Die t'Hooft - Weinberg - Gleichung und logarithmische Korrekturen zu Vertices der QCD

Andreas Wielenberg

Forschungsseminar Quantenfeldtheorie

21.11.2000

1 Kurzer Abriss der QCD

Die QCD ist eine nichtabelsche minimale Eichtheorie mit Symmetriegruppe SU(3). Die eichkovariante Ableitung lautet:

$$D_\mu = \partial_\mu - gT^a A^a_\mu \tag{1}$$

Die Lagrangedichte der QCD ist

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_{EF} + \mathcal{L}_G \tag{2}$$

mit freier Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_F = \sum_f \bar{\Psi}^i_f (\gamma^\mu (D_\mu)^{ij} - m_f \delta^{ij}) \Psi^j_f, \tag{3}$$

Selbstwechselwirkung des Eichfeldes

$$\mathcal{L}_E = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\,\mu\nu} \tag{4}$$

und

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A\nu^c, \tag{5}$$

Eichfixierungsterm

$$\mathcal{L}_{EF} = -\frac{1}{2\xi} \sum_a (\partial_\mu A^a_\mu)^2 \tag{6}$$

und Geister- oder Fadeev-Popov-Term

$$\mathcal{L}_{FP} = (\partial_\mu \bar{c}^a) D^{ab}_\mu c^b. \tag{7}$$

Hierbei sind die Geister-Felder grassmannwertig.
Transformiert man diese Wirkung nun in den Impulsraum, so ergeben sich die Feynmanregeln ganz natürlich als Koeffizienten der niedrigsten Funktionalableiteungen des erzeugenden Funktionals.

Das zugehörige erzeugende Funktional lautet

$$\begin{aligned} Z[J, \bar{J}_c, J_{\bar{c}}, \eta, \bar{\eta}] &= N \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \Big\{ - \int d^4x\, \mathcal{L} \\ &\quad + AJ + \bar{c} J_{\bar{c}} + \bar{J}_c c + \bar{\Psi}\eta + \bar{\eta}\Psi \Big\} \end{aligned} \tag{8}$$

mit

$$N^{-1} = Z[0,0,0,0]. \tag{9}$$

Das erzeugende Funktional der zusammenhängenden Greenschen Funktionen lautet

$$W_E = \ln Z_E \tag{10}$$

und das erzeugende Funktional der (amputierten) Vertexfunktionen

$$\Gamma_E(A,\bar{\Psi},\Psi,\bar{c},c) = W_E + AJ + \bar{c}J_{\bar{c}} + \bar{J}_c c + \bar{\Psi}\eta + \bar{\eta}\Psi. \tag{11}$$

Eine wichtige Grösse der QCD ist die renormierungsgruppeninvariante Massenskala

$$\Lambda(g(\nu),\nu) = \nu^2 \exp\left\{-\frac{1}{\beta_0}\left[\frac{4\pi}{g(\nu)}\right]^2 (1+O(g^2))\right\}. \tag{12}$$

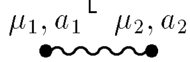
Die Basis - Vertices der perturbativen QCD

- Der Fermion-Propagator:

$$S_f^{ij}(\vec{p}) = \delta^{ij}\frac{1}{\not{p}+m_f} = \tag{13}$$

- Der Gluon-Propagator:

$$\begin{aligned} D^{\mu_1\mu_2}_{a_1a_2}(\vec{p}) &= \delta_{a_1a_2}\left[\delta^{\mu_1\mu_2} - (1-\xi)\frac{p^{\mu_1}p^{\mu_2}}{p^2}\right]\frac{1}{p^2} \\ &= \end{aligned} \tag{14}$$

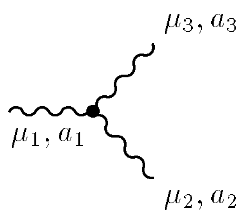


- Der Geist-Propagator:

$$\tilde{D}_{a_1a_2}(\vec{p}) = \delta^{a_1a_2}\frac{1}{p^2} = \tag{15}$$

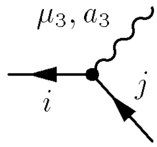
- Der 3-Gluon-Vertex:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\ \mu_1\mu_2\mu_3}_{3V\ a_1a_2a_3}(p_1,p_2,p_3) &= if_{a_1a_2a_3}(\delta^{\mu_1\mu_2}(p_1-p_2)^{\mu_3} + \delta^{\mu_2\mu_3}(p_2-p_3)^{\mu_1} \\ &\quad +\delta_{\mu_3\mu_1}(p_3-p_1)^{\mu_2}) \\ &= \end{aligned} \tag{16}$$



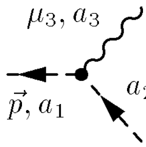
- Der Fermion-Gluon-Vertex

$$\bar{\Gamma}^{\,ij\;\mu_3}_{F\bar{F}V,\,a_3} = T^{a_3}_{ij}\gamma^{\mu}_{3} = \tag{17}$$



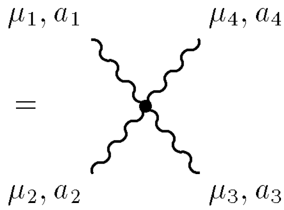
- Der Geist-Gluon-Vertex

$$\tilde{\Gamma}^{\;\;\mu_3}_{G\bar{G}V\;a_1a_2a_3}(\vec{p}) = i f_{a_1a_2a_3} p^{\mu_3} = \tag{18}$$



- Der 4-Gluon-Vertex

$$\begin{aligned}\Gamma^{\;\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}_{4V\;a_1a_2a_3a_4} \quad = \quad & f_{a_1a_2,a_3a_4}(\delta^{\mu_1\mu_4}\delta^{\mu_2\mu_3} - \delta^{\mu_1\mu_3}\delta^{\mu_2\mu_4}) \\ & + f_{a_1a_3,a_4a_2}(\delta^{\mu_1\mu_2}\delta^{\mu_3\mu_4} - \delta^{\mu_1\mu_4}\delta^{\mu_2\mu_3}) \\ & + f_{a_1a_4,a_2a_3}(\delta^{\mu_1\mu_3}\delta^{\mu_2\mu_4} - \delta^{\mu_1\mu_2}\delta^{\mu_3\mu_4}) \\ = & \end{aligned}$$



(19)

Nicht - perturbativ erweiterte Ansätze Für die vollen Propagatoren macht man die folgenden Ansätze:

- Gluonpropagator

$$D^{r,0}_{T}(p^2) = \delta^{ab} t^{\mu\nu}(\vec{p}) \frac{\prod_{s=1}^{r}(p^2 + u_{r,2s}\Lambda^2)}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2}(p^2 + u_{r,s+}\Lambda^2)(p^2 + u_{r,s-}\Lambda^2)} \tag{20}$$

- Geistpropagator

$$\tilde{D}^{r,0}(p^2) = \delta^{ab} \frac{\prod_{s=1}^{r}(p^2 + v_{r,2s}\Lambda^2)}{p^2 \prod_{s=1}^{r}(p^2 + v_{r,2s-1}\Lambda^2)} \tag{21}$$

- Fermion - Propagator

$$S_f^{r,0}(\not p) = \delta^{ij} \frac{\prod_{s=1}^{r} (\not p + \kappa_{r,2s}^{(f)})}{\prod_{s=1}^{(r+1)/2} (\not p + \kappa_{r,s+}^{(f)})(\not p + \kappa_{r,s-}^{(f)})} \tag{22}$$

- Γ_3 - Vertex

$$\Gamma_3(p_1,p_2,p_3) \sim \frac{N_3(p_1^2,p_2^2,p_3^2)}{\prod_{s=1}^{r}(p_1^2+u_{r,2s}\Lambda^2)\prod_{s=1}^{r}(p_2^2+u_{r,2s}\Lambda^2)\prod_{s=1}^{r}(p_3^2+u_{r,2s}\Lambda^2)} \tag{23}$$

- $\tilde{\Gamma}_3$ - Vertex

$$\tilde{\Gamma}_3(p_1,p_2,p_3) \sim \frac{\tilde{N}_3(p_1^2,p_2^2,p_3^2)}{\prod_{s=1}^{r}(p_1^2+v_{r,2s}\Lambda^2)\prod_{s=1}^{r}(p_2^2+v_{r,2s}\Lambda^2)\prod_{s=1}^{r}(p_3^2+u_{r,2s}\Lambda^2)} \tag{24}$$

- $\bar{\Gamma}_3$ - Vertex

$$\bar{\Gamma}_3(-p_1,p_2,p_3) \sim \frac{1}{\prod_{s=1}^{r}(\not p_1+\kappa_{r,2s}^{(f)})} \frac{\bar{N}_3^{\mu}(\not p_1,\not p_2,p_3^2)}{\prod_{s=1}^{r}(p_3^2+u_{r,2s}\Lambda^2)} \frac{1}{\prod_{s=1}^{r}(\not p_2+\kappa_{r,2s}^{(f)})} \tag{25}$$

2 Herleitung der t'Hooft - Weinberg - Gleichung

Zunächst notieren wir folgende Eigenschaft der amputierten Vertexfunktion $\Gamma^{\{(n)\}}$ mit

$$\{n\} = n_G + n_{FP} + n_F \tag{26}$$

bezüglich ihrer Massendimension:

$$\dim \Gamma^{\{(n)\}}(\{p\}) = M^{D - d_G n_G - d_{FP} n_{FP} - d_F n_F} = M^{d_\Gamma}. \tag{27}$$

Für die renormierten Vertexfunktionen gilt:

$$\Gamma_R^{(\{n\})}(\{p\}, g_R, \alpha_R, \{m_R\}; \mu) = \lim_{\epsilon \to 0} Z_\Gamma^{(\{n\})}(\mu, \epsilon) \Gamma_0(\{p\}, g_0, \alpha_0, \{m_0\}, \epsilon) \tag{28}$$

mit

$$Z_\Gamma = (Z_3)^{-n_G/2} \left(\tilde{Z}_{3FP}\right)^{-n_{FP}/2} (Z_{2F})^{-n_F/2}. \tag{29}$$

Weil die nackten Vertexfunktionen unabhängig von μ sind, folgt

$$\begin{aligned} & \mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_0^{(\{n\})} = 0 \\ \Rightarrow \quad & \left[\mu \partial_\mu + \mu \frac{\partial g_R}{\partial \mu} \partial_{g_R} + \sum \mu \frac{\partial m_{i,R}}{\partial \mu} \partial_{m_{i,R}} + \mu \frac{\partial \alpha_R}{\partial \mu} \partial_{\alpha_R} - \frac{dZ_\Gamma}{d\mu} \frac{\mu}{Z_\Gamma} \right] \\ & \times \Gamma_R^{(\{n\})}(\{p\}, g_R, \alpha_R, \{m_R\}; \mu) = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Wir benutzen folgende Konventionen:

$$\beta(g_R, \alpha_R) = \mu \frac{\partial g_R}{\partial \mu}\bigg|_{g,\{m\},\alpha} \tag{31}$$

$$\gamma_{m,i}(g_R, \alpha_R) = -\frac{\mu}{m_{i,R}} \frac{\partial m_{i,R}}{\partial \mu}\bigg|_{g,\{m\},\alpha} = \frac{\mu}{Z_{m_i}} \frac{\partial Z_{m_i}}{\partial \mu}\bigg|_{g,\{m\},\alpha} \tag{32}$$

$$\delta(g_R, \alpha_R) = \mu \frac{\partial \alpha_R}{\partial \mu}\bigg|_{g,\{m\},\alpha} = -2\alpha_R \gamma_G(g_R, \alpha_R) \tag{33}$$

$$\gamma_G(g_R, \alpha_R) = \frac{\mu}{2Z_3} \frac{\partial Z_3}{\partial \mu}\bigg|_{g,\{m\},\alpha} \tag{34}$$

$$\tilde{\gamma}_{FP}(g_R, \alpha_R) = \frac{\mu}{2\tilde{Z}_{3FP}} \frac{\partial \tilde{Z}_3 FP}{\partial \mu}\bigg|_{g,\{m\},\alpha} \tag{35}$$

$$\bar{\gamma}_F(g_R, \alpha_R) = \frac{\mu}{2Z_{2F}} \frac{\partial Z_{2F}}{\partial \mu}\bigg|_{g,\{m\},\alpha}. \tag{36}$$

Damit können wir Gleichung 30 schreiben als:

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g_R)\frac{\partial}{\partial g_R} - \sum \gamma_{m_{i,R}}(g_R)\frac{\partial}{\partial m_{i,R}} + \delta(g_R)\frac{\partial}{\partial \alpha_R} - n_{FP}\tilde{\gamma}_{FP}(g_R)\right.$$
$$\left. -n_G\gamma_G(g_R) - n_F\bar{\gamma}_F(g_R)\right]\Gamma^{(\{n\})}(\{p\}g_R, \alpha_R, \{m_R\}, \mu) = 0. \tag{37}$$

Man beachte hierbei den Faktor $\frac{1}{2}$ in den Definitionen der anomalen Dimensionen der Felder. Diese Gleichung ist die t'Hooft - Weinberg - Gleichung der QCD.

Die dimensionelle Analyse von Γ_R liefert ausserdem:

$$\Gamma_R^{(\{n\})}(\{p\}, g_R, \alpha_R, \{m\}; \mu) = \mu^{d_\Gamma}\Psi\left(\frac{\{p\}}{\mu}, g_R, \alpha_R, \frac{\{m\}}{\mu}\right). \tag{38}$$

Damit zeigt man für das Skalenverhalten:

$$\begin{aligned}\Gamma_R^{(\{n\})}(\lambda\{p\}, \ldots) &= \mu^{d_\Gamma}\Psi\left(\frac{\lambda\{p\}}{\mu}, g_R, \alpha_R, \frac{\{m\}}{\mu}\right)\\ &= \lambda^{d_\Gamma}\left[\frac{\mu}{\lambda}\right]^{d_\Gamma}\Psi\left(\frac{\{p\}}{\frac{\mu}{\lambda}}, g_R, \alpha_R, \frac{\{m\}}{\mu}\right)\\ &= \lambda^{d_\Gamma}\Gamma_R\left(\{p\}, g_R, \alpha_R, \frac{\{m\}}{\lambda}; \frac{\mu}{\lambda}\right).\end{aligned} \tag{39}$$

Daraus ergibt sich sofort eine weitere DGL für Γ_R:

$$\left[\lambda\partial_\lambda + \sum m_{i,R}\partial_{m_{i,R}} + \mu\partial_\mu - d_\Gamma\right]\Gamma_R^{(\{n\})}(\lambda\{p\}, \ldots; \mu) = 0. \tag{40}$$

3 Lösung der t'Hooft - Weinberg - Gleichung

Für die Renormierungskonstanten der QCD gilt in $O(g_R^2)$:

$$Z_g = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\frac{11C_G - 4T_RN_f}{6} + O(g_R^4) \tag{41}$$

$$Z_m = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\frac{3C_F}{\epsilon} + O(g_R^4) \tag{42}$$

$$Z_{2F} = 1 - \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\frac{C_F\alpha_R}{\epsilon} + O(g_R^4) \tag{43}$$

$$Z_3 = 1 + \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\left[\frac{1}{2}C_G\left(\frac{13}{3} - \alpha_R\right) - \frac{4}{3}T_R N_f\right] + O(g_R^4) \tag{44}$$

$$\tilde{Z}_{3FP} = 1 + \frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\frac{C_G}{\epsilon}\frac{3-\alpha_R}{4} + O(g_R^4) \tag{45}$$

mit

$$C_G = N_C\,, \quad T_R = \frac{1}{2}\,, \quad C_F = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C}. \tag{46}$$

Wir rechnen in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen. Um die renormierte Kopplung einheitenfrei zu halten, muß man folgende Definition machen:

$$g_R = \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{\epsilon} Z_g^{-1} g_0. \tag{47}$$

Damit ergibt sich in für die β-Funktion sogleich:

$$\beta(g_R, \alpha_R) = -\epsilon g_R - \frac{\mu}{Z_g}\frac{\partial Z_g}{\partial \mu} g_R. \tag{48}$$

Da wir in Landau-Eichung, d.h. $\alpha_R = 0$, rechnen, erhalten wir unmittelbar:

$$\delta(g_R) = 0 \tag{49}$$

$$\bar{\gamma}_F(g_R) = 0 + O(g_r^4). \tag{50}$$

Eine kurze Rechnung liefert dann:

$$\begin{aligned}\beta(g_R) &= -\epsilon g_R - \frac{g_R^3}{(4\pi)^2}\frac{11C_G - 4T_R N_f}{3} + O(g_R^5) \\ &= -\epsilon g_R - \beta_0 g_R^3 + O(g_R^5)\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\gamma_G(g_R) &= -\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\frac{13C_G - 8T_R N_f}{6} + O(g_R^4) \\ &= \gamma_G^{(0)} g_R^2 + O(g_R^4)\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{FP}(g_R) &= -\frac{g_R^2}{(4\pi)^2}\frac{3C_G}{4} + O(g_R^4) \\ &= \tilde{\gamma}_{FP}^{(0)} g_R^2 + O(g_R^4)\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}\gamma_m(g_R) &= \frac{g_R^2}{(4\pi)^2} 6C_F + O(g_R^4) \\ &= \gamma_m^{(0)} g_R^2 + O(g_R^4).\end{aligned} \tag{54}$$

Für die QCD in 4 Dimensionen mit $N_C = 3$ und 6 Flavours gilt also:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{7}{(4\pi)^2} && (55) \\ \gamma_G^{(0)} &= -\frac{5}{2(4\pi)^2} && (56) \\ \tilde{\gamma}_{FP}^{(0)} &= -\frac{9}{4(4\pi)^2}. && (57) \end{aligned}$$

Für die (Massen-)Dimension der in der Theorie auftretenden Felder gilt:

$$\begin{aligned} d_G(\epsilon) = d_{FP}(\epsilon) &= 1 - \epsilon && (58) \\ d_F(\epsilon) &= \frac{3-2\epsilon}{2}. && (59) \end{aligned}$$

Damit sind alle für die Lösung der t'Hooft-Weinberg-Gleichung benötigten Größen bereitgestellt.

Subtrahiert man nun Gleichung 37 von Gleichung 40, so erhält man in Landaueichung ($\alpha_R = 0$) und mit $t = \ln \lambda$ und vereinfachend nur für eine Fermionmasse:

$$\left[-\partial_t + \beta\partial_{g_R} - (1+\gamma_m) m_R \partial_{m_R} - \omega \right] \Gamma^{(\{n\})}(\lambda p_1, ..., \lambda p_n; g, m, \mu) = 0 \quad (60)$$

mit

$$\omega(g_R) \equiv n_G \gamma_G + n_{FP} \tilde{\gamma}_{FP} - d_\Gamma. \quad (61)$$

Nun definiert man die laufende Kopplung $\bar{g}(t)$ und die laufende Masse $\bar{m}(t)$ durch die folgenden DGL und Anfangsbedingungen:

$$\frac{1}{\bar{m}} \frac{d\bar{m}}{dt} = -1 - \gamma_m(\bar{m}), \quad \bar{m}(0) = m \quad (62)$$

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \beta(\bar{g}), \quad \bar{g}(0) = g. \quad (63)$$

Für deren Lösung gilt in einer präziseren Notation für $\bar{g}$:

$$\bar{m}(t) = m \exp\left[-t - \int_0^t dt' \gamma_m(\bar{g}(t')) \right] \quad (64)$$

$$t_2 - t_1 = \int_{\bar{g}(t_1, \bar{g}(0))}^{\bar{g}(t_2, \bar{g}(0))} \frac{dg'}{\beta(g')}. \quad (65)$$

Da die obige DGL nicht explizit von t abhängt, gilt:

$$\begin{aligned} & \bar{g}(t_2, \bar{g}(0)) = \bar{g}(t_2 - t_1, \bar{g}(t_1)) \\ \Rightarrow \quad & \bar{g}(0, \bar{g}(0)) = \bar{g}(-t, \bar{g}(t)). \end{aligned} \tag{66}$$

Eine analoge Beziehung besteht auch für $\bar{m}$. Ersetzt man nun in der obigen DGL g durch $\bar{g}(-t, g)$ und m durch $\bar{m}(-t, m)$ erhält man:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\bar{g}(-t)) \frac{\partial}{\partial \bar{g}(-t)} - (1 + \gamma_m) \bar{m}(-t) \frac{\partial}{\partial \bar{m}(-t)} - \omega(\bar{g}(-t)) \right] \\ & \times \Gamma^{(\{n\})}(e^t p_i; \bar{g}(-t), \bar{m}(-t), \mu) = 0. \end{aligned} \tag{67}$$

Mit den oben angegebenen DGL für $\bar{g}$ und $\bar{m}$ erhält man

$$\left[\frac{d}{dt} + \omega(\bar{g}(-t)) \right] \Gamma^{(\{n\})}(e^t p_1, ..., e^t p_n, \bar{g}(-t), \bar{m}(-t), \mu) = 0. \tag{68}$$

Diese Gleichung wird gelöst durch:

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(\{n\})}(e^t p_i; \bar{g}(-t, g), \bar{m}(-t, m), \mu) \\ = \quad & \Gamma^{(\{n\})}(p_i; g, m, \mu) \exp \left[- \int_{-t}^{0} dt' \omega(\bar{g}(t', g)) \right]. \end{aligned} \tag{69}$$

Ersetzen wir darin g durch $\bar{g}(t)$ erhalten wir mit Gleichung 66 das gesuchte Endergebnis:

$$\Gamma^{(\{n\})}(e^t p_i; g, m, \mu) = \Gamma^{(\{n\})}(p_i; \bar{g}(t), \bar{m}(t), \mu) \exp \left[- \int_0^t dt' \omega(\bar{g}(t)) \right]. \tag{70}$$

Für die Bestimmung des Skalierungsverhaltens muß man das Verhalten des Exponentialfaktor studieren:

$$\begin{aligned} & \exp \left[- \int_0^t dt' \omega(\bar{g}(t)) \right] \\ = \quad & \lambda^{d_\Gamma} \exp \left\{ - \int_0^t dt' [n_G \gamma_G(\bar{g}(t')) + n_{FP} \bar{\gamma}_{FP}(\bar{g}(t'))] \right\}. \end{aligned} \tag{71}$$

Da die QCD eine asymptotisch freie Theorie ist, darf man annehmen:

$$\gamma_i(\bar{g}(t)) \longrightarrow 0, \quad t \to \infty \tag{72}$$

$$\gamma_i(\bar{g}(t)) = \gamma_i^{(0)}\bar{g}(t)^2 + O(\bar{g}(t)^4). \tag{73}$$

Als nächster Schritt ist $\bar{g}(t)$ zu berechnen. Es gilt:

$$t = \int_g^{\bar{g}(t)} \frac{dg'}{\beta(g')} = \int_g^{\bar{g}(t)} \frac{dg'}{-\epsilon g' - \beta_0 g'^3}. \tag{74}$$

Als Lösung ergibt sich aus Formelsammlungen:

$$\begin{aligned} -t &= \frac{1}{2\epsilon}\left[\ln\left|\frac{g'^2}{\beta_0 g'^2 + \epsilon}\right|\right]_g^{\bar{g}(t)} \\ &= \ln\left[\frac{\bar{g}^2(\beta_0 g^2 + \epsilon)}{(\beta_0\bar{g}^2 + \epsilon)g^2}\right]^{\frac{1}{2\epsilon}}. \end{aligned} \tag{75}$$

Hieraus läßt sich für $\epsilon \to 0$ das bekannte Resultat

$$\bar{g}^2(t) = \frac{g^2}{1 - 2\beta_0 g^2 t} \tag{76}$$

(vgl. Muta 87) herleiten. Dieses genügt unseren Ansprüchen jedoch noch nicht. Als Lösung der Gleichung erhalten wir nach kurzer Rechnung:

$$\bar{g}^2(t) = \frac{\epsilon g^2}{\beta_0 g^2(e^{2\epsilon t} - 1) + \epsilon e^{2\epsilon t}}. \tag{77}$$

Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} &\exp\left\{-\int_0^t dt'[n_G\gamma_G(\bar{g}(t')) + n_{FP}\bar{\gamma}_{FP}(\bar{g}(t'))]\right\} \\ = \; &\exp\left[-[n_G\gamma_G^{(0)} + n_{FP}\bar{\gamma}_{FP}^{(0)}]\int_0^t dt'\frac{\epsilon g^2}{\beta_0 g^2(e^{2\epsilon t'} - 1) + \epsilon e^{2\epsilon t'}}\right]. \end{aligned} \tag{78}$$

Als Lösung für das verbleibende Integral finden wir:

$$\begin{aligned} &\int_0^t dt'\frac{\epsilon g^2}{\beta_0 g^2(e^{2\epsilon t'} - 1) + \epsilon e^{2\epsilon t'}} \\ = \; &-\frac{\epsilon t}{\beta_0} + \frac{\ln(e^{2\epsilon t}\epsilon + \beta_0 g^2(e^{2\epsilon t} - 1)) - \ln\epsilon}{2\beta_0} \end{aligned} \tag{79}$$

$$\approx \; -\frac{\epsilon t}{\beta_0} + \frac{\ln(1 + 2\epsilon t + 2\beta_0 g^2(t + \epsilon t^2))}{2\beta_0}. \tag{80}$$

Man erhält also für das Skalierungsverhalten der Vertexfunktionen:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{(\{n\})}(\lambda\{p\}; g, m, \mu) \\
= \;& \lambda^{d_\Gamma} \left(\lambda^{-2\epsilon}[2\beta_0 g^2(\ln\lambda + \epsilon\ln^2\lambda) + 1 + 2\epsilon\ln\lambda]\right)^{-\frac{n_G\gamma_G^{(0)} + n_{FP}\tilde{\gamma}_{FP}^{(0)}}{2\beta_0}} \\
&\times\Gamma^{(\{n\})}(\{p\}; \bar{g}(\ln\lambda), \bar{m}(\ln\lambda), \mu).
\end{aligned} \tag{81}$$

Diese Gleichung ist für unsere Zwecke noch zu kompliziert. Wir nähern daher das Skalenverhalten der Vertexfunktionen durch:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(\{n\})}(\lambda\{p\}; g, m, \mu) \;\approx\; & \lambda^{d_\Gamma} \left(\lambda^{-2\epsilon}\beta_0 g^2 \ln(\lambda^2 + s)\right)^{-\frac{n_G\gamma_G^{(0)} + n_{FP}\tilde{\gamma}_{FP}^{(0)}}{2\beta_0}} \\
& \Gamma^{(\{n\})}(\{p\}; \bar{g}(\ln\lambda), \bar{m}(\ln\lambda), \mu).
\end{aligned} \tag{82}$$

Da die QCD eine asymtotisch freie Theorie ist, verschwindet die laufende Kopplung $\bar{g}$ für $\lambda \to \infty$ und ebenso die laufende Masse $\bar{m}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(\{n\})}(\lambda\{p\}; g, m, \mu) \;\approx\; & \lambda^{d_\Gamma} \left(\lambda^{-2\epsilon}\beta_0 g^2 \ln(\lambda^2 + s)\right)^{-\frac{n_G\gamma_G^{(0)} + n_{FP}\tilde{\gamma}_{FP}^{(0)}}{2\beta_0}} \\
& \Gamma^{(\{n\})}(\{p\}; 0, 0, \mu).
\end{aligned} \tag{83}$$

Die Vertices der QCD nähern sich bei gleichmässiger Hochskalierung der Impulse also dem Verhalten der Vertices der *freien* Theorie mit den oben angegebenen *logarithmischen Modifikationen nichtganzer Potenz* an.

4 Logarithmisch modifizierte Ansätze

Das Ziel ist nun, im Rahmen der nicht - perturbativ erweiterten Theorie das Hochtemperaturverhalten in die Ausdrücke für die Vertices zu intergrieren. Dabei gibt es jedoch folgende Schwierigkeiten:

- Aus Gleichung 83 folgt nur das Verhalten bei Hochskalierung *aller* Impulse. Das Verhalten der Vertices bei Skalierung einzelner Impuls ist *nicht* bekannt.
- Die Logarithmen können unphysikalische Infrarotdivergenzen erzeugen.
- Eventuelle Ergänzungen dürfen die Dimension des Vertex nicht ändern. Man braucht also Skalierungen für die Impulse.

Weitere Einschränkungen folgen aus den Forderungen für die nicht - perturbativ erweiterten Vertices:

1. Die Theorie soll im Limes $\Lambda \to 0$ in ihren perturbativen Limes übergehen.
2. Die fundamentalen Symmetrien der perturbativen Vertices sollen erhalten bleiben.
3. Die Vertexparameter sollen über Dyson - Schwinger - Gleichungen bestimmt werden können.

Dadurch ist die Wahl für die Propagatoren in Landau - Eichung schon stark eingeschränkt. Die plausibleste Wahl ist:

- Der Gluon - Propagator:

$$D^{*\,\mu\nu}_{a,b}(p) \quad = \quad D^{\mu\nu}_{a,b}(p) \left[\left(\frac{p^2}{\nu_0^2} \right)^{-\epsilon} \beta_0 g^2 \ln \frac{p^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{\frac{\gamma_G^{(0)}}{\beta_0}} \tag{84}$$

- Der Geist - Propagator:

$$\widetilde{D}^{*}_{ab}(p) \quad = \quad \widetilde{D}_{ab}(p) \left[\left(\frac{p^2}{\nu_0^2} \right)^{-\epsilon} \beta_0 g^2 \ln \frac{p^2 + s\Lambda^2}{\Lambda^2} \right]^{\frac{\tilde{\gamma}_{FP}^{(0)}}{\beta_0}} \tag{85}$$

- Der Fermion-Propagator bleibt unverändert:

$$S^{*\,ij}_{(f)}(p) = S^{ij}_{(f)}(p) \tag{86}$$

Die Wahl von Λ *und* ν_0 folgt aus Bedingung 1., da diese beiden Grössen die einzigen inhärente Grössen der Theorie sind, die sich zur Skalierung eignen. Theoretisch ist auch der noch freie Parameter s so bestimmbar.

Die Wahl der geeigneten Ansätze für die 3 - und 4 - Punkt - Basis - Vertices des QCD ist hingegen weniger eindeutig. Der besonderen Einfachheit halber nehmen wir einen faktorisierenden Ansatz für alle Vertices:

- Der 3 - Gluon - Vertex

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{*\,\mu_1\mu_2\mu_3}_{3V\,a_1a_2a_3}(p_1,p_2,p_3) \\
=\ &\Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{3V\,a_1a_2a_3}(p_1,p_2,p_3)\left[\left(\frac{p_1^2}{\nu_0^2}\right)^{-\epsilon}\beta_0 g^2\ln\frac{p_1^2+s\Lambda^2}{\Lambda^2}\right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \\
&\times\left[\left(\frac{p_2^2}{\nu_0^2}\right)^{-\epsilon}\beta_0 g^2\ln\frac{p_2^2+s\Lambda^2}{\Lambda^2}\right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}}\left[\left(\frac{p_3^2}{\nu_0^2}\right)^{-\epsilon}\beta_0 g^2\ln\frac{p_3^2+s\Lambda^2}{\Lambda^2}\right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}}
\end{aligned} \tag{87}$$

- Der Geist - Gluon - Vertex

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Gamma}^{*\,\mu_3}_{G\bar{G}V\,a_1a_2a_3}(-p_1,p_2,p_3) \\
=\ &\widetilde{\Gamma}^{\mu_3}_{G\bar{G}V\,a_1a_2a_3}(-p_1,p_2,p_3)\left[\left(\frac{p_1^2}{\nu_0^2}\right)^{-\epsilon}\beta_0 g^2\ln\frac{p_1^2+s\Lambda^2}{\Lambda^2}\right]^{-\frac{\tilde{\gamma}_{FP}^{(0)}}{2\beta_0}} \\
&\times\left[\left(\frac{p_2^2}{\nu_0^2}\right)^{-\epsilon}\beta_0 g^2\ln\frac{p_2^2+s\Lambda^2}{\Lambda^2}\right]^{-\frac{\tilde{\gamma}_{FP}^{(0)}}{2\beta_0}}\left[\left(\frac{p_3^2}{\nu_0^2}\right)^{-\epsilon}\beta_0 g^2\ln\frac{p_3^2+s\Lambda^2}{\Lambda^2}\right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}}
\end{aligned} \tag{88}$$

- Der Fermion - Gluon - Vertex

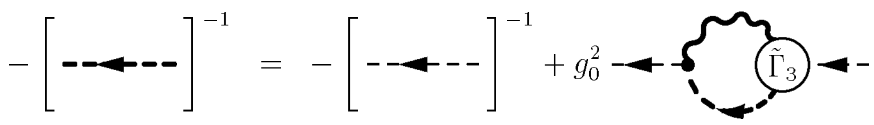
$$\begin{aligned}
&\bar{\Gamma}^{*\ \ ij\,\mu_3}_{F\bar{F}V(f)\,a_3}(-p_1,p_2,p_3) \\
=\ &\bar{\Gamma}^{\ \ ij\,\mu_3}_{F\bar{F}V(f)\,a_3}(-p_1,p_2,p_3)\left[\beta_0 g^2\left(\frac{p_3^2}{\nu_0^2}\right)^{-\epsilon}\ln\frac{p_3^2+s\Lambda^2}{\Lambda^2}\right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}}
\end{aligned} \tag{89}$$

- Der 4 - Gluon - Vertex

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^{*\,\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4}_{4G\,a_1,a_2,a_3,a_4}(p_1,p_2,p_3,p_4) \\
= \; &\Gamma_{4G\,a_1,a_2,a_3,a_4}^{\;\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4}(p_1,p_2,p_3,p_4)\left[\beta_0 g^2 \left(\frac{p_1^2}{\nu_0^2}\right)^{-\epsilon} \ln \frac{p_1^2+s\Lambda^2}{\Lambda^2}\right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \\
&\times \left[\beta_0 g^2 \left(\frac{p_2^2}{\nu_0^2}\right)^{-\epsilon} \ln \frac{p_2^2+s\Lambda^2}{\Lambda^2}\right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \left[\beta_0 g^2 \left(\frac{p_3^2}{\nu_0^2}\right)^{-\epsilon} \ln \frac{p_3^2+s\Lambda^2}{\Lambda^2}\right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \\
&\left[\beta_0 g^2 \left(\frac{p_4^2}{\nu_0^2}\right)^{-\epsilon} \ln \frac{p_4^2+s\Lambda^2}{\Lambda^2}\right]^{-\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0}} \qquad (90)
\end{aligned}
$$

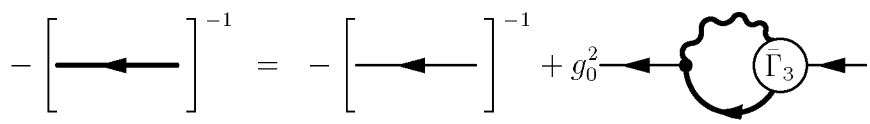
5 Die Selbstkonsistenzgleichungen der Propagatoren

Der Geisterpropagator



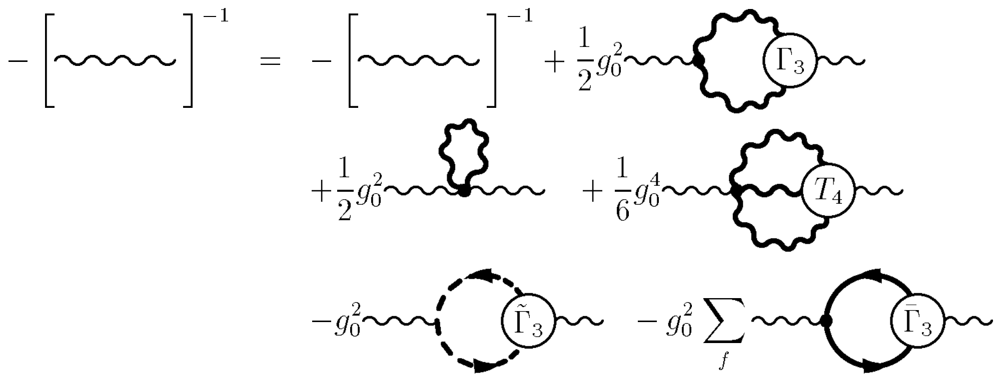
(91)

Der Fermionpropagator



(92)

Der Gluonpropagator



(93)

Bis auf den Zwei - Schleifen - Beitrag des Gluonpropagators sind alle Diagramme berechnet worden. Da alle bis auf den Fermion - Loop Logarithmen der Schleifenimpulse enthalten, musste dafür ein Weg gefunden werden, solche Integrale auszurechnen.

Integraldarstellung des Logarithmus

$$[\ln(s+b)]^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty dx x^{\alpha-1}(s+b)^{-x} \tag{94}$$

Symmetrische Integration Damit können wir eine wichtige Eigenschaft des obigen rein multiplikativen Ansatzes zeigen: Die symmetrische Integration bleibt erhalten. Sei

$$\frac{N(q,k)}{(q^2+L^2)^4} \tag{95}$$

das Ergebnis der Feynmanparametrisierung und Impulsverschiebung von

$$\frac{N'(a,b,k)}{a^2(a^2+c_1\Lambda^2)b^2(b^2+c_2\Lambda^2)}. \tag{96}$$

$f(q,k)$ sei der bei symmetrischer Integration von 95 verschwindende Teil, also:

$$\int d\!\!{}^-{}^D q \frac{f(q,k)}{(q^2+L^2)^4} = 0 \tag{97}$$

mit $d\!\!{}^- \equiv \frac{d}{2\pi}$. Der Integrand sei einheitenfrei.

Führt man nun mit logarithmischen Modifikationen die analoge Rechnung durch, landet man bei:

$$\Gamma(4)\int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 (1-x_3)x_3 \int \bar{d}^D q \frac{f(q,k)}{(q^2+L^2)^4}$$
$$\times \quad \left[\left(\frac{a^2}{\nu_0^2}\right)^{-\epsilon} \ln\frac{a^2+s\Lambda^2}{\Lambda^2}\right]^{-\alpha}\left[\left(\frac{b^2}{\nu_0^2}\right)^{-\epsilon} \ln\frac{b^2+s\Lambda^2}{\Lambda^2}\right]^{-\beta} \tag{98}$$

Mit $\tilde{q}=\frac{q}{\Lambda}$, $\quad \tilde{k}=\frac{k}{\Lambda}$ usw. und Zurücknahme der Partialbruchzerlegung erhält man

$$= \int \bar{d}^D \tilde{q}' \frac{\Lambda^{D+2\epsilon(\alpha+\beta)} f(\tilde{q}',\tilde{k})}{\nu_0^{2\epsilon(\alpha+\beta)} \tilde{a}^2(\tilde{a}^2+c_1)\tilde{b}^2(\tilde{b}^2+c_2)} [\tilde{a}^{-2\epsilon}\ln(\tilde{a}^2+s)]^{-\alpha}[\tilde{b}^{-2\epsilon}\ln(\tilde{b}^2+s)]^{-\beta}. \tag{99}$$

Einsetzen der Darstellung des Logarithmus und erneute Feynmanparametrisierung führt zur Impulsverschiebung $q' \to q$ und man hat:

$$\begin{aligned} =& \quad \frac{\Lambda^{D+2\epsilon(\alpha+\beta)}}{\nu_0^{2\epsilon(\alpha+\beta)}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 dz \int_0^\infty d\phi d\psi \frac{\Gamma(4+2\epsilon+\psi+\phi)\phi^{\alpha-1}\psi^{\beta-1}}{\Gamma(2+\epsilon)\Gamma(\psi)\Gamma(2+\epsilon)\Gamma(\phi)} \\ \times& \quad \int \frac{\bar{d}^D\tilde{q} f(\tilde{q},\tilde{k}) x_1^\epsilon (1-x_2)^{1+\epsilon} x_2^{\phi-1} y_1^\epsilon (1-y_2)^{1+\epsilon} y_2^{\psi-1}(1-z)^{1+\epsilon+\phi} z^{1+\epsilon+\psi}}{(\tilde{q}^2+\tilde{K}^2)^{4+2\epsilon+\phi+\psi}} \\ =& \quad 0. \end{aligned} \tag{100}$$

Divergente Beiträge Die divergenten Beiträge kann man in dieser Darstellung jedoch nicht ausrechnen. Mehr als einen logarithmischen Faktor kann man mathematisch nicht zufriedenstellend behandeln. Wir lösen die auftretenden Schleifenintegrale mit folgender Näherung:

$$I(m,n,\alpha) = \frac{\Lambda^{D+2\epsilon\alpha}}{(\nu_0^2)^{\epsilon\alpha}} \int \bar{d}^D\tilde{q} \frac{(\tilde{k}^2)^{n-m}(\tilde{q})^m}{(\tilde{q}^2+\tilde{L}^2)^n} \left[(\tilde{q}^2)^{-\epsilon}\beta_0 g^2 \ln(\tilde{q}^2+\tilde{M}^2)\right]^{-\alpha}. \tag{101}$$

Logarithmische Divergenz Mit $m=n-2$ und $\epsilon' \equiv \epsilon(1-\alpha)$ ergibt sich für

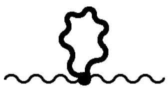
$$\begin{aligned} & I(n-2,n;\alpha) \\ \underset{div}{=} & \frac{\Lambda^{-2\epsilon'} k^4 (\beta_0 g^2)^{-\alpha}\Gamma(1-\epsilon')}{(4\pi)^{2-\epsilon}(\nu_0^2)^{\epsilon\alpha}\Gamma(2-\epsilon)} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(\epsilon')^{1-\alpha}} + O((\epsilon')^0). \end{aligned} \tag{102}$$

Quadratische Divergenz Mit $m = n - 1$ ergibt sich für

$$\begin{aligned} & I(n-1, n; \alpha) \\ \overset{=}{div} \quad & -\frac{\Lambda^{-2\epsilon'} L^2 k^2 (n-\epsilon') \Gamma(1-\epsilon')}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2-\epsilon) (\beta_0 g^2)^{\alpha}} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(\epsilon')^{1-\alpha}} + O((\epsilon')^0). \end{aligned} \tag{103}$$

(Hierzu braucht man obige Darstellung des Logarithmus, eine Integraltafel, eine Parametertransformation und eine Summendarstellung und die Darstellung eines Spezialfalles der ${}_2F_1$ - Funktion sowie Partialbruchzerlegungen.) Insbesondere fällt auf, dass die divergenten Teile des Integrals vom konstanten Term im Logarithmus unabhängig sind.

Vergleich der Ergebnisse Die Konsequenzen dieser Formeln möchte ich am Tadpole verdeutlichen. Im Rahmen der nicht - perturbativ erweiterten Vertices ist folgendes Ergebnis lange bekannt:

$$\frac{1}{2} g_0^2$$ 

$$\overset{=}{div} \quad g_0^2 \delta^{ab} C_G \frac{9}{4} t^{\mu\nu}(\vec{k}) \frac{\Lambda^{-2\epsilon} (u_{r,1} \Lambda^2)}{(\nu_0^2)^{-\epsilon} (4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{1}{\epsilon}. \tag{104}$$

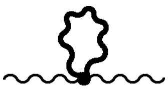
Wegen der Renormierungsgruppenidentität:

$$\left[\frac{g_0}{4\pi}\right]^2 \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\Lambda^2}{\nu_0^2}\right]^{-\epsilon} \quad = \quad \frac{1}{\beta_0} (1 + O(\epsilon, \epsilon \ln \epsilon)) \tag{105}$$

ergibt dies konvergente Beiträge zur nullten Ordnung der Störungstheorie:

$$(104) = \delta^{ab} C_G \frac{9}{4} t^{\mu\nu}(\vec{k}) \frac{(u_{r,1} \Lambda^2)}{\beta_0 (4\pi)^{-\epsilon}}. \tag{106}$$

Im logarithmisch modifizierten Schema findet man mit $\epsilon'' \equiv \epsilon(1 - 2\alpha)$:

$$\frac{1}{2} g_0^2$$ 

$$\overset{=}{div} \quad g_0^2 \nu_0^{2\epsilon} \delta^{ab} C_G t^{\mu\nu}(\vec{k}) \frac{9}{4} \frac{\Lambda^{-2\epsilon''} (u_{r,1} \Lambda^2) \Gamma(2-\epsilon'')}{(4\pi)^{2-\epsilon} (\nu_0^2)^{\epsilon\alpha} \Gamma(2-\epsilon) (\beta_0 g^2)^{2\alpha}} \frac{\Gamma(1-2\alpha)}{(\epsilon'')^{1-2\alpha}} \tag{107}$$

$$= \quad \delta^{ab} C_G \frac{9}{4} t^{\mu\nu}(\vec{k}) \frac{(u_{r,1} \Lambda^2)}{\beta_0 (4\pi)^{-\epsilon}} \frac{(4\pi)^{-4\alpha} \Gamma(1-2\alpha)}{(1-2\alpha)^{1-2\alpha}}. \tag{108}$$

Mit

$$\alpha = -\frac{\gamma_G^{(0)}}{2\beta_0} = \frac{5}{28} \tag{109}$$

erhält man:

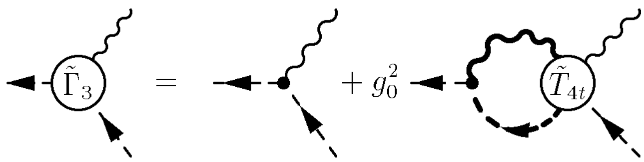
$$\frac{(4\pi)^{-4\alpha}\Gamma(1-2\alpha)}{(1-2\alpha)^{1-2\alpha}} \approx 0.3047. \tag{110}$$

Die beiden Ergebnisse unterscheiden sich also um einen Faktor der Grössenordnung 1.

6 DS - Gleichungen der höheren Vertices

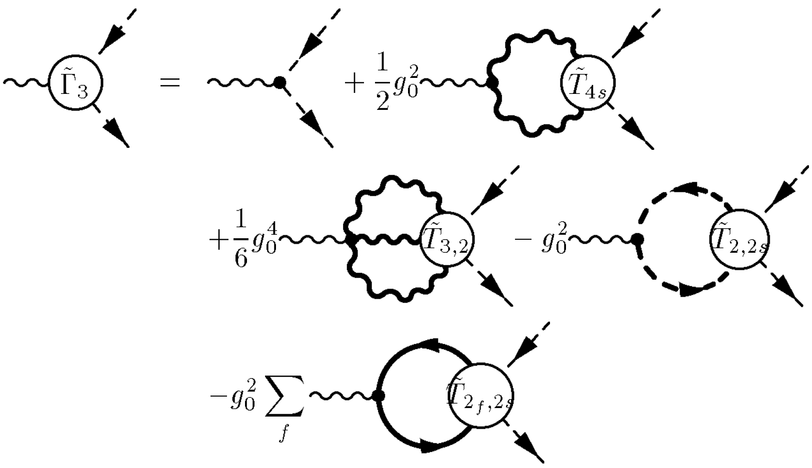
Der $\tilde{\Gamma}_3$-Vertex

Der Geist - Kanal



(111)

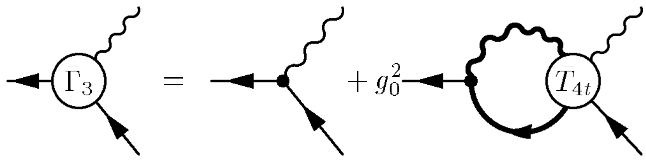
Der Gluon - Kanal



(112)

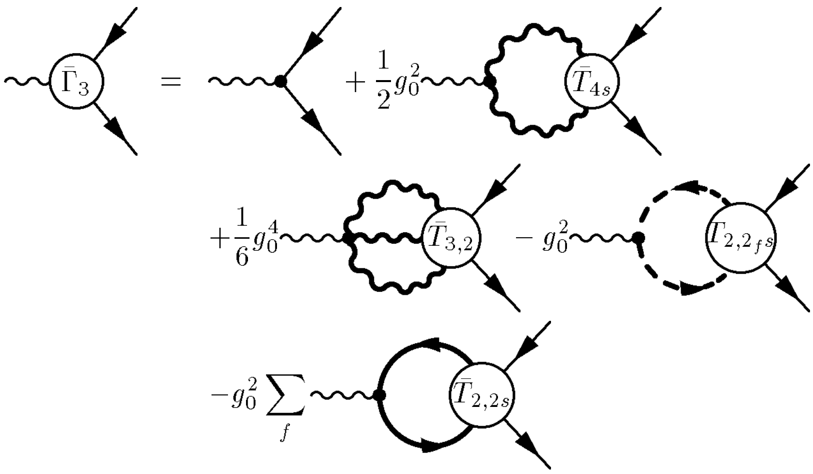
Der $\bar{\Gamma}_3$ - Vertex

Der Fermion - Kanal



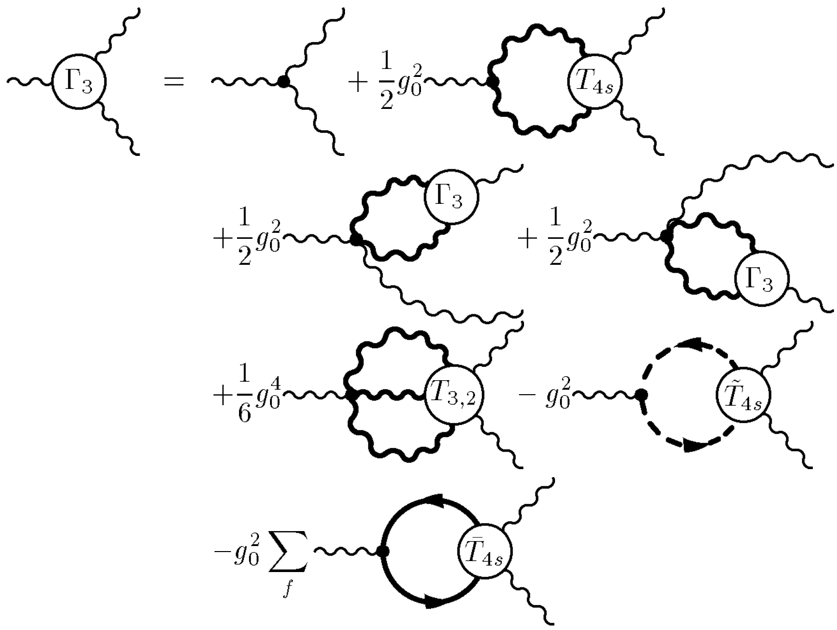
(113)

Der Gluon - Kanal



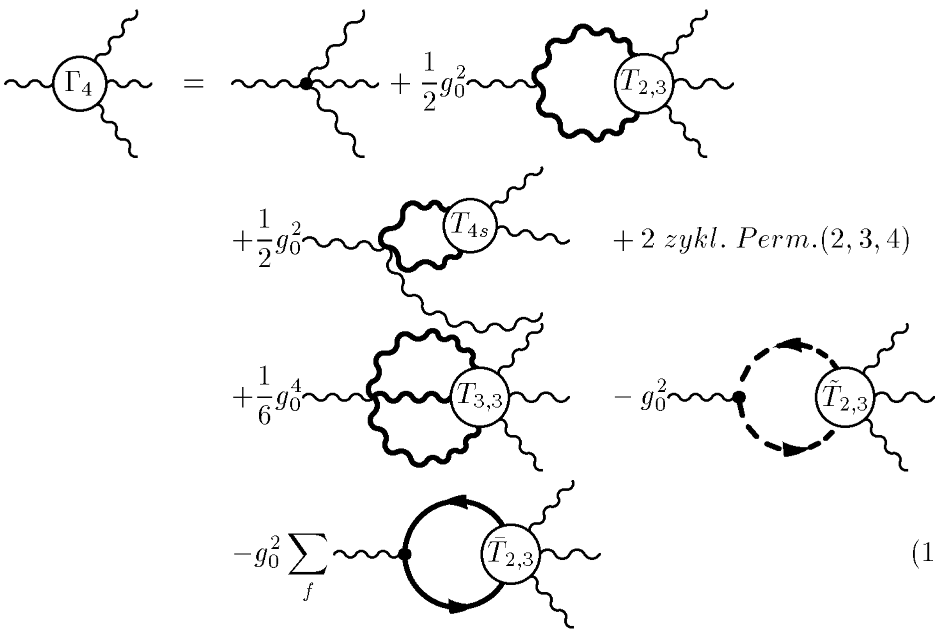
(114)

Der Γ_3-Vertex



(115)

Der Γ_4-Vertex



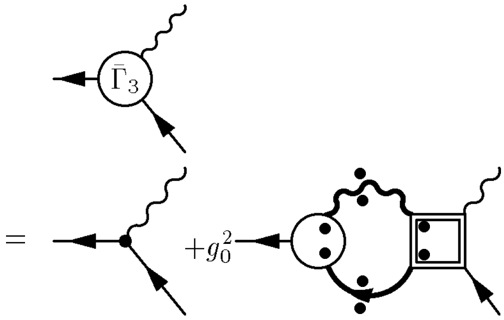
(116)

7 Resummierte DS - Gleichungen

Diese Gleichungen kann man durch Bethe - Salpeter - Resummation und Entfernen der Schattenpole in die folgende Gestalt überführen:

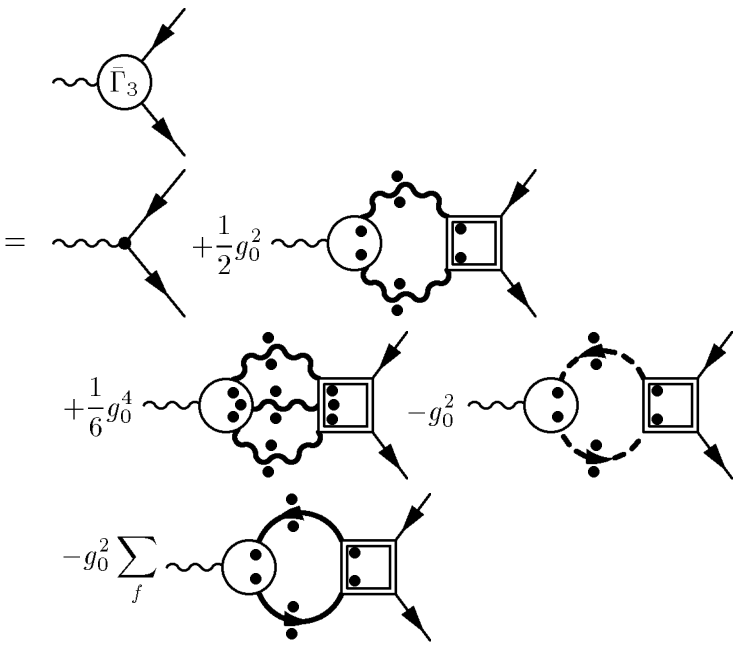
Der $\bar{\Gamma}_3$ - Vertex

Der $\bar{\Gamma}_3$ - Vertex im Fermion - Kanal



(117)

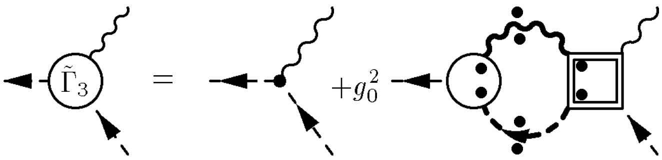
Der $\bar{\Gamma}_3$ - Vertex im Gluon - Kanal



(118)

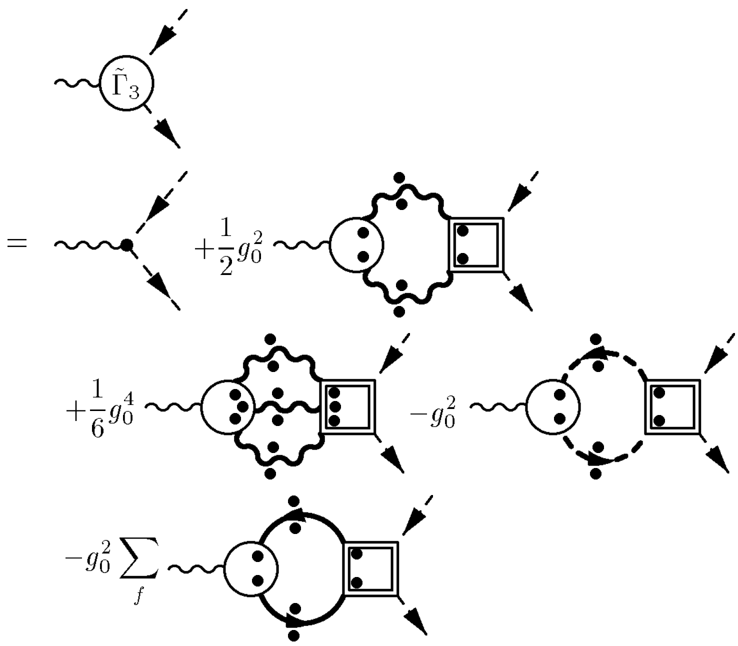
Der $\tilde{\Gamma}_3$ - Vertex

Der $\tilde{\Gamma}_3$ - Vertex im Geist - Kanal



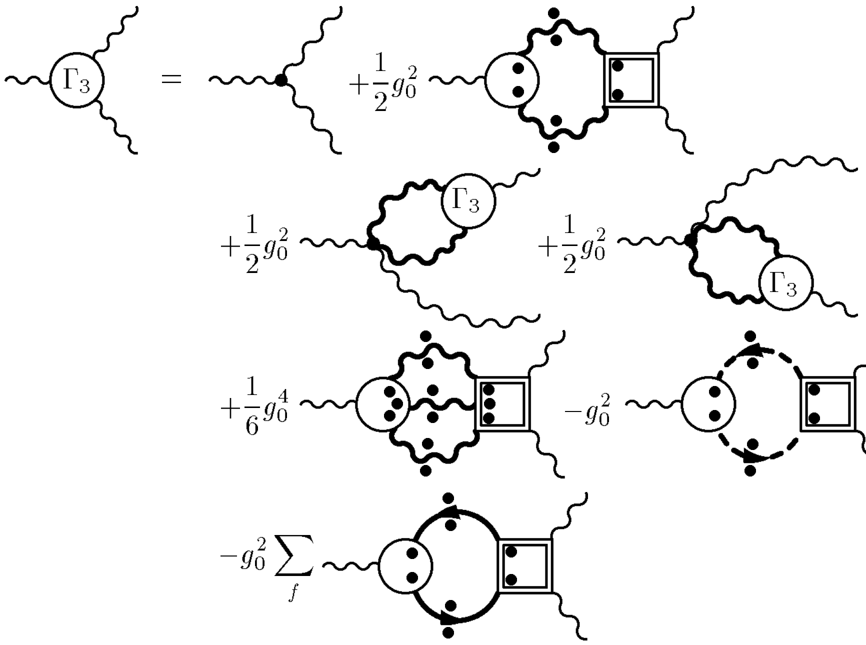
(119)

Der $\tilde{\Gamma}_3$ - Vertex im Gluon - Kanal



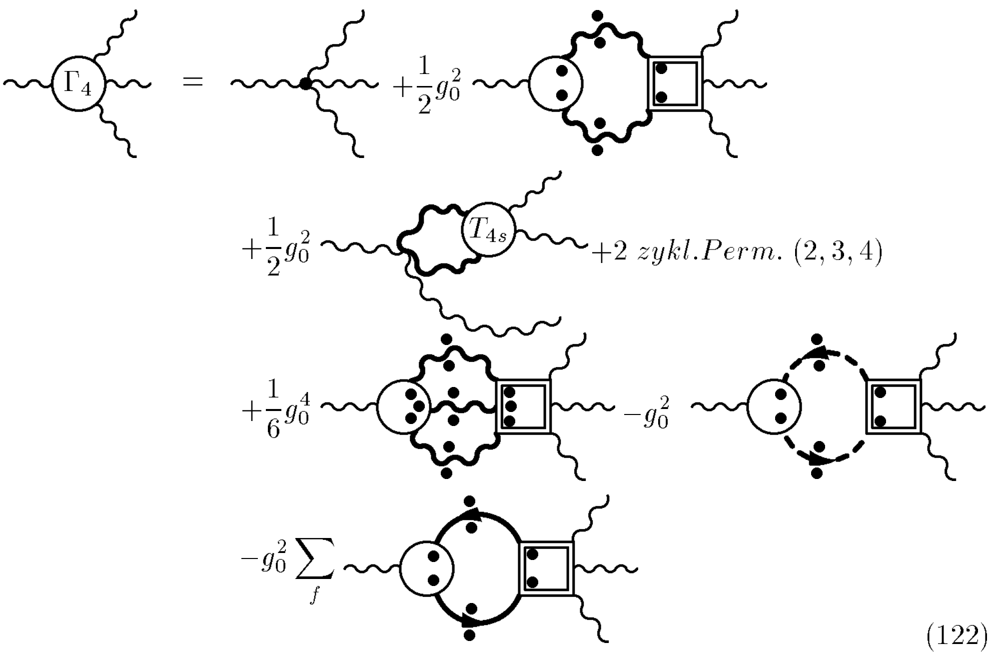
(120)

Der Γ_3 - Vertex



(121)

Der Γ_4 - Vertex



(122)

An diesen Gleichungen kann man sehr gut die Probleme und Vorteile, die bei diesem Ansatz auftreten, diskutieren:

- Linke und rechte Seite der DS - Gleichung haben nicht das gleiche Sklenverhalten bezüglich der logarithmischen Erweiterungen.

- Die logarithmischen Modifikationen entsprechen einer partiellen Resummation der führenden Logarithmen der Störungsreihe. In den resummierten Gleichungen ist manifest, dass dies zum richtigen Skalenverhalten führt. Zugleich verschwinden die Logarithmen aus den Schleifenintegralen.

- In den Gleichungen zum Γ_3 - und Γ_4 - Vertex bleiben nicht - resummierbare Terme, die nicht genügend logarithmische Faktoren ausbilden. Die Erzeugung der dafür benötigten Terme ist eventuell nur über eine sogenannte triviale Symmetrisierung der DS - Gleichungen möglich.

- In allen Gleichungen bleibt die Frage, wie dem perturbativen Term beizukommen ist.

- Dennoch gibt die Resummierbarkeit der Vertices Anlass zur Hoffnung, dass ein ähnliches Ergebnis auch für die prinziell nicht resummierbaren Propagator - Gleichungen erreichbar ist.