Supersymmetrie

Forschungsseminar
Quantenfeldtheorie

Wintersemester 1998/1999

Florian Heitger
Claus Gebert
Tobias Galla

Spinoren

Generatoren der speziellen Lorentzgruppe

Untergruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ der speziellen Lorentztransformationen:

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \left\{ \Lambda \in \mathcal{O}(1,3) \mid \det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 > 0 \right\}.$$

Wird erzeugt von den 6 Generatoren

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} J^1 \\ J^2 \\ J^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{K} = \begin{pmatrix} K^1 \\ K^2 \\ K^3 \end{pmatrix}$$

mit folgenden Kommutatorrelationen:

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] &= i\epsilon^{ijk} J^k \\ [J^i, K^j] &= i\epsilon^{ijk} K^k \\ [K^i, K^j] &= -i\epsilon^{ijk} J^k \end{aligned}$$

Dabei erzeugt $\vec{J}$ Drehungen und $\vec{K}$ Boosts.

Betrachte

$$T^i_\pm := \frac{1}{2}\big(J^i \pm iK^i\big)$$

Es ergeben sich die folgenden Kommutatoren:

$$[T^i_+, T^j_+] = i\epsilon^{ijk} T^k_+$$
$$[T^i_-, T^j_-] = i\epsilon^{ijk} T^k_-$$
$$[T^i_+, T^j_-] = 0.$$

Es ist $\mathcal{L}^\uparrow_+ \cong SL(2, \mathbb{C})$
(nicht $\mathcal{L}^\uparrow_+ \cong SU(2) \otimes SU(2)$!)
Beide Gruppen stimmen aber in ihren Lie-Algebren überein.

Linke und rechte Fundamentaldarstellung, Weyl-Spinoren

Casimir-Operatoren $\vec{T}^2_+$ und $\vec{T}^2_-$

Spezielle irreduzible Darstellungen der speziellen Lorentzgruppe:

- (0,0) : skalare Darstellung
- ($\frac{1}{2}$,0) : linke Fundamentaldarstellung
- (0,$\frac{1}{2}$) : rechte Fundamentaldarstellung

Beide Fundamentaldarstellung sind 2-dimensional, wirken also auf 2-komponentige sog. *Weyl-Spinoren*.

Jedes Element aus $\mathcal{L}_+^\uparrow$ hat die Form

$$\begin{aligned} \Lambda &= \exp\left\{-i\left(\vec{\varphi}\cdot\vec{J}+\vec{\nu}\cdot\vec{K}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{-i\left(\vec{\varphi}-i\vec{\nu}\right)\cdot\vec{T}_+\right\}\exp\left\{-i\left(\vec{\varphi}+i\vec{\nu}\right)\cdot\vec{T}_-\right\} \end{aligned}$$

In der linken Fundamentaldarstellung ist $\vec{T}_+ = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ und $\vec{T}_- = 0$, in der rechten Fundamentaldarstellung umgekehrt $\vec{T}_+ = 0$ und $\vec{T}_- = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$.

Transformationen der Spinoren:

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &\longrightarrow \psi'_L(x') = A_L\psi_L(x) \\ &\qquad\qquad \text{linke Fundamentaldarstellung} \\ \psi_R(x) &\longrightarrow \psi'_R(x') = A_R\psi_R(x) \\ &\qquad\qquad \text{rechte Fundementaldarstellung} \end{aligned}$$

Dabei ist

$$A_L := \Lambda^{(0,\frac{1}{2})} = \exp\left\{-\frac{i}{2}\left(\vec{\varphi}-i\vec{\nu}\right)\cdot\vec{\sigma}\right\}$$
$$A_R := \Lambda^{(\frac{1}{2},0)} = \exp\left\{-\frac{i}{2}\left(\vec{\varphi}+i\vec{\nu}\right)\cdot\vec{\sigma}\right\}$$

Wegen $A_L^{-1} = A_R^\dagger$, d.h. $A_L = A_R^{-1\dagger}$ nennt man die Darstellungen auch zueinander konjugiert. Sie sind jedoch nicht äquivalent.

Man schreibt für die Weyl-Spinoren:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{(linke Fundamentaldarstellung)}$$
$$\psi_R = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^{\dot{1}} \\ \bar{\psi}^{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad \text{(rechte Fundamentaldarstellung)}$$

Adjungierte Weyl-Spinoren, Skalarprodukte

Betrachte die folgende Darstellungen für eine Matrix $A \in SL(2,\mathbb{C})$:

- Selbstdarstellung : $D(A) = A$
- duale Selbstdarstellung: $D(A) = A^{-1\,T}$
- konjugierte Darstellung: $D(A) = A^{-1\dagger}$
- duale konjugierte Darstellung : $D(A) = A^*$

Setzt man $A = A_L$, so erkennt man wegen $A_R = A_L^{-1\dagger}$, daß es sich bei der Selbstdarstellung um die linke Fundamentaldarstellung und bei der konjugierten Darstellung um die rechte Fundamentaldarstellung handelt.

Die zwei restlichen Darstellungen:

$$\psi_R'^\dagger = (A_R\psi_R)^\dagger = \psi_R^\dagger A_L^{-1}$$

$$\psi_L'^\dagger = (A_L\psi_L)^\dagger = \psi_L^\dagger A_L^\dagger$$

In der dualen Selbstdarstellung wirken die Transformationen also via A_L^{-1} auf adjungierte rechtshändige Weyl-Spinoren, in der dualen konjugierten Darstellung via $A_L^\dagger$ auf adjungierte linkshändige Weyl-Spinoren.

Man schreibt

$$\psi_R^\dagger = (\psi^1, \psi^2)$$
$$\psi_L^\dagger = (\bar{\psi}_{\dot{1}}, \bar{\psi}_{\dot{2}})$$

für die adjungierten Spinoren.

Zusammenfassend haben wir also

- linke Fundamentaldarstellung: $\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ und $\psi_R^\dagger = (\psi^1, \psi^2)$

- rechte Fundamentaldarstellung: $\psi_R = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^{\dot{1}} \\ \bar{\psi}^{\dot{2}} \end{pmatrix}$ und $\psi_L^\dagger = (\bar{\psi}_{\dot{1}}, \bar{\psi}_{\dot{2}})$

Man zeigt: $\psi_R = -i\sigma^2\psi_L^*$ bzw. $\psi_L = i\sigma^2\psi_R^*$.

Mit ψ_L, $\psi_R^\dagger$, ψ_R und $\psi_L^\dagger$ wie oben und der Definition für die komplexe Konjugation einzelner Spinorkomponenten:

$$(\psi_A)^* := \bar{\psi}_{\dot{A}}$$
$$(\psi^A)^* := \bar{\psi}^{\dot{A}}$$

folgen daraus die folgenden Zusammenhänge für die Spinorkomponenten:

$$\psi^1 = -\psi_2, \psi^2 = \psi_1, \bar{\psi}^{\dot{1}} = -\bar{\psi}_{\dot{2}}, \bar{\psi}^{\dot{2}} = \bar{\psi}_{\dot{1}}$$

Man definiert Skalarprodukte zwischen Weyl-Spinoren wie folgt:

$$(\phi\psi) := \phi^A \psi_A$$
$$(\bar{\phi}\bar{\psi}) := \bar{\phi}_{\dot{A}} \bar{\psi}^{\dot{A}}$$

Es wird dann

$$\begin{aligned} (\psi\psi) = \psi^A \psi_A &= \psi^1 \psi_1 + \psi^2 \psi_2 \\ &= \psi^1 \psi^2 - \psi^2 \psi^1 = 2\psi^1 \psi^2 \end{aligned}$$

$$(\bar{\psi}\bar{\psi}) = \bar{\psi}_{\dot{A}} \bar{\psi}^{\dot{A}} = 2\bar{\psi}^{\dot{2}} \bar{\psi}^{\dot{1}}$$

Solche Skalarprodukte sind invariant unter Lorentztransformationen.

Dirac- und Majorana-Spinoren

Bispinoren in der chiralen Darstellung:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \bar{\chi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}$$

mit ψ_A linkshändig und $\bar{\chi}^{\dot{A}}$ rechtshändig.

Konjugiert-komplexe Form:

$$\bar{\Psi} := \Psi^\dagger \gamma_0 = (\bar{\psi}_{\dot{A}}, \chi^A) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\chi^A, \bar{\psi}_{\dot{A}}) \,.$$

Das Lorentz-Skalar $\bar{\Psi}\Phi$ schreibt sich dann:

$$\bar{\Psi}\Phi = \chi\phi + \bar{\psi}\bar{\lambda},$$

wobei $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \bar{\lambda}^{\dot{A}} \end{pmatrix}$.

Für einen Dirac-Spinor $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}$ ist der konjugierte Spinor gegeben durch
$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0 = \left(\phi_R^\dagger, \psi_L^\dagger\right)$. Es gilt dann also:

$$\bar{\Psi}^T = \begin{pmatrix} \phi_R^* \\ \psi_L^* \end{pmatrix}.$$

Ladungskonjugation :

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \phi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} =: \Psi^C.$$

Es gilt also $\Psi^C = C\bar{\Psi}^T$ mit $C = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}$ der Ladungskonjugationsmatrix.

Ein *Majorana-Spinor* ist definiert via $\Psi = \Psi^C$,

d.h. einen Spinor der Form $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$.

Poincaré-Superalgebra

Graduierung der Poincaré-Algebra

Definition:
Unter einer $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierten Algebra verstehen wir einen Vektorraum L, welcher direkte Summe zweier Untervektorräume ist:

$$L = L_0 \oplus L_1$$

und auf dem ein bilineares Produkt $\circ$ definiert ist mit folgender Eigenschaft:

$$\begin{aligned} L_0 \circ L_0 &\subset L_0 \\ L_0 \circ L_1 &\subset L_1 \\ L_1 \circ L_0 &\subset L_1 \\ L_1 \circ L_1 &\subset L_0 \end{aligned}$$

(Betrachte allgemein $L = L_0 \oplus L_1 \cdots \oplus L_{n-1}$ mit Graduierung $L_i \circ L_j \subset L_k$ mit
$k \equiv i + j \mod n$.)

Eine graduierte *Lie-Algebra* erhält man mit folgender Forderung:

Supersymmetrie: $x_i \circ x_j = (-1)(-1)^{i \cdot j} x_j \circ x_i$

Jacobi-Identität:
$$\begin{aligned} & x_k \circ (x_l \circ x_m)(-1)^{k \cdot m} \\ & + x_l \circ (x_m \circ x_k)(-1)^{l \cdot k} \\ & + x_m \circ (x_k \circ x_l)(-1)^{m \cdot l} = 0 \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Graduierung der Poincaré-Gruppe:

Mit den 10 Generatoren P^μ und $M^{\mu\nu}$ der Poincaré-Gruppe und vier weiteren sog. SUSY-Generatoren Q_a, $a = 1, ..., 4$ konstruiert man nun die graduierte Algebra wie folgt:

- $L_0 \times L_0 \longrightarrow L_0$: Poincaré-Algebra

- $L_0 \times L_1 \longrightarrow L_1$:

$$\begin{aligned} [P^\mu, Q_a] &= 0 \\ [M^{\mu\nu}, Q_a] &= -\Sigma^{\mu\nu}_{ab} Q_b \end{aligned}$$

- $L_1 \times L_1 \longrightarrow L_0$:

$$\{Q_a, Q_b\} = -2 \left(\gamma^\mu C\right)_{ab} P^\mu$$

Dabei ist

$$\Sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} &:= \frac{i}{4} \left(\sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu - \sigma\nu \tilde{\sigma}^\mu\right) \\ \tilde{\sigma}^{\mu\nu} &:= \frac{i}{4} \left(\tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \tilde{\sigma}^\nu \sigma^\mu\right). \end{aligned}$$

wobei

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}) \qquad \text{und} \qquad \tilde{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$$

Mit etwas Magie identifizieren wir Q_a als Majorana-Spinor, d.h. für

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{Q} = Q^\dagger \gamma_0$$

soll gelten:

$$Q = C\bar{Q}^T \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{Q} = Q^T C$$

Zusammenfassend wird die SUSY-Algebra also durch die 14 Generatoren

$$P^\mu, \qquad M^{\mu\nu} \qquad \text{und} \qquad Q_a$$

aufgespannt. Sie genügen folgenden Relationen:

Poincaré-Algebra
$[P^\mu, Q_a] = 0$
$[M^{\mu\nu}, Q_a] = -\Sigma^{\mu\nu}_{ab} Q_b$
$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2\gamma^\mu_{ab} P_\mu$

SUSY-Generatoren als Weyl-Spinoren SUSY-Generatoren nicht als vierkomponentiger Majorana-Spinor, sondern als Paar von Weyl-Spinoren angegeben:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_A \\ \bar{Q}^{\dot{A}} \end{pmatrix}$$

Aus $\left\{Q_a, \bar{Q}_b\right\} = 2\gamma^{\mu}_{ab} P_\mu$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
\left\{Q_A, Q^B\right\} &= \left\{\bar{Q}^{\dot{A}}, \bar{Q}_{\dot{B}}\right\} = 0 \\
\left\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\right\} &= 2\sigma^{\mu}_{A\dot{B}} P_\mu \\
\left\{\bar{Q}_{\dot{A}}, Q^B\right\} &= 2\tilde{\sigma}^{\mu\dot{A}B} P_\mu
\end{aligned}$$

Schreibe die SUSY-Algebra abkürzend wie folgt:

Poincaré-Algebra
$[Q, P^\mu] = [\bar{Q}, P^\mu] = 0$
$[Q, M^{\mu\nu}] = \sigma^{\mu\nu} Q$
$[\bar{Q}, M^{\mu\nu}] = \tilde{\sigma}^{\mu\nu} \bar{Q}$
$\{Q, \bar{Q}\} = 2\sigma_\mu P^\mu$
$\{\bar{Q}, Q\} = 2\tilde{\sigma}_\mu P^\mu$ $\{Q, Q\} = \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0$

Hier sind alle Einträge als Weyl-Spinoren zu sehen, die Indizes wurden hier weggelassen.

Bosonen-Fermionen-Regel

Man definiert den *Witten-Index* :

$$\Delta := \mathrm{Tr}(-1)^{N_F}.$$

Dabei ist N_F der Teilchenzahloperator für Fermionen, sodaß der Operator $(-1)^{N_F}$ den Eigenwert $+1$ besitzt, wenn er auf bosonische Zustände (gerade Zahl von Fermionen) wirkt und den Eigenwert -1 bei fermionischen Zuständen.

Es ist dann klar, daß

$$\Delta = n_b - n_f$$

die Differenz zwischen den Anzahlen der bosonischen und fermionischen Zuständen angibt

Zuletzt sei angemerkt, daß in supersymmetrischen Theorien die Anzahl der fermionischen und bosonischen Freiheitsgrade übereinstimmen, d.h stets $\Delta = 0$ ist.

[**Beweis:**
Es gelten die Operatorgleichungen:

$$(-1)^{N_F} Q = -Q(-1)^{N_F}$$
$$(-1)^{N_F} \bar{Q} = -\bar{Q}(-1)^{N_F}.$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left[(-1)^{N_F} Q\bar{Q}\right] &= -\mathrm{Tr}\left[Q(-1)^{N_F}\bar{Q}\right] \\ &= -\mathrm{Tr}\left[(-1)^{N_F}\bar{Q}Q\right] \end{aligned}$$

also

$$\mathrm{Tr}\left[(-1)^{N_F}\{Q, \bar{Q}\}\right] = 0.$$

Wegen $\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 2\sigma^{\mu}_{A\dot{B}} P_\mu$ folgt dann

$$\mathrm{Tr}\left[(-1)^{N_F} P_\mu\right] = 0.$$

Fixiert man also einen von Null verschiedenen Viererimpuls (der Grundzustand mit $E = 0$ ist also ausgeschlossen), so folgt

$$\Delta = \mathrm{Tr}\left[(-1)^{N_F}\right] = 0,$$

qed.]

Superraum und Superfelder

Die SUSY-Generatoren Q und $\bar{Q}$ wirken als Verschiebungen im Superraum. Diesen erhält man aus der gewöhnlichen 4-dimensionalen Raumzeit durch die Einführung neuer (fermionischer) Dimensionen.

Verschiebungen im Superraum

$$\begin{aligned} \text{Translation:} \quad & \exp\{-ia^\mu P_\mu\} \\ \text{SUSY-Translation:} \quad & \exp\{i(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})\} \end{aligned}$$

Allgemeines Element L der Super-Poincaré-Gruppe:

$$L(a, \omega, \epsilon, \bar{\epsilon}) = \exp\left\{i\left(-a^\mu P_\mu + \epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q} - \tfrac{1}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\right)\right\}$$

mit folgender Verknüpfung:

$$L(a, \epsilon, \bar{\epsilon})L(b, \eta, \bar{\eta}) = L(a + b - i\epsilon\sigma\bar{\eta} + i\eta\sigma\bar{\epsilon}, \epsilon + \eta, \bar{\epsilon} + \bar{\eta}) \qquad (1)$$

Darstellung im Raum der Superfunktionen

Durch (1) wird eine Transformation im Parameterraum induziert:

$$\left(x^\mu,\theta,\bar\theta\right)\longrightarrow\left(x^\mu+\xi^\mu,\theta+\epsilon,\bar\theta+\bar\epsilon\right),$$

mit

$$\xi^\mu=a^\mu-i\epsilon\sigma^\mu\bar\theta+i\theta\sigma^\mu\bar\epsilon.$$

Für Superfunktionen $\Phi(x^\mu,\theta,\bar\theta)$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\Phi\left(x^\mu,\theta,\bar\theta\right) &\longrightarrow \Phi\left(x^\mu+\xi^\mu,\theta+\epsilon,\bar\theta+\bar\epsilon\right)\\ &=: U\Phi\left(x^\mu,\theta,\bar\theta\right)\end{aligned}$$

Mit dem Ansatz

$$U=\exp\left\{i\left(a^\mu\hat P_\mu+\epsilon\hat Q+\bar\epsilon\hat{\bar Q}\right)\right\}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat P_\mu &= -i\partial_\mu\\ i\hat Q &= \frac{\partial}{\partial\theta}-i\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu\\ i\hat{\bar Q} &= \frac{\partial}{\partial\bar\theta}-i\tilde\sigma^\mu\theta\partial_\mu.\end{aligned}$$

Die Komponenten der SUSY-Generatoren lauten dann:

$$
\begin{aligned}
Q_A &= i\left[-\partial_A + i\left(\sigma^\mu\bar{\theta}\right)_A \partial_\mu\right] \\
\bar{Q}^{\dot{A}} &= i\left[-\bar{\partial}^{\dot{A}} + i\left(\tilde{\sigma}^\mu\theta\right)^{\dot{A}} \partial_\mu\right] \\
Q^A &= i\left[\partial^A + i\left(\sigma^\mu\bar{\theta}\right)^A \partial_\mu\right] \\
\bar{Q}_{\dot{A}} &= i\left[\bar{\partial}_{\dot{A}} - i\left(\theta\sigma^\mu\right)_{\dot{A}} \partial_\mu\right]
\end{aligned}
$$

Superfelder

Ein Superfeld $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta})$ kann man wie folgt in eine Potenzreihe in θ und $\bar{\theta}$ entwickeln:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\
&\quad + (\theta\theta)M(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})N(x) \\
&\quad + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) \\
&\quad + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\alpha(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Aus der Forderung, daß $\mathcal{F}$ ein Lorentzskalar sein soll, kann man das Verhalten der Komponentenfelder f, ϕ, $\bar{\chi}$, M, N, A_μ, $\bar{\lambda}$, α und d unter Lorentztransformationen herleiten.

- 4 komplexe skalare Felder:
  $f(x)$, $M(x)$, $N(x)$, $d(x)$

- 2 linkshändige Weyl-Spinorfelder:
  $\phi(x)$, $\alpha(x)$

- 2 rechtshändige Weyl-Spinorfelder:
  $\bar{\chi}(x)$, $\bar{\lambda}(x)$

- 1 komplexes Vektorfeld:
  $A_\mu(x)$

Gesucht ist nun das Verhalten der Komponentenfelder unter SUSY-Transformationen.
Bei einer infinitesimal kleinen Transformation ändert sich $\mathcal{F}$ um

$$\delta_\epsilon \mathcal{F} = \left(\epsilon^A \partial_A + \bar{\epsilon}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} - i\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu\right)\mathcal{F},$$

andererseits gilt natürlich auch

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon \mathcal{F} &= (\delta f) + \theta(\delta\phi) + \bar{\theta}(\delta\bar{\chi}) + (\theta\theta)(\delta M) \\ &\quad + (\bar{\theta}\bar{\theta})(\delta N) + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\delta A_\mu) + (\theta\theta)\bar{\theta}(\delta\bar{\lambda}) \\ &\quad + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta(\delta\alpha) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})(\delta d).\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\delta f &= \epsilon\phi + \bar{\epsilon}\bar{\chi} \\
\delta\phi &= 2\epsilon M + \sigma^{\mu}\bar{\epsilon}(i\partial_{\mu} f + A_{\mu}) \\
\delta\bar{\chi} &= 2\bar{\epsilon}N + \tilde{\sigma}^{\mu}\epsilon(i\partial_{\mu} f - A_{\mu}) \\
\delta M &= \bar{\epsilon}\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\partial_{\mu}(\phi\sigma^{\mu}\bar{\epsilon}) \\
\delta N &= \epsilon\alpha + \frac{i}{2}\partial_{\mu}(\epsilon\sigma^{\mu}\bar{\chi}) \\
\delta A_{\mu} &= \frac{i}{2}\partial^{\nu}(\epsilon\sigma_{\nu}\tilde{\sigma}_{\mu}\phi - \bar{\chi}\tilde{\sigma}_{\mu}\sigma_{\nu}\bar{\epsilon}) + \epsilon\sigma_{\mu}\bar{\lambda} + \alpha\sigma_{\mu}\bar{\epsilon} \\
\delta\bar{\lambda} &= \bar{\epsilon}(2d + \frac{i}{2}\partial^{\mu}A_{\mu}) + i\tilde{\sigma}^{\mu}\epsilon\partial_{\mu}M \\
\delta\alpha &= \epsilon(2d - \frac{i}{2}\partial^{\mu}A_{\mu}) + i\sigma^{\mu}\bar{\epsilon}\partial_{\mu}N \\
\delta d &= \frac{i}{2}\partial_{\mu}(\epsilon\sigma^{\mu}\bar{\lambda} - \alpha\sigma_{\mu}\bar{\epsilon})
\end{aligned}
$$

Definition der kovarianten Ableitung:

$$\begin{aligned} D_A &:= \partial_A + i(\sigma^\mu \bar{\theta})_A \partial_\mu \\ \bar{D}_{\dot{A}} &:= -\bar{\partial}_{\dot{A}} + i(\tilde{\sigma}^\mu \theta)_{\dot{A}} \partial_\mu \end{aligned}$$

Unterscheide damit folgende Superfelder:

- *chirale* Superfelder $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$:
  $\bar{D}_{\dot{A}} \Phi = 0$

- *antichirale* Superfelder $\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})$:
  $D_A \Phi^\dagger = 0$

- *Vektor*-Superfelder $V(x, \theta, \bar{\theta})$:
  $V = V^\dagger$.

Skalare Superfelder bezeichnen sowohl chirale als auch antichirale Superfelder.

Skalare Superfelder

Das allgemeinste chirale Superfeld ist von der Form

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi(y, \theta)$$

mit

$$y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$$

Die Taylorentwicklung dazu lautet:

$$\Phi(y, \theta) = \varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y)$$

Man hat also

- 1 komplexes skalares Feld φ
- 1 linkshändiges Weyl-Spinorfeld ψ
- 1 komplexes skalares Hilfsfeld F

Man benutzt ψ zur Beschreibung von Fermionen (Leptonen oder Quarks), φ stellt die zugehörigen bosonischen Superpartner (Sleptonen oder Squarks) dar.

Wirkung der SUSY-Transformationen auf die Komponentenfelder des chiralen Superfeldes:

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= \sqrt{2}\epsilon\psi \\ \delta\psi &= i\sqrt{2}\sigma^{\mu}\bar{\epsilon}\partial_{\mu}\varphi + \sqrt{2}\epsilon F \\ \delta F &= i\sqrt{2}\bar{\epsilon}\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi.\end{aligned}$$

Bildung neuer Superfelder:

$$\begin{array}{rcrl} \Phi_i \text{ chiral} & \Rightarrow & \Phi_i\Phi_j & \text{chiral} \\ \Phi_i^\dagger \text{ antichiral} & \Rightarrow & \Phi_i^\dagger\Phi_j^\dagger & \text{antichiral} \\ \Phi \text{ chiral} & \Leftrightarrow & \Phi^\dagger & \text{antichiral} \\ \Phi \text{ chiral} & \Rightarrow & \Phi^\dagger\Phi & \text{Vektor-Superfeld} \\ \Phi \text{ chiral} & \Rightarrow & \Phi + \Phi^\dagger & \text{Vektor-Superfeld} \\ \Phi \text{ chiral} & \Rightarrow & i(\Phi - \Phi^\dagger) & \text{Vektor-Superfeld} \end{array}$$

Vektor-Superfelder

Für die Komponentenfelder eines Superfeldes gilt:

$$\begin{array}{ccc} f = f^* & A_\mu = A_\mu^* & d = d^* \\ M = N^* & \phi = \chi & \lambda = \alpha \end{array}$$

Erkläre nun eine Eichtransformation (Φ chiral):

$$V \longrightarrow V' = V + (\Phi + \Phi^\dagger)$$

Die Komponentenfelder des Superfeldes $V = (f, \phi, M, A_\mu, \lambda, d)$ ändern sich dabei wie folgt:

$$\begin{aligned} f' &= f + \varphi + \varphi^* \\ \phi' &= \phi - i\sqrt{2}\psi \\ M' &= M - 2iF \\ A'_\mu &= A_\mu + i\partial_\mu(\varphi - \varphi^*) \\ \lambda' &= \lambda \\ d' &= d \end{aligned}$$

Man erkennt:

- die Felder λ und d sind eichinvariant

- $A_\mu \longrightarrow A_\mu - 2\partial_\mu \Lambda \qquad$ für $\Lambda = \mathrm{Im}\ \varphi$

Die Wess-Zumino-Eichung

Wähle bei der Eichtransformation des Vektor-Superfeldes $\Phi = (\varphi, \psi, F)$ so, daß V' die Komponenten f, ϕ und M nicht mehr enthält.

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Re}\ \varphi = \varphi + \varphi^* &= -f \\ \psi &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\phi \\ F &= -\frac{i}{2}M \end{aligned}$$

Die Entwicklung von V' in Wess-Zumino-Eichung lautet:

$$\begin{aligned} V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) &= (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu + i(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\lambda}) \\ &\quad -i(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\lambda) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d \end{aligned}$$

Supersymmetrische Lagrange-Dichten

Für ein allgemeines Superfeld gilt:

$$\delta d = \frac{i}{2}\partial_\mu(\epsilon\sigma^\mu\bar{\lambda} - \alpha\sigma^\mu\bar{\epsilon}),$$

für ein skalares Superfeld gilt:

$$\delta F = i\sqrt{2}\partial_\mu(\bar{\epsilon}\tilde{\sigma}^\mu\psi)$$

Damit ist eine mögliche supersymmetrische Lagrangedichte gegeben durch:

$$\mathcal{L} = (\text{Superfelder})\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + (\text{chirale Superfelder})\,|_{\theta\theta}$$

Das Wess-Zumino-Modell

Lagrangedichte des Wess-Zumino-Modells:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;&:=\; \Phi^\dagger(x,\theta,\bar{\theta})\Phi(x,\theta,\bar{\theta})\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\
&-\; \frac{m}{2}\Phi^2(y,\theta)\,|_{\theta\theta} + HC \\
&-\; \frac{g}{3}\Phi^3(y,\theta)\,|_{\theta\theta} + HC
\end{aligned}$$

In Komponentenfeldern lautet dann die off-shell-Lagrangedichte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) \\ &+ \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) + g(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi}) \\ &+ F^*F - (m\varphi + g\varphi^2)F - (m\varphi^* + g\varphi^{*\,2})F^*\end{aligned}$$

Aus der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^*} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu F^*)} = 0$$

ergibt sich

$$F = m\varphi^* + g\varphi^{*\,2}.$$

Daraus ergibt sich die on-shell-Lagrangedichte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - m^2\left|\varphi\right|^2 \\ &- \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) + \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) \\ &+ g(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi}) - mg\left|\varphi\right|^2(\varphi + \varphi^*) - g^2\left|\varphi\right|^4\end{aligned}$$

Eine andere Formulierung erhält man mit

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(A - iB)$$

und folgendem Majorana-Spinor:

$$\Psi := \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\Psi} = (\psi, \bar{\psi}),$$

sowie

$$G := \frac{g}{\sqrt{2}}.$$

Damit lautet die Lagrange-Dichte wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) - m^2 A^2\right] \\
& + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu B)(\partial^\mu B) - m^2 B^2\right] \\
& - \frac{1}{2}\bar{\Psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\Psi \\
& + G\bar{\Psi}\left(A + i\gamma_5 B\right)\bar{\Psi} \\
& - mGA\left(A^2 + B^2\right) - \frac{G^2}{2}\left(A^2 + B^2\right)^2
\end{aligned}$$

Für Raumspiegelungen gilt:

$$\Psi \longrightarrow P\Psi = \gamma^0 \Psi$$

und

$$\bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Psi}\gamma^0$$

Fordert man Invarianz unter Raumspiegelungen, so muß A ein Skalar und B ein Pseudoskalar sein. Das Wess-Zumino-Modell enthält also das folgende *chirale Supermultiplett*:

- 1 reelles skalares Feld $A(x)$, $A = A^*$
- 1 reelles pseudoskalares Feld $B(x)$, $B = B^*$
- 1 Majorana-Spinorfeld $\Psi(x)$, $\Psi = C\bar{\Psi}^T$.

Das freie Wess-Zumino-Modell ($G = 0$) lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) - m^2 A^2\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu B)(\partial^\mu B) - m^2 B^2\right] \\ &\quad - \frac{1}{2}\bar{\Psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\Psi, \end{aligned}$$

die zugehörigen Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} (\Box + m^2)A &= 0 \quad \text{(Klein-Gordom)} \\ (\Box + m^2)B &= 0 \quad \text{(Klein-Gordon)} \\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi &= 0 \quad \text{(Dirac)} \\ \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial} + m) &= 0 \quad \text{(Dirac)} \end{aligned}$$

Die SUSY-Transformationen mit dem Majorana-Spinor $\eta = \begin{pmatrix} \epsilon \\ \bar{\epsilon} \end{pmatrix}$ als Parameter lauten:

$$\begin{aligned} \delta A &= \bar{\eta}\Psi \\ \delta B &= i\bar{\eta}\gamma_5\Psi \\ \delta\Psi &= (i\gamma_\mu\partial^\mu)(A - i\gamma_5 B)\eta \end{aligned}$$

Lagrange-Dichten für Vektor-Superfelder

Die supersymmetrische Feldstärke eines Vektor-Superfeldes $V(x, \theta, \bar{\theta})$ ist:

$$\begin{aligned} W_A &:= -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A V(x,\theta,\bar{\theta}) \\ \bar{W}_{\dot{A}} &:= -\frac{1}{4}(DD)\bar{D}_{\dot{A}} V(x,\theta,\bar{\theta}) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\bar{D}_{\dot{A}} W_A = 0$$

und

$$D_A \bar{W}_{\dot{A}} = 0,$$

so daß W_A ein chirales Superfeld ist, $\bar{W}_{\dot{A}}$ ein antichirales. Außerdem ist die Feldstärke eichinvariant.

Vektor-Superfeld in Wess-Zumino-Eichung:

$$V_{WZ}(x,\theta,\bar\theta) = V_{WZ}(y - i\theta\sigma\bar\theta,\theta,\bar\theta)$$
$$= \ (\theta\sigma^\mu\bar\theta)A_\mu(y) - i(\theta\sigma^\mu\bar\theta)(\theta\sigma^\nu\bar\theta)\partial_\nu A_\mu(y)$$
$$+i(\theta\theta)\bar\theta\bar\lambda(y) - i(\bar\theta\bar\theta)\theta\lambda(y) + (\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)d(y)$$

Nach einigen Rechnungen ergibt sich:

$$W_A = i\lambda_A - 2\theta_A d - (\sigma^{\mu\nu}\theta)_A F_{\mu\nu} - (\theta\theta)(\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda)_A$$

Folgende Lagrangedichte läßt sich daraus konstruieren:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}W^A W_A\,|_{\theta\theta} + HC,$$

oder in Komponentenschreibweise:

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2}\left(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda + \bar\lambda\tilde\sigma^\mu\partial_\mu\lambda\right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2d^2$$

Was bisher geschah

- Spinoren, Notation

- SUSY-Algebra

- Darstellung der SUSY-Algebra im Raum der Superfelder

- Skalare und Vektor-Superfelder

- supersymmetrische Lagrange-Dichten

  $\mathcal{L} = (\text{Superfelder})_D + (\text{chirale Superfelder})_F$

- Eichfelder: $\mathcal{L} = \frac{1}{4}\left(W^A W_A\right)_F + HC$

- WESS-ZUMINO-Modell

$N = 1$-SUSY-Yang-Mills-Theorie

Ziel: Konstruiere nichtabelsche Eichtheorie, die unter SUSY-Transformationen invariant ist.

dazu: kurze Wiederholung der

herkömmlichen Eichtheorie

Abelscher Fall: Lagrange-Dichte des freien Dirac-Elektrons:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x)\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\Psi(x)$$

ist nicht invariant unter

$$\begin{aligned}\Psi(x) &\longrightarrow \Psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\Psi(x)\\ \bar{\Psi}(x) &\longrightarrow \bar{\Psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\bar{\Psi}(x)\end{aligned}$$

Daher: kovariante Ableitung: $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ mit Eichfeld $A_\mu(x)$.

Ergibt neue Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Nicht-Abelscher Fall $SU(2)$

Darstellungsraum:
Spinoren der Form $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$

mit Eichtransformation:

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = e^{-\frac{i}{2}\theta_a \sigma_a} \Psi(x)$$

Auch hier:
kovariante Ableitung: $D_\mu = \left(\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}\right)$

Man verlangt:

$$D_\mu \Psi \longrightarrow e^{-\frac{i}{2}\theta_a \sigma_a} D_\mu \Psi$$

und gewinnt das Transformationsverhalten von A_μ

Feldstärketensor: $F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\epsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k$
Für ihn gilt:

$$\sigma^i F_{\mu\nu}^i \longrightarrow U(\theta)(\sigma^i F_{\mu\nu}^i) U^{-1}(\theta)$$

Somit:

$$
\begin{aligned}
& Tr\left\{\left(\sigma^i F^i_{\mu\nu}\right)\left(\sigma^i F^{\mu\nu i}\right)\right\} \\
\longrightarrow \quad & Tr\left\{U(\theta)\left(\sigma^i F^i_{\mu\nu}\right)\left(\sigma^i F^{\mu\nu i}\right)U(\theta)^{-1}\right\} \\
& = Tr\left\{\left(\sigma^i F^i_{\mu\nu}\right)\left(\sigma^i F^{\mu\nu i}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

Mit $Tr\{\sigma^i\sigma^j\} = 2\delta_{ij}$ folgt

$$
Tr\left\{\left(\sigma^i F^i_{\mu\nu}\right)\left(\sigma^i F^{\mu\nu i}\right)\right\} = 2F^i_{\mu\nu}F^{\mu\nu i},
$$

so daß

$$
\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{\mu\nu i} + \bar{\Psi}i\gamma^\mu D_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi
$$

invariant unter den Eichtransformationen

$$
\begin{aligned}
\Psi(x) \quad &\longrightarrow \quad e^{-\frac{i}{2}\theta_a\sigma_a}\Psi(x) \\
\frac{1}{2}\sigma^i A^i_\mu \quad &\longrightarrow \quad U(\theta)\frac{1}{2}\sigma^i A^i_\mu U(\theta)^{-1} - \frac{i}{g}[\partial_\mu U(\theta)]U(\theta)^{-1}
\end{aligned}
$$

wird.

Supersymmetrische Eichtheorie

Abelscher Fall

Chirales Superfeld Φ und Eichtrafo:

$$\begin{aligned} \Phi(x,\theta,\bar\theta) &\longrightarrow e^{-iq\Lambda(x,\theta,\bar\theta)}\Phi(x,\theta,\bar\theta) \\ \Phi^\dagger(x,\theta,\bar\theta) &\longrightarrow \Phi^\dagger(x,\theta,\bar\theta)e^{iq\Lambda^\dagger(x,\theta,\bar\theta)}, \end{aligned}$$

wobei Λ chiral, d.h. $\bar D_{\dot A}\Lambda(x) = 0$.

Problem:

$$(\Phi^\dagger\Phi)_D \longrightarrow \left(\Phi^\dagger e^{iq(\Lambda^\dagger-\Lambda)}\Phi\right)_D$$

Also: Vektor-Superfeld $V(x,\theta,\bar\theta)$ mit

$$V(x,\theta,\bar\theta) \longrightarrow V(x,\theta,\bar\theta)+i\left[\Lambda(x,\theta,\bar\theta) - \Lambda^\dagger(x,\theta,\bar\theta)\right]$$

als Eichfeld einführen.

Analog zu $\bar\Psi\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\Psi$ verwende

$$\left(\Phi^\dagger e^{qV}\Phi\right)_D$$

Mit den Zerlegungen:

$$\begin{aligned} V &= (f, \phi, M, A_\mu, \bar{\lambda}, d) \\ \Phi &= (\varphi, \psi, F) \end{aligned}$$

bekommt man:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + i\partial_\mu(\varphi - \varphi^*)$$

Außerdem: $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ eichinvariant

In Komponentenfeldern:

$$\begin{aligned} \left(\Phi^\dagger e^{qV}\Phi\right)_D &= (D_\mu\varphi)^*(D^\mu\varphi) \\ &\quad -\frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu D_\mu\psi + \psi\sigma^\mu D_\mu^*\bar{\psi}) \\ &\quad +F^*F + \frac{i}{\sqrt{2}}q[\varphi^*(\psi\lambda) - \varphi(\bar{\psi}\bar{\lambda})] \\ &\quad +qd\varphi^*\varphi, \end{aligned}$$

wobei D_μ kovariante Ableitung :

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2}qA_\mu$$

Zu V gehört *eichinvariante* Feldstärke

$$W_A = -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A V(x,\theta,\bar{\theta})$$

V in die Dynamik mit einbinden:

$$\frac{1}{4}(W^A W_A)_F + HC$$

zur Lagrange-Dichte hinzufügen.

In Komponenten:

$$-\frac{i}{2}\left(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \bar{\lambda}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda)\right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2d^2$$

beachte: bisher alle Felder masselos
$\rightsquigarrow$ Masseterm

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m &= m^2\left(V_{WZ}^2\right)_D \\ &= \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu\end{aligned}$$

aber: dieser zerstört Eichinvarianz

Adjungierte Darstellung

Standarddarstellung:

$$\phi \longrightarrow e^{-i\theta^a T^a}\phi \equiv U\phi,$$

Zugehörige kovariante Ableitung ist:

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - igA_\mu^a T^a\right)\phi$$

dann gilt

$$D_\mu \phi \longrightarrow U D_\mu \phi$$

Adjungierte Darstellung:

$$\phi \longrightarrow e^{-i\theta^a T^a}\phi e^{i\theta^a T^a}$$

kovariante Ableitung:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ig[A_\mu, \phi]$$

Mit

$$A_\mu \longrightarrow U A_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}[\partial_\mu U]U^{-1}$$

ist dann

$$D_\mu \phi \longrightarrow U(D_\mu \phi)U^{-1}$$

Nicht-Abelscher Fall

1974 SALAM, STRATHDEE: Yang-Mills-Theorie mit Yang-Mills-Eichfeld und Majorana-Spinor eich- und SUSY-invariant, falls Fermion in adjungierter Darstellung

Materie-Feld in Standarddarstellung:

$$\begin{aligned}\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) &\longrightarrow e^{-i\Lambda(x,\theta,\bar{\theta})}\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) \\ \Phi^{\dagger}(x,\theta,\bar{\theta}) &\longrightarrow \Phi^{\dagger}(x,\theta,\bar{\theta})e^{i\Lambda^{\dagger}(x,\theta,\bar{\theta})}\end{aligned}$$

mit $\Lambda = \Lambda^a T^a$ Matrix.

$\Phi^{\dagger} e^V \Phi$ weiterhin eichinvariant, falls

$$e^V \longrightarrow e^{-i\Lambda^{\dagger}} e^V e^{i\Lambda}$$

Feldstärketensor verallgemeinern zu:

$$W_A = -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})e^{-V} D_A e^V$$

W_A transformiert sich gemäß

$$W_A \longrightarrow e^{-i\Lambda} W_A e^{i\Lambda}$$

Man sieht, daß

$$\begin{array}{rc} & Tr\{(W^{Aa}T^a)(W_A^a T^a)\} \\ \longrightarrow & Tr\left\{e^{-i\Lambda}(W^{Aa}T^a)(W_A^a T^a)e^{i\Lambda}\right\} \\ = & Tr\{(W^{Aa}T^a)(W_A^a T^a)\} \\ \sim & W^{Aa}W_A^a \end{array}$$

eichinvariant ist.
Somit auch:

$$\mathcal{L}_E := Tr\{(W^A W_A)_F\} + HC$$

Daraus:
Allgemeinste supersymmetrische renormierbare Wirkung:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L} & = & \frac{1}{4g^2} Tr\left\{(W^A W_A)_F + (\bar{W}_{\dot{A}}\bar{W}^{\dot{A}})_F\right\} \\ & + & \left(\Phi^\dagger e^V \Phi\right)_D \\ & + & \left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)_F + HC \end{array}$$

Hier nur Eichanteil $\mathcal{L}_E$ betrachten, und zwar in WZ-Eichung (Minkowski):

$$\mathcal{L}_E = -\frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} + \frac{i}{2g^2} \bar{\lambda}^a \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a - \frac{1}{2} D^a D^a.$$

Dabei Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \\ \mathcal{D}_\mu \lambda^a &= \partial_\mu \lambda^a + i[A_\mu, \lambda]^a \end{aligned}$$

Nach Reskalierung

$$A \to gA$$

und mit der Bewegungsgleichung

$$D = 0$$

verbleibt man mit (Euklidisch)

$$S_{\mathsf{SYM}} = \int d^4x \Big\{ \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a \Big\}$$

Diese ist invariant unter SUSY-Transformationen:

$$\begin{aligned} \delta A^a_\mu &= 2i\bar{\epsilon}\gamma_\mu \lambda^a(x) \\ \delta \lambda^a &= -\sigma_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}(x)\epsilon \\ \delta \bar{\lambda}^a &= \bar{\epsilon}\sigma_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}(x) \end{aligned}$$

SUSY auf dem Gitter

Gittereichfelder

betrachte Gitter: $\Lambda = (a\mathbb{Z})^4 = \{x \mid x_\mu \in a\mathbb{Z}\}$

Eichtransformation: $\phi(x) \longrightarrow \Lambda(x)^{-1}\phi(x)$

Skalarprodukt: $(f,g) := \sum_x a^4 f(x) \cdot g(x)$

diskretisierte Ableitungsoperatoren:

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^f f(x) &:= \frac{1}{a}(f(x+a\hat{\mu}) - f(x)) \\ \Delta_\mu^b f(x) &:= \frac{1}{a}(f(x) - f(x-a\hat{\mu})), \end{aligned}$$

typischer kinetischer Term:

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_x a^4 \Delta_\mu^f \phi(x) \cdot \Delta_\mu^f \phi(x) \\ = \; & -\textstyle\sum_{<xy>} a^2 \phi(x) \cdot \phi(y) + 4 \sum_x a^2 \phi(x) \cdot \phi(x) \end{aligned}$$

Eichinvarianz $\rightsquigarrow$ Paralleltransporter mit

$$U(y,x) \longrightarrow \Lambda(y)^{-1} U(y,x) \Lambda(x)$$

benutze dann

$$-a^2 \sum_{<xy>} \phi(x) \cdot U(x,y)\phi(y) + 4a^2 \sum_x \phi(x)^2.$$

gesucht: Term, der für $a \longrightarrow 0$ Eichanteil reproduziert.

WILSON: Plaquetten:

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(x) \; &:= \; U(x, x + a\widehat{\nu})U(x + a\widehat{\nu}, x + a\widehat{\mu} + a\widehat{\nu}) \\ &\quad\; U(x + a\widehat{\mu} + a\widehat{\nu}, x + a\widehat{\mu})U(x + a\widehat{\mu}, x) \end{aligned}$$

sowie

$$S[U] = -\beta \sum_p \left\{ \frac{1}{4}(Tr\, U + Tr\, U^{-1}) - 1 \right\}$$

Im Kontinuumslimes:

$$S[U] = -\frac{\beta}{4N} \sum_x a^4 Tr \left\{ F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \right\} + \mathcal{O}(a^5)$$

Also: Wähle β geeignet und alles wird gut.

Fermionen auf dem Gitter

NIELSEN-NINOMIYA-Theorem:

- fermionische Wirkung naiv diskretisieren
- einige (milde) Voraussetzungen sind erfüllt

$\Rightarrow$ Fermionen-Doppler im Kontinuumslimes

Grund:
Inverser Propagator hat mehrere Nullstellen in Brillouin-Zone.

Abhilfe:
Gebe den Dopplern eine zusätzliche Masse $\sim \frac{r}{a}$
d.h. addiere geeignete Terme $\sim r$ zur Lagrange-Dichte. (r WILSON-Parameter)

$N = 1$-S-Y-M-Gitterwirkung

Standarddarstellung:

$$\phi(x) \cdot U(x,y)\phi(y)$$

eichinvariant (s.o.)

Adjungierte Darstellung ?
Wissen:

$$\begin{aligned} U(x,y) &\longrightarrow \Lambda(x)^{-1}U(x,y)\Lambda(y) \\ \phi(x) &\longrightarrow \Lambda(x)^{-1}\phi(x)\Lambda(x), \end{aligned}$$

daher ist

$$Tr\left\{\phi(x)^\dagger U(y,x)^\dagger \phi(y) U(y,x)\right\}$$

eichinvariant.

Eine mögliche Fermion-Wirkung:

$$\begin{aligned} S_F &= \sum_x \Big\{ \frac{1}{2a} Tr \sum_{\mu=1}^{4} \Big[\\ & \bar{\lambda}(x)(\gamma_\mu - r)U_\mu^\dagger(x)\lambda(x + a\hat{\mu})U_\mu(x) \\ & -\bar{\lambda}(x + a\hat{\mu})(\gamma_\mu + r)U_\mu(x)\lambda(x)U_\mu^\dagger(x)\Big] \\ & + \left(M_0 + \frac{4r}{a}\right) Tr\Big(\bar{\lambda}(x)\lambda(x)\Big)\Big\} \end{aligned}$$

Damit ist die Wirkung schließlich gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
S \;=\; & \frac{1}{a^4}\frac{1}{g^2}\sum_x \sum_{1\le\mu<\nu\le 4}\Big[1-\frac{1}{4}Tr\Big(U_{\mu\nu}(x)+U^\dagger_{\mu\nu}(x)\Big)\Big] \\
& +\sum_x\Big\{\frac{1}{2a}Tr\sum_{\mu=1}^{4}\Big[\\
& \bar\lambda(x)(\gamma_\mu - r)U^\dagger_\mu(x)\lambda(x+a\hat\mu)U_\mu(x) \\
& -\bar\lambda(x+a\hat\mu)(\gamma_\mu + r)U_\mu(x)\lambda(x)U^\dagger_\mu(x)\Big] \\
& +\left(M_0+\frac{4r}{a}\right)Tr\Big(\bar\lambda(x)\lambda(x)\Big)\Big\}
\end{aligned}
$$