirken. Dies führt direkt auf die Begriffe *Superraum* und *Superfelder*. Genauso wie uns bekannte Felder im Minkowski-Raum definiert sind und die Lorentz-Transformationen auf die Minkowski-Koordinaten dieser Felder wirken, wirken die SUSY-Generatoren Q und $\bar{Q}$ durch Verschiebungen im Superraum. Diesen erhält man aus der gewöhnlichen 4-dimensionalen Raumzeit durch die Einführung neuer (fermionischer) Dimensionen. Der Darstellungsraum der SUSY-Transformationen wird entsprechend aus Feldern gebildet, deren Definitionsbereich eben dieser Superraum ist.

3.1 Verschiebungen im Superraum

Genau wie die Generatoren P^μ Verschiebungen um einen konstanten Vierervektor a^μ im Minkowski-Raum erzeugen, liefern die SUSY-Generatoren Q und $\bar{Q}$ Verschiebungen im Superraum, allerdings um konstante Weylspinorielle Parameter ϵ und $\bar{\epsilon}$:

$$\begin{aligned} \text{Translation:} \quad & exp\{-ia^\mu P_\mu\} \\ \text{SUSY-Translation:} \quad & exp\left\{i(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})\right\}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Ein allgemeines Element L der Super-Poincaré-Gruppe ist also gegeben durch:

$$L(a,\omega,\epsilon,\bar{\epsilon}) = exp\left\{i\left(-a^\mu P_\mu + \epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q} - \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right)\right\} \tag{3.62}$$

Im weiteren wollen wir jedoch die Lorentzdrehungen von der Betrachtung ausschließen, also nur Transformationen der Form

$$L(a,\omega,\epsilon,\bar{\epsilon}) = exp\left\{i\left(-a^\mu P_\mu + \epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}\right)\right\} \tag{3.63}$$

untersuchen. Man stellt fest, daß diese eine Gruppe bilden, denn es gilt folgende Verknüpfung:

$$L(a,\epsilon,\bar{\epsilon})L(b,\eta,\bar{\eta}) = L(a+b-i\epsilon\sigma\bar{\eta}+i\eta\sigma\bar{\epsilon},\epsilon+\eta,\bar{\epsilon}+\bar{\eta}). \tag{3.64}$$

Mit σ ist dabei der Vierervektore der vier Pauli-Matrizen gemeint. Am Rande sei erwähnt, daß die Gruppe dieser Transformationen nicht kommutativ ist.

3.2 Darstellung im Raum der Superfunktionen

Die Veknüpfung (3.64) induziert eine Transformation im Parameterraum, der mit dem Superraum identisch ist (Minkowski-Raum mit zusätzlichen Koordinaten ϵ und $\bar{\epsilon}$):

$$\left(x^\mu, \theta, \bar{\theta}\right) \longrightarrow \left(x^\mu + \xi^\mu, \theta + \epsilon, \bar{\theta} + \bar{\epsilon}\right), \tag{3.65}$$

wobei $\xi^\mu = a^\mu - i\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon}$. Man ist nun interessiert an einer unitären Darstellung, welche $L(a, \epsilon, \bar{\epsilon})$ im Raum der Superfunktionen $\Phi(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$ realisiert:

$$\Phi\left(x^\mu, \theta, \bar{\theta}\right) \longrightarrow \Phi\left(x^\mu + \xi^\mu, \theta + \epsilon, \bar{\theta} + \bar{\epsilon}\right) =: U\Phi\left(x^\mu, \theta, \bar{\theta}\right). \tag{3.66}$$

Mit dem Ansatz

$$U = exp\left\{i\left(a^\mu \hat{P}_\mu + \epsilon\hat{Q} + \bar{\epsilon}\hat{\bar{Q}}\right)\right\} \tag{3.67}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{P}_\mu &= -i\partial_\mu & (3.68)\\ i\hat{Q} &= \frac{\partial}{\partial\theta} - i\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu & (3.69)\\ i\hat{\bar{Q}} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i\tilde{\sigma}^\mu\theta\partial_\mu . & (3.70) \end{aligned}$$

Für die Komponenten der SUSY-Generatoren bekommt man (die Dächer lassen wir ab jetzt fort):

$$\begin{aligned} Q_A &= i\left[-\partial_A + i\left(\sigma^\mu\bar{\theta}\right)_A \partial_\mu\right] & (3.72)\\ \bar{Q}^{\dot{A}} &= i\left[-\bar{\partial}^{\dot{A}} + i\left(\tilde{\sigma}^\mu\theta\right)^{\dot{A}} \partial_\mu\right] & (3.73)\\ Q^A &= i\left[\partial^A + i\left(\sigma^\mu\bar{\theta}\right)^A \partial_\mu\right] & (3.74)\\ \bar{Q}_{\dot{A}} &= i\left[\bar{\partial}_{\dot{A}} - i\left(\theta\sigma^\mu\right)_{\dot{A}} \partial_\mu\right]. & (3.75) \end{aligned}$$

Man kann direkt nachrechnen, daß sie die SUSY-Algebra erfüllen.

3.3 Superfelder

Unter einem Superfeld verstehen wir ein Feld, dessen Definitionsbereich der Superraum ist, also ein Feld $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta})$. Man kann ein solches Superfeld wie folgt in eine Potenzreihe in θ und $\bar{\theta}$ entwickeln:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + (\theta\theta)M(x) \\ &+ (\bar{\theta}\bar{\theta})N(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) \\ &+ (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\alpha(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x). \end{aligned} \tag{3.76}$$

Man fordert nun, daß $\mathcal{F}$ ein Lorentzskalar ist, woraus man das Verhalten der *Komponentenfelder* $f, \phi, \bar{\chi}, M, N, A_\mu, \bar{\lambda}, \alpha$ und d unter Lorentztransformationen herleiten kann. Man findet:

- 4 komplexe skalare Felder: $f(x), M(x), N(x), d(x)$
- 2 linkshändige Weyl-Spinorfelder: $\phi(x), \alpha(x)$
- 2 rechtshändige Weyl-Spinorfelder: $\bar{\chi}(x), \bar{\lambda}(x)$
- 1 komplexes Vektorfeld: $A_\mu(x)$

und erkennt, daß die "Bosonen=Fermionen"-Regel erfüllt ist, denn wir haben 16 relle bosonische und 16 reelle fermionische Freiheitsgrade.
Als nächstes muß man nun ermitteln, wie sich die Komponentenfelder eines Superfeldes bei SUSY-Transformationen verhalten. Dazu geht man wie folgt vor:
Bei einer infinitesimal kleinen Transformation ändert sich $\mathcal{F}$ um

$$\delta_\epsilon \mathcal{F} = \left(\epsilon^A \partial_A + \bar{\epsilon}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} - i\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu\right)\mathcal{F}, \tag{3.77}$$

andererseits gilt natürlich auch

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon \mathcal{F} &= (\delta f) + \theta(\delta\phi) + \bar{\theta}(\delta\bar{\chi}) + (\theta\theta)(\delta M) + (\bar{\theta}\bar{\theta})(\delta N) \\ &+ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\delta A_\mu) + (\theta\theta)\bar{\theta}(\delta\bar{\lambda}) + (\bar{\theta}\bar{\theta}\theta(\delta\alpha) \\ &+ (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})(\delta d).\end{aligned} \tag{3.78}$$

Aus einem Koeffizientenvergleich lassen sich somit die Transformationsverhalten der Komponentenfelder ermitteln. Zuvor muß man aber beispielsweise noch Terme der Form $(\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})$ in $(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\epsilon})$ umwandeln. Dies lassen wir hier aus und verweisen auf das Stichwort Fierz-Umordnung. Man findet schließlich die folgenden SUSY-Transformationen für die Komponentenfelder:

$$\delta f = \epsilon\phi + \bar{\epsilon}\bar{\chi} \tag{3.79}$$

$$\delta\phi = 2\epsilon M + \sigma^\mu\bar{\epsilon}(i\partial_\mu f + A_\mu) \tag{3.80}$$

$$\delta\bar{\chi} = 2\bar{\epsilon}N + \tilde{\sigma}^\mu\epsilon(i\partial_\mu f - A_\mu) \tag{3.81}$$

$$\delta M = \bar{\epsilon}\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\partial_\mu(\phi\sigma^\mu\bar{\epsilon}) \tag{3.82}$$

$$\delta N = \epsilon\alpha + \frac{i}{2}\partial_\mu(\epsilon\sigma^\mu\bar{\chi}) \tag{3.83}$$

$$\delta A_\mu = \frac{i}{2}\partial^\nu(\epsilon\sigma_\nu\tilde{\sigma}_\mu\phi - \bar{\chi}\tilde{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\epsilon}) + \epsilon\sigma_\mu\bar{\lambda} + \alpha\sigma_\mu\bar{\epsilon} \tag{3.84}$$

$$\delta\bar{\lambda} = \bar{\epsilon}(2d + \frac{i}{2}\partial^\mu A_\mu) + i\tilde{\sigma}^\mu\epsilon\partial_\mu M \tag{3.85}$$

$$\delta\alpha = \epsilon(2d - \frac{i}{2}\partial^\mu A_\mu) + i\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu N \tag{3.86}$$

$$\delta d = \frac{i}{2}\partial_\mu(\epsilon\sigma^\mu\bar{\lambda} - \alpha\sigma_\mu\bar{\epsilon}) \tag{3.87}$$

Offenbar ergeben Linearkombinationen von Superfeldern wieder Superfelder, sodaß wir von einer lineare Darstellung der SUSY-Algebra sprechen. Allerdings ist diese im allgemeinen reduzibel. Zu den irreduziblen Darstellungen gelangt man, indem man nicht allgemeine Superfelder betrachet, sondern nur solche, die gewissen Zusatzbedingungen genügen. Man definiert dazu zunächst kovariante Ableitungen wie folgt:

$$D_A := \partial_A + i(\sigma^\mu \bar{\theta})_A \partial_\mu \tag{3.88}$$
$$\bar{D}_{\dot{A}} := -\bar{\partial}_{\dot{A}} + i(\tilde{\sigma}^\mu \theta)_{\dot{A}} \partial_\mu \tag{3.89}$$

und unterscheidet dann

- *chirale* Superfelder $\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) : \bar{D}_{\dot{A}} \Phi = 0$
- *antichirale* Superfelder $\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) : D_A \Phi^\dagger = 0$
- *Vektor*-Superfelder $V(x, \theta, \bar{\theta}) : V = V^\dagger$.

Später werden wir sehen, daß chirale und antichirale Superfelder Materieteilchen beschreiben, das Vektor-Superfeld jedoch Eichfelder. Chirale und antichirale Superfelder faßt man unter dem Begriff *skalare Superfelder* zusammen.

3.4 Skalare Superfelder

Ein chirales Superfeld wird durch die Lorentz-SUSY-kovariante Bedingung $\bar{D}_{\dot{A}} \phi = 0$ definiert. Es zeigt sich, daß das allgemeinste Superfeld, das dieser Bedingung genügt, von der Form

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi(y, \theta) \qquad \text{wobei} \qquad y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \tag{3.90}$$

ist. Die Taylorentwicklung ergibt sich dann zu:

$$\Phi(y, \theta) = \varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y). \tag{3.91}$$

Man hat also

- 1 komplexes skalares Feld φ
- 1 linkshändiges Weyl-Spinorfeld ψ
- 1 komplexes skalares Hilfsfeld F

Man benutzt ψ zur Beschreibung von Fermionen (Leptonen oder Quarks), φ stellt die zugehörigen bosonischen Superpartner (Sleptonen oder Squarks) dar.

Das allgemeinste antichirale Superfeld sieht wie folgt aus:

$$\Phi^\dagger(\bar{y},\bar{\theta}) = \varphi^*(\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(\bar{y}) + (\bar{\theta}\bar{\theta})F^*(\bar{y}). \tag{3.92}$$

Die Wirkung der SUSY-Transformationen auf die Komponentenfelder eine solchen chiralen Superfeldes schreibt sich dann als:

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= \sqrt{2}\epsilon\psi && (3.93)\\
\delta\psi &= i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu\varphi + \sqrt{2}\epsilon F && (3.94)\\
\delta F &= i\sqrt{2}\bar{\epsilon}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi. && (3.95)
\end{aligned}$$

Allgemein ist die Produktbildung von Superfeldern möglich. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Phi_i \ \text{chiral} &\Rightarrow \Phi_i\Phi_j \ \text{chiral} && (3.96)\\
\Phi_i^\dagger \ \text{antichiral} &\Rightarrow \Phi_i^\dagger\Phi_j^\dagger \ \text{antichiral} && (3.97)\\
\Phi \ \text{chiral} &\Leftrightarrow \Phi^\dagger \ \text{antichiral} && (3.98)\\
\Phi \ \text{chiral} &\Rightarrow \Phi^\dagger\Phi \ \text{Vektor- Superfeld} && (3.99)\\
\Phi \ \text{chiral} &\Rightarrow \Phi + \Phi^\dagger \ \text{Vektor-Superfeld} && (3.100)\\
\Phi \ \text{chiral} &\Rightarrow i(\Phi - \Phi^\dagger) \ \text{Vektor- Superfeld} && (3.101)
\end{aligned}$$

3.5 Vektor-Superfelder

Für ein Vektor-Superfeld gilt nach Definition $V^\dagger = V$, geht man also von der Entwicklung

$$\begin{aligned}
V(x,\theta,\bar{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + (\theta\theta)M(x)\\
&+ (\bar{\theta}\bar{\theta})N(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x)\\
&+ (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\alpha(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x). && (3.102)
\end{aligned}$$

aus, so erhält man als Bedingungen an die Komponentenfelder

$$f = f^*, \quad A_\mu = A_\mu^*, \quad d = d^*, \quad M = N^*, \quad \phi = \chi \text{ und } \lambda = \alpha. \tag{3.103}$$

Ein Vektor-Superfeld verfügt also über je 8 reelle bosonische (f, d, M, A_μ) und fermionische (ϕ, λ) Freiheitsgrade.
Man erklärt jetzt eine Eichtransformation (Φ chiral):

$$V \longrightarrow V' = V + (\Phi + \Phi^\dagger), \tag{3.104}$$

bei der sich die Komponentenfelder von $V = (f, \phi, M, A_\mu, \lambda, d)$ wie folgt ändern:

$$\begin{aligned}
f' &= f + \varphi + \varphi^* && (3.105)\\
\phi' &= \phi - i\sqrt{2}\psi && (3.106)\\
M' &= M - 2iF && (3.107)\\
A'_\mu &= A_\mu + i\partial_\mu(\varphi - \varphi^*) && (3.108)\\
\lambda' &= \lambda && (3.109)\\
d' &= d && (3.110)
\end{aligned}$$

Man erkennt zwei wichtige Dinge:

- die Felder λ und d sind eichinvariant
- $A_\mu \longrightarrow A_\mu - 2\partial_\mu\Lambda$ für $\Lambda = \mathrm{Im}\ \varphi$,

die Transformation von A_μ gleicht also der eines elektromagnetischen Feldes. Wir wollen nun noch auf eine spezielle Eichung eingehen, die sogenannte *Wess-Zumino-Eichung*. Man wählt dabei $\Phi = (\varphi, \psi, F)$ so, daß V' die Komponenten f, ϕ und M nicht mehr enthält. Dies ist gewährleistet, falls man folgende Bedingungen respektiert:

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Re}\ \varphi = \varphi + \varphi^* &= -f && (3.111)\\
\psi &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\Phi && (3.112)\\
F &= -\frac{i}{2}M && (3.113)
\end{aligned}$$

In V' treten dann nur noch die Komponentenfelder A_μ, λ und d auf, die Entwicklung von V' in WZ-Eichung lautet

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar\theta) = (\theta\sigma^\mu\bar\theta)A_\mu + i(\theta\theta)(\bar\theta\bar\lambda) - i(\bar\theta\bar\theta)(\theta\lambda) + (\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)d, \qquad (3.114)$$

und V_{WZ} hat noch 4+4 Freiheitsgrade gegenüber 8+8 vor der Eichung.
Da die Wess-Zumino-Eichung Im φ nicht einschränkt, ist eine zusätzliche Eichfreiheit vorhanden, die es erlaubt $A_0 = 0$ zu erzwingen. Man kann nachrechnen, daß für ein Vektor-Superfeld in WZ-Eichung ab Exponent 3 alle Potenzen verschwinden: $V_{WZ}^3 = 0$.

4 Supersymmetrische Lagrange-Dichten

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, Lagrangedichten $\mathcal{L}$ zu finden, sodaß die zugehörige Wirkung $S := \int d^4x\mathcal{L}$ unter SUSY-Transformationen invariant bleibt. Wir benutzen dazu, daß sich bei allgemeinen Superfeldern $\mathcal{F}$ die d-Komponente und bei skalaren Superfeldern die F-Komponente bei SUSY-Transformationen nur um totale Divergenzen ändern:

$$\delta d = \tfrac{i}{2}\partial_\mu(\epsilon\sigma^\mu\bar{\lambda} - \alpha\sigma^\mu\bar{\epsilon}) \qquad \text{(allgemeines Superfeld)} \tag{4.115}$$

$$\delta F = i\sqrt{2}\partial_\mu(\bar{\epsilon}\tilde{\sigma}^\mu\psi) \qquad \text{(skalares Superfeld)} \tag{4.116}$$

Diese Terme ändern also das Wirkungsintegral bei SUSY-Transformationen nicht, denn mit dem Gaußschen Satz gehen sie in Oberflächenterme über, die dann verschwinden. Man bezeichnet das $(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})$-Komponentenfeld eines allgemeinen Superfeldes auch als D-Term, die $(\theta\theta)$-Komponente eines skalaren Superfeldes auch als F-Term und schreibt auch:

$$\mathcal{F}\,|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \;:=\; d(x) \tag{4.117}$$

$$\phi\,|_{\theta\theta} \;:=\; F(x) \tag{4.118}$$

oder indiziert mit D bzw. F. Man beachte, daß in der Entwicklung (3.93) das Argument von F durch y gegeben ist, hier aber durch x. (vgl dazu Soff p. 378).
Eine Möglichkeit, supersymmetrische Lagrangedichten zu konstruieren, ist also:

$$\mathcal{L} = (\text{Superfelder})\,|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + (\text{chirale Superfelder})\,|_{\theta\theta} \tag{4.119}$$

4.1 Das Wess-Zumino-Modell

Das Wess-Zumino-Modell wird durch die folgende Lagrange-Dichte erklärt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;:=\; & \Phi^\dagger(x,\theta,\bar{\theta})\Phi(x,\theta,\bar{\theta})\,|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ - \; & \frac{m}{2}\Phi^2(y,\theta)\,|_{\theta\theta} + HC \\ - \; & \frac{g}{3}\Phi^3(y,\theta)\,|_{\theta\theta} + HC,\end{aligned} \tag{4.120}$$

HC steht dabei für den hermitesch konjugierten Ausdruck, was sichert, daß die Lagrange-Dichte reell ist, $\Phi = (\varphi, \psi, F)$ ist ein chirales Superfeld. Die Lagrangedichte läßt sich auch in Termen der Komponentenfelder schreiben (wobei totale Divergenzen ignoriert werden), das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) \\ + \; & \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) + g(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi}) \\ + \; & F^*F - (m\varphi + g\varphi^2)F - (m\varphi^* + g\varphi^{*2})F^*.\end{aligned} \tag{4.121}$$

Diese Lagrange-Dichte bezeichnet man als *off-shell*-Lagrange-Dichte des Wess-Zumino-Modells. Zur *on-shell*-Dichte gelangt man, indem man die Bewegungsgleichung für das Hilfsfeld F ermittelt und diese in die off-shell-Dichte einsetzt. Die gesuchte Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu F^*)} = 0$$

ergibt sich zu:

$$F = m\varphi^* + g\varphi^{*2}. \tag{4.122}$$

Die Bewegungsgleichung für F ist also rein algebraisch (d.h. enthält keine Ableitungen von F), man interpretiert dies so, daß F nicht an der Dynamik teilnimmt, was die Bezeichnung Hilfsfeld rechtfertigt. Mit Hilfe von $F = m\varphi^* + g\varphi^{*2}$ und seinem komplex-konjugierten $F^* = m\varphi + g\varphi^2$ ergibt sich schließlich die on-shell-Lagrange-Dichte zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - m^2\,|\varphi|^2 \\ &- \frac{i}{2}(\bar\psi\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi) + \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar\psi\bar\psi) \\ &+ g(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar\psi\bar\psi) - mg\,|\varphi|^2\,(\varphi + \varphi^*) - g^2\,|\varphi|^4\,, \end{aligned} \tag{4.123}$$

deren erste Zeile für die freie Bewegung eines Bosons der Masse m steht. Die zweite Zeile stellt ein freies Fermion der gleichen Masse dar, und die dritte Zeile kennzeichnet die Wechselwirkung. Es sei daran erinnert, daß $\psi(x)$ ein Lepton oder Quark beschreibt und $\varphi(x)$ den zugehörigen Superpartner (Slepton oder Squark), insbesondere haben Teilchen und Superpartner die gleiche Masse. Man beachte auch, daß in (4.125) das Hilfsfeld F nicht mehr auftritt.

Man schreibt diese Lagrange-Dichte oft auch in anderer Form. Dazu setzt man $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(A - iB)$ und definiert einen Majorana-Spinor wie folgt:

$$\Psi := \begin{pmatrix} \psi \\ \bar\psi \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \bar\Psi = (\psi, \bar\psi). \tag{4.124}$$

Statt (4.125) kann man dann auch schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) - m^2A^2\right] + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu B)(\partial^\mu B) - m^2B^2\right] \\ &- \frac{1}{2}\bar\Psi\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\Psi + G\bar\Psi\left(A + i\gamma_5 B\right)\bar\Psi \\ &- mGA\left(A^2 + B^2\right) - \frac{G^2}{2}\left(A^2 + B^2\right)^2, \end{aligned} \tag{4.125}$$

dabei wurde $G := \frac{g}{\sqrt{2}}$ gesetzt. Man fordert nun weiter, daß die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ auch unter Raumspiegelungen invariant bleibt. Unter diesen Transformationen gilt:

$$\Psi \longrightarrow P\Psi = \gamma^0\Psi \quad \text{und} \quad \bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Psi}\gamma^0. \tag{4.126}$$

Man erhält dann zusätzliche Bedingungen an die reellen Felder A und B, nämlich $PA(x) = A(x)$ (A ist Skalar) und $PB(x) = -B(x)$ (B ist Pseudoskalar). Das Wess-Zumino-Modell beinhaltet also das folgende *chirale Supermultiplett* :

- 1 reelles skalares Feld $A(x)$, $A = A^*$
- 1 reelles pseudoskalares Feld $B(x)$, $B = B^*$
- 1 Majorana-Spinorfeld $\Psi(x)$, $\Psi = C\bar{\Psi}^T$.

Das freie Wess-Zumino-Modell erhält man, indem man in (4.127) $G = 0$ setzt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) - m^2A^2\right] + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu B)(\partial^\mu B) - m^2B^2\right] \\ &- \frac{1}{2}\bar{\Psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\Psi, \end{aligned} \tag{4.127}$$

die zugehörigen Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$(\Box + m^2)A = 0 \quad \text{(Klein-Gordom)} \tag{4.128}$$
$$(\Box + m^2)B = 0 \quad \text{(Klein-Gordon)} \tag{4.129}$$
$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad \text{(Dirac)} \tag{4.130}$$
$$\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial} + m) = 0 \quad \text{(Dirac)} \tag{4.131}$$

Die SUSY-Trafos mit Parameter ϵ ergeben sich in den Feldern A, B und Ψ zu:

$$\delta A = \bar{\eta}\Psi \tag{4.132}$$
$$\delta B = i\bar{\eta}\gamma_5\Psi \tag{4.133}$$
$$\delta\Psi = (i\gamma_\mu\partial^\mu)(A - i\gamma_5 B)\eta, \tag{4.134}$$

wobei $\eta = \begin{pmatrix} \epsilon \\ \bar{\epsilon} \end{pmatrix}$ ein Majorana-Spinor ist.

4.2 Lagrange-Dichten für Vektor-Superfelder

Für ein gegebenes Vektor-Superfeld $V(x,\theta,\bar\theta)$ definiert man die supersymmetrische Feldstärke wie folgt:

$$\begin{aligned} W_A &:= -\frac{1}{4}(\bar D\bar D)D_A V(x,\theta,\bar\theta) \\ \bar W_{\dot A} &:= -\frac{1}{4}(DD)\bar D_{\dot A} V(x,\theta,\bar\theta). \end{aligned} \tag{4.135}$$

Es folgt, daß $\bar D_{\dot A} W_A = 0$ und $D_A \bar W_{\dot A} = 0$, also ist W_A chirales Superfeld und $\bar W_{\dot A}$ antichiral. Man kann sehr leicht sehen (Soff p387), daß W_A und $\bar W_{\dot A}$ eichinvariant sind, also unter Transformationen der Art $V \longrightarrow V + \Phi + \Phi^\dagger$ mit Φ chiral in sich selber übergehen.
Wir wollen jetzt die Komponenten der supersymmetrischen Feldstärke bestimmen. Gemäß (3.116) läßt sich ein Vektor-Superfeld in Wess-Zumino-Eichung wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} V_{WZ}(x,\theta,\bar\theta) &= V_{WZ}(y - i\theta\sigma\bar\theta,\theta,\bar\theta) \\ &= (\theta\sigma^\mu\bar\theta)A_\mu(y) - i(\theta\sigma^\mu\bar\theta)(\theta\sigma^\nu\bar\theta)\partial_\nu A_\mu(y) \\ &\quad + i(\theta\theta)\bar\theta\bar\lambda(y) - i(\bar\theta\bar\theta)\theta\lambda(y) + (\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)d(y) \end{aligned} \tag{4.137}$$

Nach einigen Rechnungen (Soff p388f) ergibt sich hieraus:

$$W_A = i\lambda_A - 2d\theta_A - (\sigma^{\mu\nu}\theta)_A F_{\mu\nu} - (\theta\theta)(\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda)_A \tag{4.138}$$

Da W_A gemäß Konstruktion chiral ist, kann man eine Lagrange-Dichte wie folgt konstruieren:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} W^A W_A \,|_{\theta\theta} + HC. \tag{4.139}$$

Man beachte, daß $\mathcal{L}$ SUSY-invariant ist, denn mit W_A ist auch $W^A W_A$ chiral. Außerdem ist $\mathcal{L}$ eichinvariant. Zerlegt in Komponenten schreibt sich $\mathcal{L}$ unter Verwendung von (4.140) als

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2}\left(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda + \bar\lambda\tilde\sigma^\mu\partial_\mu\lambda\right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2d^2. \tag{4.140}$$

4.3 Supersymmetrische Eichtheorie

Wir betrachten die folgende Eichtransformation eines chiralen Superfeldes:

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = e^{-iq\Lambda(x,\theta,\bar\theta)}\Phi. \tag{4.141}$$

Aus der Forderung Φ' chiral ergibt sich:

$$\bar D_{\dot A}\Phi' = -iq[\bar D_{\dot A}\Lambda]e^{-iq\Lambda} \stackrel{!}{=} 0, \tag{4.142}$$

wobei benutzt wurde, daß $\bar{D}_{\dot{A}}\Phi = 0$ aufgrund der Chiralität. Wir müssen also $\bar{D}_{\dot{A}} = 0$ fordern, damit die Eichtransformation chirale Superfelder wieder in chirale Superfelder überführt. Wie kann man nun eine eichinvariante Theorie für chirale Superfelder konstruieren ? Wegen

$$\begin{array}{ccl} \Phi & \longrightarrow & \Phi' = e^{-iq\Lambda(x,\theta,\bar{\theta})}\Phi \\ \Phi^\dagger & \longrightarrow & \Phi^{\dagger\prime} = \Phi^\dagger e^{+iq\Lambda^\dagger(x,\theta,\bar{\theta})} \end{array} \tag{4.143}$$

führt der naive Ansatz $\mathcal{L}_{kin} = \Phi^\dagger\Phi\,|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$ nicht zum Erfolg, denn es wäre $\mathcal{L}'_{kin} = \Phi^\dagger e^{iq(\Lambda^\dagger - \Lambda)}\Phi$. Wir müssen daher ein kompensierendes Feld V einführen, welches sich unter Eichtransformationen wie folgt verhält

$$V(x,\theta,\bar{\theta}) \longrightarrow V(x,\theta,\bar{\theta}) + i[\Lambda(x,\theta,\bar{\theta}) - \Lambda^\dagger(x,\theta,\bar{\theta})] \tag{4.144}$$

und können dann $\mathcal{L}_{kin} = \Phi^\dagger e^{qV}\Phi\,|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$ wählen.

5 $N=1$-Super-Yang-Mills-Theorie

5.1 Herkömmliche Eichtheorie

5.1.1 Abelscher Fall $U(1)$

Wir betrachten die Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\Psi(x)$ eines freien Dirac-Elektrons und die lokalen $U(1)$-Eichtransformationen (α reell, skalar):

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\Psi(x) \tag{5.145}$$

$$\bar{\Psi}(x) \longrightarrow \bar{\Psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\bar{\Psi}(x) \tag{5.146}$$

Man erkennt leicht, daß der Term $\bar{\Psi}(x)\partial_\mu\Psi(x)$ nicht eichinvariant ist, denn

$$\bar{\Psi}(x)\partial_\mu\Psi(x) \longrightarrow \bar{\Psi}(x)\partial_\mu\Psi(x) - i\bar{\Psi}(x)\partial_\mu\alpha(x)\Psi(x). \tag{5.147}$$

Wie jedermann weiß, definiert man daher eine kovariante Ableitung $D_\mu := \partial_\mu + ieA_\mu$ mit einem neu eingeführten Eichfeld $A_\mu(x)$. Für dieses gibt man das Verhalten unter Eichtransformationen vor:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \tag{5.148}$$

Man hat dann:

$$D_\mu\Psi(x) \longrightarrow e^{-i\alpha(x)}D_\mu\Psi(x), \tag{5.149}$$

und damit wird $\bar{\Psi}i\gamma^\mu D_\mu\Psi$ eichinvariant. Um das Eichfeld A_μ in die Dynamik aufzunehmen, definiert man einen Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ wie folgt:

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{5.150}$$

$F_{\mu\nu}$ ist selber eichinvariant. Außerdem gilt:

$$[D_\mu, D_\nu] = ieF_{\mu\nu}. \tag{5.151}$$

Die Dynamik des Eichfeldes zeigt sich nun im Term $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ in der QED-Lagrange-Dichte, zusammen mit einem Masseterm für das Elektron-Feld lautet diese:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{5.152}$$

5.1.2 Nicht-Abelscher Fall: Yang-Mills-Theorie

Wir betrachten hier die Gruppe $SU(2)$ mit den Generatoren τ_a (Dies sind im Falle der $SU(2)$ die Pauli-Matrizen). Sie erfüllen die Kommutatoren

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}\right] = i\epsilon_{ijk}\frac{\tau_k}{2}. \tag{5.153}$$

Der Darstellungsraum besteht dann aus Spinoren der Form $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$. Die Eichtransformationen sehen wie folgt aus:

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = e^{-\frac{i}{2}\theta_a \tau_a}\Psi(x). \tag{5.154}$$

Dabei sind die Eichparameter θ_a lokal: $\theta_a = \theta_a(x)$. Mit der Abkürzung $U(\theta) = e^{-\frac{i}{2}\theta_a \tau_a}$ erkennt man:

$$\bar{\Psi}(x)\partial_\mu \Psi(x) \longrightarrow \bar{\Psi}'(x)\partial_\mu \Psi'(x) = \bar{\Psi}(x)\partial_\mu \Psi(x) + \bar{\Psi}(x)U^{-1}(\theta)[\partial_\mu U(\theta)]\Psi(x). \tag{5.155}$$

Also muß man auch hier Eichfelder und kovariante Ableitungen einführen. Man benötigt für jeden Generator τ_a ein vektorielles Eichfeld $A^a_\mu(x)$ und definiert analog zum abelschen Fall die kovarianten Ableitungen wie folgt:

$$D_\mu = \left(\partial_\mu - igA^a_\mu \frac{\tau^a}{2}\right). \tag{5.156}$$

Man verlangt analog zu (5.151)

$$D_\mu \Psi \longrightarrow U(\theta) D_\mu \Psi \tag{5.157}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\tau_i A^i_\mu \longrightarrow U(\theta)\frac{1}{2}\tau_i A^i_\mu U(\theta)^{-1} - \frac{i}{g}[\partial_\mu U(\theta)]U(\theta)^{-1} \tag{5.158}$$

Dies führt in infinitesimaler Näherung und 1. Ordnung zu (vgl. Cheng,Li p232):

$$\frac{1}{2}\tau_i A^i_\mu \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}\tau_i A^i_\mu + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\tau^i \theta^j A^k_\mu - \frac{1}{2g}\left(\tau_a \partial_\mu \theta^a\right) \text{ bzw.} \tag{5.159}$$

$$A^i_\mu \quad \longrightarrow \quad A^i_\mu + \epsilon^{ijk}\theta^j A^k_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu \theta^i \tag{5.160}$$

Das nicht-abelsche Analogon zu (5.153) lautet dann:

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\Psi \equiv ig\left(F^i_{\mu\nu}\frac{\tau^i}{2}\right)\Psi \tag{5.161}$$

(als Definiton für $F_{\mu\nu}$ zu lesen). Ausrechnen liefert:

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\epsilon^{ijk}A^j_\mu A^k_\nu, \tag{5.162}$$

was im Fall verschwindenender Strukturkonstanten in (5.152) übergeht. Man sieht:

$$[D_\mu, D_\nu]\Psi \longrightarrow U(\theta)[D_\mu, D_\nu]\Psi, \tag{5.163}$$

woraus mit (5.163) folgt:

$$\tau_i F^{i\prime}_{\mu\nu} U(\theta)\Psi = U(\theta)\tau_i F^i_{\mu\nu}\Psi. \qquad (5.164)$$

Damit bekommt man

$$\tau_i F^i_{\mu\nu}{}' = U(\theta)(\tau_i F^i_{\mu\nu})U^{-1}(\theta), \qquad (5.165)$$

woraus für infinitesimale Eichparameter wieder folgt:

$$F^i_{\mu\nu}{}' = F^i_{\mu\nu} + \epsilon^{ijk}\theta^j F^k_{\mu\nu}. \qquad (5.166)$$

Also transformiert sich $F^i_{\mu\nu}$ hier im Gegensatz zum Abelschen Fall nicht trivial. Aber es gilt ja glücklicherweise $\tau_i F^i_{\mu\nu}{}' = U(\theta)(\tau_i F^i_{\mu\nu})U^{-1}(\theta)$, sodaß

$$\begin{aligned} Tr\left\{\left(\tau_i F^i_{\mu\nu}\right)\left(\tau_i F^{\mu\nu i}\right)\right\} \quad &\longrightarrow \quad Tr\left\{U(\theta)\left(\tau_i F^i_{\mu\nu}\right)\left(\tau_i F^{\mu\nu i}\right)U(\theta)^{-1}\right\} \\ &= Tr\left\{\left(\tau_i F^i_{\mu\nu}\right)\left(\tau_i F^{\mu\nu i}\right)\right\}. \end{aligned} \qquad (5.167)$$

Mit der Normierung $Tr\{\tau_i\tau_j\} = 2\delta_{ij}$ folgt weiterhin

$$Tr\left\{\left(\tau_i F^i_{\mu\nu}\right)\left(\tau_i F^{\mu\nu i}\right)\right\} = 2F^i_{\mu\nu}F^{\mu\nu i} \qquad (5.168)$$

($F^i_{\mu\nu}$ ist eine Zahl !), also ist insbesondere der Term $F^i_{\mu\nu}F^{\mu\nu i}$ eichinvariant. Man kann also etwa folgende Lagrange-Dichte wählen:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{\mu\nu i} + \bar{\Psi}i\gamma^\mu D_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi. \qquad (5.169)$$

Sie ist invariant unter den genannten Eichtransformationen:

$$\begin{aligned} \Psi(x) \quad &\longrightarrow \quad e^{-\frac{i}{2}\theta_a\tau_a}\Psi(x) \qquad (5.170) \\ \frac{1}{2}\tau_i A^i_\mu \quad &\longrightarrow \quad U(\theta)\frac{1}{2}\tau_i A^i_\mu U(\theta)^{-1} - \frac{i}{g}[\partial_\mu U(\theta)]U(\theta)^{-1}, \end{aligned}$$

welche für infinitesimale Eichparameter auch wie folgt geschrieben werden können:

$$\Psi \quad \longrightarrow \quad \Psi - \frac{i}{2}\theta_a\tau_a\Psi \qquad (5.172)$$

$$A^i_\mu \quad \longrightarrow \quad A^i_\mu + \epsilon^{ijk}\theta^j A^k_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^i. \qquad (5.173)$$

Für allgemeine Gruppen mit Generatoren T^a hat man entsprechend:

$$\begin{aligned} [T^a, T^b] &= if^{abc}T^c && (5.174) \\ D_\mu\Psi &= \left(\partial_\mu - igT^a A^a_\mu\right)\Psi && (5.175) \\ F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu && (5.176) \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi && (5.177) \end{aligned}$$

und die infinitesimalen Eichtransformationen lauten:

$$\Psi(x) \quad \longrightarrow \quad \Psi - iT^a\theta_a(x)\Psi(x) \qquad (5.178)$$

$$A^a_\mu(x) \quad \longrightarrow \quad A^a_\mu(x) + f^{abc}\theta^b(x)A^c_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) \qquad (5.179)$$

5.2 Die adjungierte Darstellung

Wir folgen hier der Darstellung von [FS] (pp.66).
Bisher haben wir nur Darstellungen von Gruppen betrachtet. War $\mathcal{G}$ eine Gruppe mit Gruppenverknüpfung $\cdot : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ und V ein Vektorraum, so haben wir unter einer Darstellung R von $\mathcal{G}$ eine Abbildung $R : \mathcal{G} \longrightarrow GL(V)$ von $\mathcal{G}$ in die Menge $GL(V)$der Vektorraum-Automorphismen von V verstanden, die die Homomorphieeigenschaft $R(g \cdot h) = R(g) \circ R(h)$ respektiert. In analoger Form kann man auch Darstellungen von Lie-Algebren betrachten. Unter einer Lie-Algebra versteht man dabei einen Vektorraum $\mathcal{A}$ mit bilinearem, antisymmetrischen Produkt $[\cdot,\cdot] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, welches die Jacobi-Identität erfüllt. Die Struktur der Lie-Algebra wird also durch die Kommutatoren ihrer Elemente definiert. Man erklärt eine Darstellung einer Lie-Algebra nun als Homomorphismus von Lie-Algebren, d.h. als eine Abbildung $R : \mathcal{A} \longrightarrow GL(V)$ mit $R([x,y]) = R(x) \circ R(y) - R(y) \circ R(x)$. Ist $\mathcal{G}$ eine Lie-Gruppe und $\mathcal{A} = T_e\mathcal{G}$ die zugehörige Lie-Algebra, so besteht ein Zusammenhang zwischen den Darstellungen von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{A}$. Ist $R_{Algebra}$ eine Darstellung von $\mathcal{A}$, so ist

$$R_{Gruppe} : \mathcal{G} \longrightarrow GL(V), \quad e^{iT} \longmapsto e^{iR_{Algebra}(T)} \tag{5.180}$$

eine Darstellung der Gruppe ($T \in \mathcal{A}$).
Wir betrachten nun zunächst die sogenannte *adjungierte Darstellung* einer Lie-Algebra. Oft wird sie in der Literatur auch als reguläre Darstellung bezeichnet. Diese ist erkärt durch:

$$\begin{aligned} R_{ad} : \mathcal{A} &\longrightarrow GL(\mathcal{A}) \\ x &\longmapsto ad_x \\ ad_x(y) &:= [x,y]. \end{aligned} \tag{5.181}$$

In der Tat erfüllt diese Abbildung die Eigenschaften eines Homomorphismus von Lie-Algebren. Es ist wichtig, sich klar zu machen, daß der Vektorraum V, auf den die Darstellung wirkt, die Lie-Algebra $\mathcal{A}$ selbst ist. Im Fall der Gruppe $SU(N)$ sind sowohl die Gruppenelemente als auch die Elemente der Lie-Algebra $N \times N$-Matrizen. Die adjungierte Darstellung operiert also auf einem Vektorraum von $N \times N$-Matrizen.
In Physik-Büchern wird die adjungierte Darstellung oft als Darstellung charakterisiert, die durch die Strukturkonstanten festgelegt ist. Dies hat folgenden Hintergrund. Betrachtet man die Gruppe $SU(N)$ mit den Generatoren T^a (Elemente der zugehörigen Lie-Algebra !), so sind die T^a eine Basis von $\mathcal{A}$. Da für ein festes a $R_{ad}(T^a)$ eine lineare Abbildung $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ ist, wird sie durch eine Koeffizientenmatrix $(R_{ad}(T^a))^b_c$ festgelegt, deren Spalten wie üblich jeweils die Bilder der Basisvektoren T^b (in den Koordinaten der T^c) angeben. Es gilt nun

$$ad_{T^a}(T^b) = [T^a, T^b] = f^{ab}_c T^c \tag{5.182}$$

Also gilt $(R_{ad}(T^a))^b_c = f^{ab}_c$, d.h. die Einträge der o.g. Koeffizientenmatrizen sind genau die Strukturkonstanten, und sie definieren die Darstellung dadurch eindeutig.
Wir betrachten nun konkret eine Eichtransformation, die Eichgruppe sei dabei eine $SU(N)$. Diese sind von der bekannten Form:

$$\phi \longrightarrow e^{iT}\phi. \tag{5.183}$$

Dabei steht $T := t_a T^a$ für ein beliebiges Element der zugehörigen Lie-Algebra. Diese sind $N \times N$-Matrizen und e^{iT} ist dementsprechend auch eine $N \times N$- Matrix, ein Element aus $SU(N)$ eben. ϕ stammt aus dem Vektorraum $V = \mathbb{C}^N$. Die hier vorliegende Darstellung ist also gegeben durch die Identität:

$$R_{Gruppe} : SU(N) \longrightarrow SU(N), g \longmapsto g \tag{5.184}$$

Durch Einführung eines Hilfsparameters τ, Übergehen zu

$$\phi \longrightarrow e^{i\tau T}\phi. \tag{5.185}$$

und Ableiten nach τ an der Stelle $\tau = 0$ erkennt man, daß eine infinitesimale Transformation durch

$$\phi \longrightarrow \phi + iT\phi \tag{5.186}$$

gegeben ist. Die Darstellung auf der Ebene der Algebra ist dann:

$$R_{Algebra}(iT) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \phi \longmapsto iT\phi. \tag{5.187}$$

In der adjungierten Darstellung wirken die Eichtransformationen nun wie folgt:

$$\phi \longrightarrow e^{-it_a T^a}\phi e^{it_a T^a}, \tag{5.188}$$

(vgl. [RA] pp. 194) d.h. es ist

$$R_{ad,\,Gruppe}(iT)(\cdot) : \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times n},\ \phi \longmapsto e^{-it_a T^a}\phi e^{it_a T^a}. \tag{5.189}$$

Insbesondere ist also ϕ jetzt eine $N \times N$-Matrix. Infinitesimal sehen diese Transformationen wie folgt aus:

$$\phi \longrightarrow \phi + [iT, \phi] \tag{5.190}$$

Also ist:

$$R_{ad,\,Algebra}(iT)(\cdot) : \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times n},\ \phi \longmapsto [iT, \phi] \tag{5.191}$$

Im Fall der "normalen" Darstellung mußten wir eine eichkovariante Ableitung

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - igA_\mu^a T^a\right)\phi \tag{5.192}$$

einführen, damit $D_\mu\phi \longrightarrow UD_\mu\phi$ gilt ($U = e^{-it_a T^a}$).
Im Fall der adjungierten Darstellung ist dies nach

$$D_\mu\phi := \partial_\mu\phi + ig[A_\mu, \phi] \tag{5.193}$$

abzuändern. Mit

$$A_\mu \longrightarrow UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}[\partial_\mu U]U^{-1} \tag{5.194}$$

rechnet man dann nach, daß $D_\mu\phi \longrightarrow UD_\mu\phi U^{-1}$, also daß sich $D_\mu\phi$ gemäß der adjungierten Darstellung transformiert. Somit ist dann $\phi\cdot D_\mu\phi = \phi^\dagger D_\mu\phi$ eichinvariant.

5.3 Supersymmetrische Eichtheorie

5.3.1 Abelscher Fall

Man geht von einem chiralen Superfeld Φ und der Eichtransformation

$$\Phi(x,\theta,\bar\theta) \quad\longrightarrow\quad e^{-iq\Lambda(x,\theta,\bar\theta)}\Phi(x,\theta,\bar\theta) \tag{5.195}$$

$$\Phi^\dagger(x,\theta,\bar\theta) \quad\longrightarrow\quad \Phi^\dagger(x,\theta,\bar\theta)e^{iq\Lambda^\dagger(x,\theta,\bar\theta)} \tag{5.196}$$

aus. Damit auch das eichtransformierte Feld chiral ist, muß man wie gesehen fordern, daß auch Λ chiral ist, also $\bar D_{\dot A}\Lambda(x) = 0$.
Analog zu $\bar\Psi(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x)$ ist hier $(\Phi^\dagger\Phi)_D$ nicht eichinvariant, denn

$$(\Phi^\dagger\Phi)_D \longrightarrow \left(\Phi^\dagger e^{iq(\Lambda^\dagger-\Lambda)}\Phi\right)_D . \tag{5.197}$$

In Analogie zu $A_\mu(x)$ muß man also auch hier ein kompensierendes Eichfeld $V(x,\theta,\bar\theta)$ einführen, welches im SUSY-Fall ein Vektor-Superfeld ist. Unter Eichtransformationen soll es sich wie folgt verhalten:

$$V(x,\theta,\bar\theta) \longrightarrow V(x,\theta,\bar\theta) + i\left[\Lambda(x,\theta,\bar\theta) - \Lambda^\dagger(x,\theta,\bar\theta)\right]. \tag{5.198}$$

Analog zu $\bar\Psi\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\Psi$ verwendet man nun den Term

$$\left(\Phi^\dagger e^{qV}\Phi\right)_D , \tag{5.199}$$

der gemäß Konstruktion eichinvariant ist. Diese Kopplung zwischen Eich- und Materiefeld (Φ und V bzw. Ψ und A_μ) bezeichnet man als *minimale*

Kopplung. Mit der Zerlegung $V = (f, \phi, M, A_\mu, \bar{\lambda}, d)$ und $\Phi = (\varphi, \psi, F)$ gemäß Kapitel 3.5 ist übrigens:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + i\partial_\mu(\varphi - \varphi^*) \tag{5.200}$$
$$\lambda \longrightarrow \lambda \tag{5.201}$$
$$d \longrightarrow d, \tag{5.202}$$

außerdem ist $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ eichinvariant in schönster Analogie zum nicht-supersymmetrischen Fall von oben. Man kann nun den Term $\left(\Phi^\dagger \Phi\right)_D$ in den Komponentenfeldern ausdrücken. Man erhält dann die bemerkenswerte Verallgemeinerung von (4.123):

$$\begin{aligned}\left(\Phi^\dagger e^{qV}\Phi\right)_D &= (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu D_\mu\psi + \psi\sigma^\mu D_\mu^*\bar{\psi}) \\ &\quad + F^*F + \frac{i}{\sqrt{2}}q[\varphi^*(\psi\lambda) - \varphi(\bar{\psi}\bar{\lambda})] + qd\varphi^*\varphi,\end{aligned} \tag{5.203}$$

wobei (wie man schon vermuten kann) die kovariante Ableitung durch

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2}qA_\mu \tag{5.204}$$

gegeben ist. In Kapitel 4.2 haben wir festgestellt, daß die mit V verbundene supersymmetrische Feldstärke W_A eichinvariant ist (auch eine Analogie zum herkömmlichen Fall). Um V in die Dynamik miteinzubinden kann man daher den Term

$$\frac{1}{4}(W^A W_A)_F + HC \tag{5.205}$$

zur Lagrange-Dichte hinzufügen. Dieser übernimmt die Rolle von $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ im non-SUSY-Fall. Ausgeschrieben in den Komponenten lautet er:

$$-\frac{i}{2}\left(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \bar{\lambda}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda)\right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2d^2. \tag{5.206}$$

Man sieht, daß $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ inklusive richtigem Vorzeichen auftaucht.

5.3.2 Nicht-Abelscher Fall

1974 konnten Salam und Strathdee ([SS]) zeigen, daß die konventionelle Yang-Mills-Lagrange-Dichte eines Yang-Mills-Eichfeldes in Wechselwirkung mit einem Majorana-Fermion invariant unter nicht-abelschen Eichtransformationen und den SUSY-Transformationen ist, vorausgesetzt, das Fermion transformiert sich gemäß der adjungierten Darstellung der Eichgruppe.
Wir betrachten also den Fall einer nicht-abelschen Eichgruppe. Formal ändern sich die Eichtransformationen des Feldes Φ nicht, es gehört zur "normalen" Darstellung der Eichgruppe:

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow e^{-i\Lambda(x,\theta,\bar{\theta})}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \tag{5.207}$$
$$\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})e^{i\Lambda^\dagger(x,\theta,\bar{\theta})} \tag{5.208}$$

Allerdings ist Λ jetzt eine Matrix, genauer $\Lambda = \Lambda_a T^a$, mit den T^a hermitesche Matrizen, die die Generatoren der Eichgruppe darstellen. Es wird vorausgesetzt, daß sie den folgenden Bedingungen genügen:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad \text{und} \quad Tr\{T^a T^b\} = \delta_{ab} \tag{5.209}$$

Der Term $\Phi^\dagger e^{qV}\Phi$ bleibt auch weiterhin eichinvariant, falls man die Eichtransformation des Eichfeldes (5.200) zu

$$e^{qV} \longrightarrow e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda} \tag{5.210}$$

verallgemeinert. V gehört somit zur adjungierten Darstellung der Eichgruppe, klar ist, daß auch V nun eine Matrix ist: $V = V_a T^a$. Man kann sich überlegen, daß (5.212) mit den Termen

$$V \longrightarrow V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) + \text{Kommutatorterme} \tag{5.211}$$

beginnt und im kommutierenden Fall die Gleichung (5.200) reproduziert. Auch den Feldstärke-Tensor $W_A = -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A V(x,\theta,\bar{\theta})$ muß man im nichtabelschen Fall modifizieren, die Verallgemeinerung lautet:

$$W_A = -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})e^{-V} D_A e^V. \tag{5.212}$$

Das neue W_A transformiert sich dann gemäß

$$W_A \longrightarrow e^{-i\Lambda} W_A e^{i\Lambda}, \tag{5.213}$$

was sich mit (5.167) vergleichen läßt. Mit der Zerlegung $W_A = W_A^a T^a$ erkennt man, daß

$$Tr\{(W^{Aa}T^a)(W_A^a T^a)\} \quad \longrightarrow \quad Tr\left\{e^{-i\Lambda}(W^{Aa}T^a)(W_A^a T^a)e^{i\Lambda}\right\} \tag{5.214}$$

$$= Tr\{(W^{Aa}T^a)(W_A^a T^a)\} \tag{5.215}$$

eichinvariant ist. Also ist

$$Tr\left\{(W^{Aa}T^a)(W_A^b T^b\right\} = W^{Aa}W_A^b \underbrace{Tr\{T^a T^b\}}_{\delta_{ab}} = W^{Aa}W_A^a \tag{5.216}$$

und somit auch der Term

$$\mathcal{L}_E := Tr\{(W^A W_A)_F\} + HC \tag{5.217}$$

eichinvariant. Die allgemeinste supersymmetrische renormierbare Wirkung ergibt sich zu (vgl [WB]):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4g^2} Tr\{(W^A W_A)_F + (\bar{W}_{\dot{A}}\bar{W}^{\dot{A}})_F\} \\ &+ \left(\Phi^\dagger e^V \Phi\right)_D \\ &+ \left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)_F + HC \end{aligned} \tag{5.218}$$

Im folgenden betrachten wir allerdings nur noch den Eichfeldanteil dieser Lagrange-Dichte und wollen sie in Termen der Komponentenfelder ausdrücken. Man muß dazu den F-Term von $W^A W_A$ berechnen. Dafür hat man mit

$$W_A^a = -\lambda_A^a(y) + \theta_A D^a(y) + \theta_A \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) - (\theta\theta)\left(\bar{\sigma}^\mu \nabla_\mu \bar{\lambda}^a(y)\right)_A \quad (5.219)$$

alle Voraussetzungen. Hierin wurden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] && (5.220) \\ \nabla_\mu \bar{\lambda}^a &= \partial_\mu \bar{\lambda}^a + i[A_\mu, \bar{\lambda}]^a. && (5.221) \end{aligned}$$

Es wird klar, daß ∇_μ die kovariante Ableitung der Eichgruppe in der adjungierten Darstellung ist, λ ist das angesprochende Majorana-Fermion in der regulären Darstellung. Man beachte, daß W_A nur eichkovariant, aber nicht eichinvariant ist, daher hängt die Form der Entwicklung in Komponentenfelder von der Eichung ab. (5.221) gilt für die Wess-Zumino-Eichung. Letztenendes wird damit dann (in WZ-Eichung und Minkowskischer Formulierung):

$$\mathcal{L}_E = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{i}{2g^2} \bar{\lambda}^a \nabla_\mu \gamma^\mu \lambda^a - \frac{1}{2} D^a D^a. \quad (5.222)$$

Bis auf den letzten Term ist dies genau die Wirkung einer Yang-Mills-Theorie mit Eichfeld A_μ und Materiefeld λ. Die Bewegungsgleichung für das Hilfsfeld D ist offenbar gegeben durch $D = 0$, sodaß D aus der Lagrange-Dichte entfernt werden kann. Nach einer Reskalierung $A \to gA$ bleibt man in Euklidischer Formulierung mit

$$S_{\mathrm{SYM}} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a \gamma^\mu \nabla_\mu \lambda^a \right\} \quad (5.223)$$

über. Diese ist invariant unter den SUSY-Transformationen:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= 2i\bar{\epsilon}\gamma_\mu \lambda^a(x) && (5.224) \\ \delta \lambda^a &= -\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x)\epsilon && (5.225) \\ \delta \bar{\lambda}^a &= \bar{\epsilon}\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) && (5.226) \end{aligned}$$

6 Wie tut man eine Eichtheorie aufs Gitter ?

6.1 Eichtheorie und Paralleltransporter

Wir betrachten im folgenden eine $SU(N)$-Eichtheorie. Auf der gewöhnlichen Raumzeit sei das Feld $\phi(x)$ definiert, jedem Raumzeitpunkt x wird ein Vektorraum V_x zugeordnet und es ist $\phi(x) \in V_x$. Im einfachsten Fall ist z.B.$V_x \cong \mathbb{C}^n \ \forall x$. Man betrachtet nach wie vor die Eichtransformationen:

$$\phi(x) \longrightarrow \Lambda^{-1}(x)\phi(x), \tag{6.227}$$

unter ihnen sind Terme der Art $\phi(y) \cdot \phi(x)$ nicht invariant, da die Transformation ja nicht global ist. Man führt daher *Paralleltransporter* wie folgt ein: Einer Kurve c_{yx}, die die Raumzeitpunkte x und y verbindet, ordnet man ein Element aus $SU(N)$ $U(c_{yx})$ zu:

$$U(c_{yx}) : V_x \longrightarrow V_y, \tag{6.228}$$

den Vektor $U(c_{yx}) \cdot \phi(x) \in V_y$ bezeichnet man als den Paralleltransport von $\phi(x)$. Man erkennt, daß der Term $\phi(y) \cdot U(c_{yx})\phi(x)$ eichinvariant wird, falls man verlangt

$$U(c_{yx}) \longrightarrow \Lambda(y)^{-1}U(c_{yx})\Lambda(x). \tag{6.229}$$

(Ein Wort zur Notation mit $\cdot$ ist das Skalarprodukt gemeint, es ist also: $\phi(y) \cdot U(c_{yx})\phi(x) = \phi(y)^{\dagger}U(c_{yx})\phi(x)$.) Da die Paralleltransporter Elemente aus $SU(N)$ darstellen, kann man im infinitesimalen Fall den folgenden Ansatz machen:

$$U(C_{x+dx,x}) = 1 - A_{\mu}(x)dx^{\mu} \tag{6.230}$$

mit den $A_{\mu}(x) \in su(N)$ in der Lie-Algebra $su(N)$ der $SU(N)$. Das Feld $A_{\mu}(x)$ nennt man Eichfeld. Die kovariante Ableitung konstruiert man wie folgt: Man möchte die Feldvektoren $\phi(x+dx)$ und $\phi(x)$ miteinander vergleichen und bedient sich dazu des Paralleltransports. Man betrachtet also

$$D\phi(x) := U(c_{x+dx,x})^{-1}\phi(x+dx) - \phi(x) \tag{6.231}$$

(beachte $U(c_{x+dx,x})^{-1} = U(c_{x,x+dx})$ ist der Transporter von $x+dx$ nach x). Setzt man $D\phi(x) =: D_{\mu}\phi(x)dx^{\mu}$, so ergibt dies die übliche kovariante Ableitung

$$D_{\mu}\phi(x) = (\partial_{\mu} + A_{\mu}(x))\phi(x). \tag{6.232}$$

Aus dem Transformationsverhalten (6.231) des Paralleltransporters ergibt sich das des Eichfeldes. Mit dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu}(x) = [D_{\mu}, D_{\nu}]$ ergibt sich für den Paralleltransporter $U(c_{xx})$ entlang eines infinitesimalen Parallelogramms um x mit Seitenlängen dx und dy (im 4-dimensionalen !) der Ausdruck

$$U(c_{xx}) = 1 - F_{\mu\nu}(x)dx^\mu dy^\nu \tag{6.233}$$

Sind alle Paralleltransporter bekannt, so ergibt sich daraus mit (6.232) das Eichfeld $A_\mu(x)$. Die Frage ist, ob man aus dem Eichfeld auch auf die Paralleltransporter schließen kann. Die Antwort lautet: ja. Betrachte dazu die Kurve $c_{yx} : [0,1] \longrightarrow$ Raumzeit. Man schaut nun die Einschränkung c_s auf das Intervall $[0,s]$ mit $s \in [0,1]$ an. Man bekommt aus (6.232) dann direkt die Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds}U(c_s) = -A_\mu(c(s))\frac{dc^\mu}{ds}U(c_s) \tag{6.234}$$

mit der Randbedingung $U(c_0)=1$. Die Integration liefert Dysons Formel:

$$U(c_s) = \mathcal{P}exp\left\{-\int_0^s A_\mu(c(t))\frac{dc^\mu}{dt}dt\right\} \equiv \mathcal{P}exp\left\{-\int_{c_s} A_\mu dx^\mu\right\}. \tag{6.235}$$

Der Operator $\mathcal{P}$ stellt die Pfadordnung sicher, die Matrizen $A_\mu(c(s))$ mit größerem s stehen in der Exponentialentwicklung stets rechts.

6.2 Gittereichfelder und Wilson-Wirkung

Wir werden jetzt versuchen eine Eichtheorie auf dem Gitter $\Lambda = (a\mathbb{Z})^4 = \{x \mid x_\mu \in a\mathbb{Z}\}$ zu erklären. Dementsprechend betrachten wir ab jetzt Felder $\phi(x)$, die nur in den Gitterpunkten erklärt sind. Auch die lokalen Eichparameter $\Lambda(x)$ leben auf dem Gitter. Die Eichtransformation bleibt aber formal unverändert:

$$\phi(x) \longrightarrow \Lambda(x)^{-1}\phi(x) \tag{6.236}$$

Das Skalarprodukt auf dem Gitter erklärt man kanonisch:

$$(f,g) := \sum_{x\in\Lambda} a^4 f(x)\cdot g(x). \tag{6.237}$$

Außerdem braucht man noch Ableitungsoperationen, die natürliche Wahl ist:

$$\Delta_\mu^f f(x) \;:=\; \frac{1}{a}(f(x+a\hat{\mu}) - f(x)) \tag{6.238}$$

$$\Delta_\mu^b f(x) \;:=\; \frac{1}{a}(f(x) - f(x-a\hat{\mu})), \tag{6.239}$$

man hat also eine Vorwärts und eine Rückwärtsableitung. $\hat{\mu}$ ist dabei der Einheitsvektor in μ-Richtung. Ein typischer kinetischer Term lautet dann in Gitterformulierung

$$\frac{1}{2}\sum_x a^4 \Delta_\mu^f \phi(x) \cdot \Delta_\mu^f \phi(x), \tag{6.240}$$

Ausrechnen liefert

$$-\sum_{<xy>} a^2 \phi(x) \cdot \phi(y) + 4\sum_x a^2 \phi(x) \cdot \phi(x). \tag{6.241}$$

Nun wissen wir also, wie man den kinetischen Term eines Materiefeldes diskretisiert. Wir kommen jetzt zu der Frage, wie man den Eichfeld-Anteil einer Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter formuliert.
Die kürzeste nichtverschwindende Distanz auf dem Gitter ist die Gitterkonstante a. Es genügt daher, Paralleltransporter entlang von links (bonds) zu definieren:

$$U(b) := U(x + a\hat{\mu}, x) \equiv U_{x\mu} \in G \tag{6.242}$$

mit G der Eichgruppe der Theorie. Der Paralleltransporter einer "Kurve" c auf dem Gitter ist dann $U(c) = U(b_n) \cdots U(b_1)$, wobei $c = b_n \circ \ldots \circ b_1$. Unter dem Gittereichfeld versteht man die gesamte Konfiguration $\{U(b) \mid b \text{ link}\}$. Es gilt hier in Analogie zu (6.231):

$$U(y, x) \longrightarrow \Lambda(y)^{-1} U(y, x) \Lambda(x) \tag{6.243}$$

(Mit $U(x, y)$ bezeichnen wir den Paralleltransporter von x nach y, wobei x und y benachbarte Gitterpunkte seien.) Dann wird der Term

$$\sum_{<xy>} \phi(x) \cdot U(x, y) \phi(y) \tag{6.244}$$

eichinvariant. Man definiert die kovariante Gitter-Vorwärts-Ableitung durch

$$D_\mu \phi(x) = \frac{1}{a}(U(x, \mu)^{-1} \phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x)) \tag{6.245}$$

Der kinetische Term, in dem die gewöhnlichen durch kovariante Ableitungen ersetzt wurden, lautet dann

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_x a^4 D_\mu \phi(x) D_\mu \phi(x) \\ = \quad & -a^2 \textstyle\sum_{<xy>} \phi(x) U(x, y) \phi(y) + 4a^2 \sum_x \phi(x)^2. \end{aligned} \tag{6.246}$$

Man muß sich nun überlegen, wie man das Eichfeld in die Dynamik miteinbezieht. Gesucht ist also ein eichinvarianter Zusatzterm in der Lagrange-Dichte, der im Kontinuumslimes $a \to 0$ den Ausdruck $TrF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ reproduziert. Die kleinste geschlossene Schleife auf dem Gitter ist eine sogenannte

Plaquette, die aus den Punkten $x, x+a\hat{\mu}, x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}, x+a\hat{\nu}$ besteht. Wir bezeichnen sie mit $p = (x;\mu,\nu)$ Der Paralleltransporter für einen Weg entlang einer solchen Plaquette lautet dann:

$$\begin{aligned} U_p := U_{x;\mu\nu} &:= U(x, x + a\hat{\nu})U(x + a\hat{\nu}, x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \\ &\cdot U(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, xc + a\hat{\mu})U(x + a\hat{\mu}, x) \end{aligned}$$

Man bezeichnet ihn auch als Plaquettenvariable. WILSON machte nun folgenden Ansatz für den gesuchten Zusatzterm:

$$S[U] = \sum_p S_1(U_p) \tag{6.248}$$

In der Summe soll dabei jede Plaquette nur in einer Orientierung auftauchen und es wird

$$S_1(U) = -\beta \left\{ \frac{1}{2Tr\,1}(Tr\,U + Tr\,U^{-1}) - 1 \right\} \tag{6.249}$$

angenommen. Im $SU(N)$-Fall ist der letzte Ausdruck gleich

$$S_1(U) = \beta \left\{ 1 - \frac{1}{N} Re\,Tr\,U \right\}. \tag{6.250}$$

Klar ist, daß dieser Term unter Eichtransformationen invariant ist, denn es ist

$$Tr\,U_p \longrightarrow Tr\{\Lambda(x)^{-1}U_p\Lambda(x)\} = Tr\,U_p, \tag{6.251}$$

wobei der Start- und Endpunkt von p durch x gegeben sei. Wir hatten im Kontinuum

$$U(x_0, x_1) = \mathcal{P}exp\left\{ -\int_{x_0}^{x_1} A_\mu dx^\mu \right\}, \tag{6.252}$$

also definieren wir

$$U(x,\mu) := e^{-aA_\mu(x)} = 1 - aA_\mu(x) + \frac{a^2}{2}A_\mu(x)^2 + ... \tag{6.253}$$

Dabei ist nach wie vor $A_\mu(x) = -igA_\mu^b T_b$. Mit $A_\nu(x + a\hat{\mu}) = A_\nu(x) + a\Delta_\mu^f A_\nu(x)$ (nach Def. der Vorwärtsableitung) und der Campell-Hausdorff-Formel findet man

$$U_{x;\mu\nu} = exp\left\{-a^2 G_{\mu\nu}(x)\right\} \tag{6.254}$$

mit den Bezeichnungen

$$G_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a) \tag{6.255}$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \Delta_\mu^f A_\nu(x) - \Delta_\nu^f A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)]. \tag{6.256}$$

Durch etwas Zauberei darf man $Tr\, G_{\mu\nu} = 0$ benutzen und bekommt

$$\begin{aligned}
Tr\{U_p + U_p^{-1}\} &= Tr\Bigg\{ \left(1 - a^2 G_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a^4 G_{\mu\nu}^2 + ...\right) \\
&\quad + \left(1 + a^2 G_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a^4 G_{\mu\nu}^2 + ...\right)\Bigg\} \\
&= 2Tr\, 1 + a^4 Tr(F_{\mu\nu}(x)^2) + \mathcal{O}(a^5) \qquad (6.257)
\end{aligned}$$

Mit $\sum_p Tr(F_{\mu\nu}(x)^2) = \frac{1}{2}\sum_{x;\mu\nu} Tr(F_{\mu\nu}(x)^2)$ folgt weiter

$$S = -\frac{\beta}{4N}\sum_x a^4 Tr\left\{F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right\} + \mathcal{O}(a^5). \qquad (6.258)$$

Man erkennt,daß dies für $a \to 0$ den Eichfeld-Anteil der Yang-Mills-Wirkung reproduziert, falls $\beta = \frac{2N}{g^2}$.

6.3 Fermionen auf dem Gitter

Betrachten wir den Hamilton-Operator

$$H = \int d^3x\, \Psi_\gamma^\dagger(x) \left\{ m\beta + \frac{i}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_k} - \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x_k}\right)\alpha_k \right\}_{\gamma\delta} \Psi_\delta(x) \qquad (6.259)$$

mit den üblichen Antikommutatoren zwischen den $\Psi_\gamma(x)$ und den bekannten 4x4-α-Matrizen. Wir wollen dies nun im Volumen $V = (aL)^3$ diskretisieren, d.h. ein Gitterpunkt wird durch ein Zahlentripel x_k, $k = 1, 2, 3$ mit $x_k \in \{0, ...L-1\}$ definiert. Wir setzen periodische Randbedingungen voraus. Es erfolgen die Ersetzungen:

$$\int d^3x \;\longrightarrow\; \sum_x a^3 \qquad (6.260)$$

$$\frac{\partial \Psi_\alpha(x)}{\partial x_k} \;\longrightarrow\; \frac{1}{a}\left\{\Psi_\alpha(x+\hat{k})) - \Psi_\alpha(x)\right\} \qquad (6.261)$$

Durch diese *naive* Diskretisierung geht der Hamiltonian über in:

$$\begin{aligned}
H &= \sum_x a^3 \Bigg\{ \Psi_\gamma^\dagger(x) m\beta_{\gamma\delta}\Psi_\delta(x) \qquad (6.262) \\
&\quad + \frac{i}{2a}\sum_{k=1}^{3}\left[\Psi_\gamma^\dagger(x+\hat{k})\alpha_{k\gamma\delta}\Psi_\delta(x) - \Psi_\gamma^\dagger(x)\alpha_{k\gamma\delta}\Psi_\delta(x+\hat{k})\right]\Bigg\}
\end{aligned}$$

Wir wollen nun in den Impulsraum übergehen. Man erinnert sich dazu an seine Vorlesung über Angewandte Physik: Wir haben eine diskrete, begrenzte, periodisch fortgesetzte Ortsfunktion (Gitter, endliches Volumen, periodische Randbedingungen). Die auftretenden Impulse $q = (q_1, q_2, q_3)$ sind daher äquidistant in der Brillouin-Zone verteilt:

$$q_k \in \left\{ \frac{2\pi}{L}\nu \mid \nu = 0, ..., L-1 \right\} \tag{6.263}$$

Mit der diskreten Fouriertransformierten der Felder

$$\tilde{\Psi}_\alpha(q) = \sum_x e^{-iq\cdot x}\Psi_\alpha(x) \tag{6.264}$$

wird der Hamilton-Operator zu

$$H = \frac{1}{(aL)^3}\sum_q \tilde{\Psi}_\gamma(q) \left\{ m\beta + \frac{1}{a}\alpha_k sin(q_k) \right\}_{\gamma\delta} \tilde{\Psi}_\delta(q) \tag{6.265}$$

Die darin auftretende Matrix hat die Eigenwerte

$$E_q = \pm \left(m^2 + \sum_{k=1}^{3} a^{-2} sin^2 q_k \right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.266}$$

Mit $p = a^{-1}q$ liefert dies im Limes $a \to 0$:

$$E_q^2 = m^2 + p^2 + \mathcal{O}(a^2) \tag{6.267}$$

Wegen $sin(q_k + \pi) = -sin\, q$ gilt aber $E_q^2 = E_{q+q_\pi}$ für

$$\begin{aligned} q_\pi \in \{&(0,0,0), (\pi,0,0), (0,\pi,0), (0,0,\pi), \\ &(0,\pi\pi), (\pi,0,\pi), (\pi,\pi,0), (\pi,\pi,\pi)\} \end{aligned} \tag{6.268}$$

D.h. mit $(0,0,0)$ gehören auch die anderen 7 Ecken der Brillouin-Zone zum selben fermionischen Zustand. Es treten 8 Fermionen pro Feldkomponente auf. Es gibt nun 2 Möglichkeiten diesem unerwünschten Effekt entgegenzutreten: die sogenannte WILSON-Fermionen sowie *staggered* fermions. Wir gehen hier nur auf die erste Möglichkeit ein.

WILSONs Idee war es zu (6.264) noch Terme hinzuzufügen, die das Spektrum (6.268) derart verändern, daß die Fermionen-Doppler im Limes $a \to 0$ eine unendliche Masse erhalten und somit als unphysikalisch erkannt werden können. Dies gelingt z.B. in dem man (6.264) durch den im Buch von Montvay/Münster Gl. (4.66) angegeben Term ersetzt. Dieser Term enthält den sog. Wilson-Parameter r, der oft auf $r = 1$ gesetzt wird. Man bekommt dann das folgende Spektrum:

$$E_q = \pm \left\{ \left[m + \frac{r}{a}\sum_{k=1}^{3}(1 - cos\, q_k) \right]^2 + \sum_{k=1}^{3} a^{-2} sin^2 q_k \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{6.269}$$

Mit $cos(t+\pi) = -cos(t)$ rechnet man schnell nach, daß für kleine a die eckige Klammer in (6.271) zu

$$m + 2ra^{-1}n_\pi \tag{6.270}$$

wird, falls man $q + q_\pi$ statt q einsetzt. Dabei ist mit n_π die Zahl der Komponenten von q_π gemeint, die gleich π sind. Man erkennt, daß alle Fermiondoppler ($q_\pi \neq 0$ bzw. äquivalent $n_\pi \neq 0$) im Limes $a \to 0$ eine unendliche Masse erhalten. Es bleibt dann nur ein physikalisches Fermion über.
Wir haben bisher noch nicht berücksichtigt, daß auch die Zeit diskretisiert werden muß führt man dies durch, so kommt man mit der Konvention $\gamma_{-\mu} := -\gamma_\mu$ für $\mu = 1,2,3,4$ zur Euklidischen Gitter-Wirkung der Dirac-Gleichung (vgl. MM 4.84)

$$S = \sum_x a^4 \left\{ \left(m + \frac{4}{a}\right) (\bar\Psi(x)\Psi(x)) - \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\bar\Psi(x+\hat\mu)[1+\gamma_\mu]\Psi(x)) \right\}. \tag{6.271}$$

Diese läßt sich auch schreiben als

$$\begin{aligned} S &= \sum_x a^4 \Bigg\{ m(\bar\Psi(x)\Psi(x)) - \frac{1}{2a}\sum_{\mu=1}^{4} \bar\Psi(x+\hat\mu)[r+\gamma_\mu]\Psi(x) \\ &\quad + \bar\Psi(x)[r-\gamma_\mu]\Psi(x+\hat\mu) - 2r\bar\Psi(x)\Psi(x) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{6.272}$$

Nach geeigneter Umskalierung und mit $r = 1$ führt dies auf

$$\begin{aligned} S &= \sum_x \Bigg\{ (\bar\Psi(x)\Psi(x)) - K\sum_{\mu=1}^{4} \bar\Psi(x+\hat\mu)(1+\gamma_\mu)\Psi(x) \\ &\quad + \bar\Psi(x)(1-\gamma_\mu)\Psi(x+\hat\mu) \Bigg\} \end{aligned} \tag{6.273}$$

Man schreibt dafür auch kurz $\sum_{x,y}(\bar\Psi(y)Q_{yx}\Psi(x))$ wobei

$$Q_{xy} = \delta_{yx} - K\sum_{\mu=1}^{4} \delta_{y,x+\hat\mu}(1+\gamma_\mu) + \delta_{x,y+\hat\mu}(1-\gamma_\mu) \tag{6.274}$$

die sog. Fermion-Matrix ist.
Berücksichtigt man nun noch die Eichinvarianz, so muß in allen Termen, in denen das Feld $\Psi(x)$ an zwei verschiedenen Punkten eingeht, noch ein

geeigneter Gitter-Paralleltransporter eingefügt werden (vgl. (6.246)). Aus (6.274) wird dann schließlich

$$\begin{aligned} S &= \sum_x a^4 \Bigg\{ m(\bar{\Psi}(x)\Psi(x)) - \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^{4} \bar{\Psi}(x+a\hat{\mu})[r+\gamma_\mu]U_{x\mu}\Psi(x) \\ &\quad + \bar{\Psi}(x)[r-\gamma_\mu]U^\dagger_{x\mu}\Psi(x+a\hat{\mu}) - 2r\bar{\Psi}(x)\Psi(x) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{6.275}$$

7 $N = 1$-Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

Wir kennen nun die Lagrange-Dichte der $N = 1$-SUSY-Yang-Mills-Theorie und wissen, wie man eine Eichtheorie auf dem Gitter formuliert. Allerdings müssen wir uns noch überlegen, wie Terme der Art $\phi(x) \cdot U(x,y)\phi(y)$ in der adjungierten Darstellung zu formulieren sind. Wir wissen

$$U(x,y) \longrightarrow \Lambda(x)^{-1}U(x,y)\Lambda(y) \tag{7.276}$$

$$\phi(x) \longrightarrow \Lambda(x)^{-1}\phi(x)\Lambda(x), \tag{7.277}$$

wobei die letzte Gleichung die Eichtransformation in der adjungierte Darstellung angibt. Es ist klar, daß der Term $\phi(x) \cdot U(x,y)\phi(y)$ dann nicht mehr eichinvariant ist. Man beachte auch, daß $\phi(x)$ eine Matrix ist. Man kann aber unter Ausnutzung der Zyklizität der Spur unmittelbar sehen, daß

$$Tr\left\{\phi(x)^\dagger U(y,x)^\dagger \phi(y) U(y,x)\right\} \tag{7.278}$$

die Eichinvarianz gewährleistet.
Infolgedessen sieht der fermionische Anteil der Wirkung wie folgt aus (vgl. [CV]):

$$\begin{aligned} S_F = & \sum_x \Big\{ \frac{1}{2a} Tr \sum_{\mu=1}^{4} [\bar{\lambda}(x)(\gamma_\mu - r)U_\mu^\dagger(x)\lambda(x+a\hat{\mu})U_\mu(x) \\ & -\bar{\lambda}(x+a\hat{\mu})(\gamma_\mu + r)U_\mu(x)\lambda(x)U_\mu^\dagger(x)] \\ & + \left(M_0 + \frac{4r}{a}\right) Tr\bar{\lambda}(x)\lambda(x)\Big\} \end{aligned} \tag{7.279}$$

Die gesamte Wirkung schreibt sich folglich so:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{a^4}\frac{1}{g^2}\sum_x \sum_{1\le\mu<\nu\le 4} \left[1 - \frac{1}{4}Tr\left(U_{\mu\nu}(x) + U_{\mu\nu}^\dagger(x)\right)\right] \\ & + \sum_x \Big\{ \frac{1}{2a} Tr \sum_{\mu=1}^{4} [\bar{\lambda}(x)(\gamma_\mu - r)U_\mu^\dagger(x)\lambda(x+a\hat{\mu})U_\mu(x) \\ & -\bar{\lambda}(x+a\hat{\mu})(\gamma_\mu + r)U_\mu(x)\lambda(x)U_\mu^\dagger(x)] \\ & + \left(M_0 + \frac{4r}{a}\right) Tr\left(\bar{\lambda}(x)\lambda(x)\right)\Big\} \end{aligned} \tag{7.280}$$

Eine äquivalente Darstellung der Fermion-Wirkung wurde in [MO] gefunden als:

$$\begin{aligned} S_F = & \frac{1}{2}\sum_x \Big\{ \bar{\psi}^a(x)\psi^a(x) \\ & -\frac{K}{a}\sum_{\mu=1}^{4} [\bar{\psi}^a(x+a\hat{\mu})V_\mu^{ab}(x)(r+\gamma_\mu)\psi^b(x) \\ & +\bar{\psi}^a(x)\left(V_\mu^{ab}(x)\right)^T (r-\gamma_\mu)\psi^b(x+a\hat{\mu})]\Big\}. \end{aligned} \tag{7.281}$$

Dabei ist der Eichfeld-Link in der adjungierten Darstellung definiert als

$$V_\mu^{ab} := 2Tr\left[U_\mu^\dagger(x)T^a U_\mu(x)T^b\right] \tag{7.282}$$

und erfüllt

$$V_\mu^{ab}(x) = \left(V_\mu^{ab}(x)\right)^* = \left(\left(V_\mu^{ab}(x)\right)^{-1}\right)^T . \tag{7.283}$$

Diese beiden Versionen können via

$$\begin{aligned}\psi^a(x) &= \sqrt{aM_0 + 4r}\lambda^a(x)\\ \bar{\psi}^a(x) &= \sqrt{aM_0 + 4r}\bar{\lambda}(x)\end{aligned} \tag{7.284}$$

ineinander überführt werden, vergleiche [Lu]

Literatur

[KS] H. Kalka, G. Soff, *Supersymmetrie*, Teubner 1997

[FS] J. Fuchs, Chr. Schweigert, *Symmetries, Lie Algebras and Representations*, Cambridge University Press

[MM] I. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press

[RA] P. Ramond, *Field, Theory A Modern Primer*, Addison-Wesley

[WB] J. Wess, J. Bagger *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press

[BL] D. Bailin, A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, Institute of Physics Publishing

[MO] I. Montvay, *An Algorithm for Gluinos on the Lattice*, Nucl. Phys. B466,256 (1995), hep-lat/9510042

[SS] A. Salam, J. Strathdee, *Super-Symmetry and Non-Abelian Gauges,*, Phys. Lett. B51, 353 (1974)

[CV] G. Curci, G. Veneziano (1987) *Supersymmetry and the Lattice: A Reconciliation*, Nucl. Phys. B292, 555.

[Lu] S. Luckmann, *Ward-Identitäten in der $N = 1$-SUSY-Yang-Mills-Theorie*, Diplomarbeit 1997