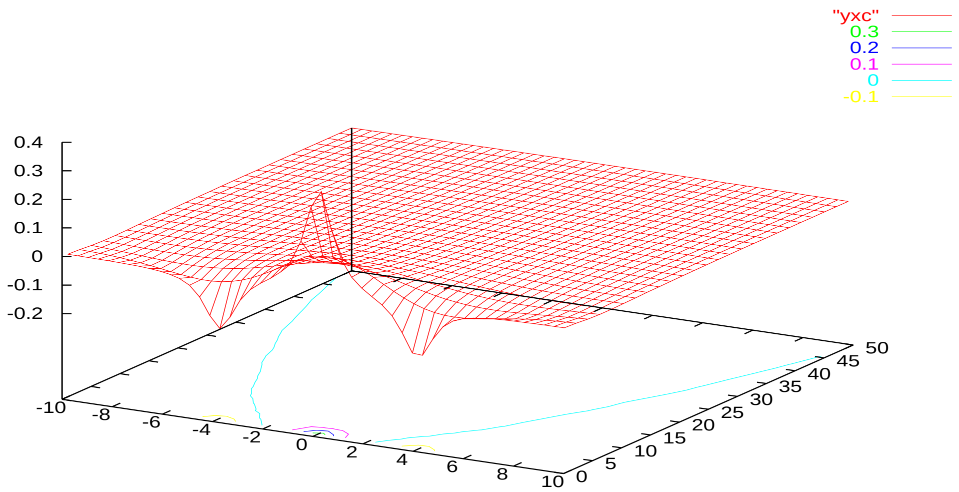
Bestimmung der Asymptotik von Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen mit Methoden der Renormierungstheorie

Thorsten Hiester , Otfried Gühne

1. Februar 2000



1.Die Methode

- Betrachtet werden Differentialgleichungen vom Typ

$$\dot{u} = u'' + F(u, u', u'')$$

Dabei sei $u = u(x,t)$ und $x \in \mathbb{R}$. ($x \in \mathbb{R}^n$ ist auch möglich) Gesucht ist nun ein Verhalten der Lösung für $t \to \infty$ entsprechend

$$u(x,t) \sim t^{-\frac{\alpha}{2}} f(xt^{-\frac{1}{2}})$$

- Konvention: Abfangswert bei $t = 1$.

- Idee: Bestimme das asymptotische Verhalten für große Zeiten durch eine Iteration einer Abbildung, die das Verhalten für ein endliches Zeitintervall beschreibt. Dabei geht man in folgenden Schritten vor:

- Für ein festes $L > 1$ und ein später zu bestimmendes α wird die Transformation im Lösungsraum

$$M_L : u \to u_L(x,t) := L^\alpha u(Lx, L^2 t)$$

definiert. Dabei sei $u(x,t)$ Lösung der DGL zum Anfangswert $f(x)$. Es gilt:

$$M_{L^2} = M_L \circ M_L.$$

- Dieses u_L erfüllt nun die neue Differentialgleichung

$$\dot{u}_L = u_L'' + F_L(u_L, u_L', u_L'')$$

Dabei ist $F_L(a,b,c) = L^{2+\alpha} F(L^{-\alpha}a, L^{-1-\alpha}b, L^{-2-\alpha}c)$.

- Die RG-Abbildung $R : \Sigma \to \Sigma$ ist dann gegeben durch

$$(R(f))(x) := u_L(x,1) = L^\alpha u(Lx, L^2)$$

- R hängt von L und F ab: $R = R_{L,F}$. Für die Verkettung zweier R gilt

$$R_{L^2,F} = R_{L,F_L} \circ R_{L,F}$$

beziehungsweise allgemeiner

$$R_{L^n,F} = R_{L,F_{L^{n-1}}} \circ ... \circ R_{L,F_L} \circ R_{L,F}$$

Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
u(x,t) \arrow[r, "M_L"] \arrow[rr, bend left, "M_{L^2}"] \arrow[d, shift left, "(t=1)"] & u_L(x,t) \arrow[r, "M_L"] \arrow[d, shift left, "(t=1)"] & u_{L^2}(x,t) \arrow[d, shift left, "(t=1)"] \\
f(x) \arrow[u, shift left, "(\text{Lösg.})"] & R_{L,F}(f) \arrow[u, shift left, "(\text{Lösg.})"] & R_{L^2,F}(f) \arrow[u, shift left, "(\text{Lösg.})"]
\end{tikzcd}
$$

Bei der RG-Abbildung wird erst die DGL gelöst, dann die Abb. M_L angewandt, und schließlich $t = 1$ gesetzt. Aus obiger Identität für M_{L^2} folgt dann die für $R_{L^2,F}$.

- Setzt man nun $t = L^{2n}$ so gilt

$$u(x,t) = t^{-\frac{\alpha}{2}}(R_{L^n,F}f)(xt^{-\frac{1}{2}})$$

- Ziel ist es nun, α so zu wählen, daß die Iteration gegen einen Fixpunkt läuft, d. h. daß

$$F_{L^n} \to F^* \,,\; R_{L^n,F} f \to f^*$$

wobei

$$R_{L,F^*} f^* = f^*$$

der Fixpunkt ist.

- Dann hat man für $u(x,t)$ das asymptotische Verhalten

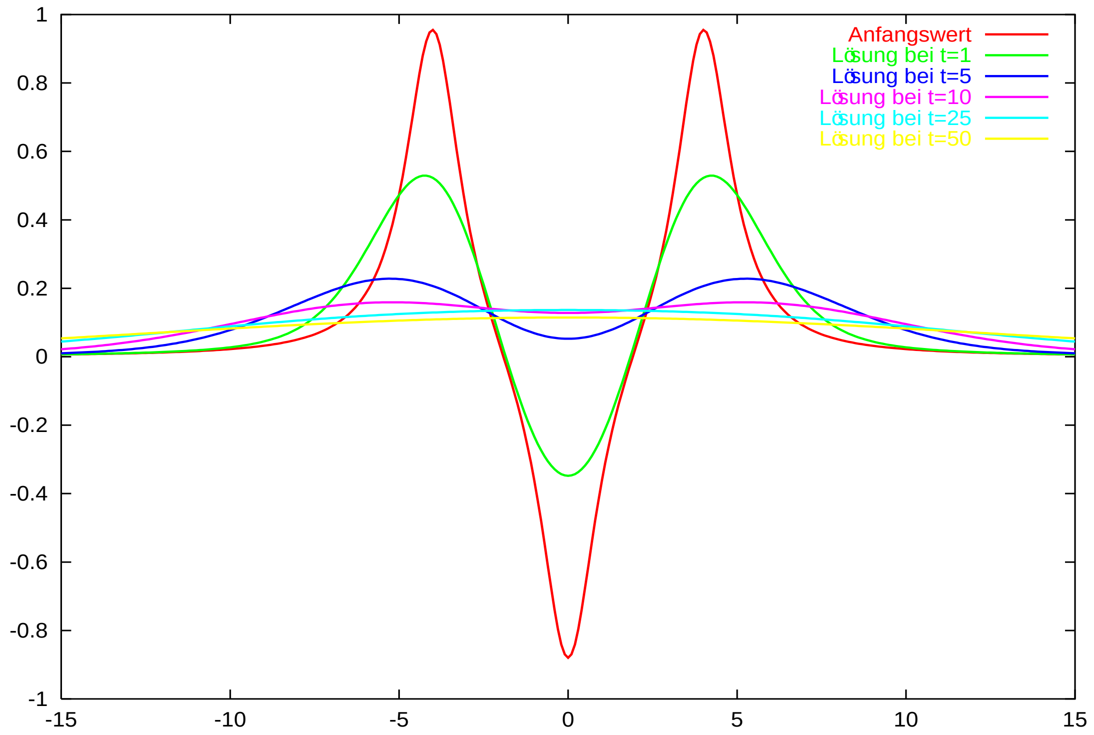
$$u(x,t) \sim t^{-\frac{\alpha}{2}} f^*(x t^{-\frac{1}{2}})$$

2. Comics

- Numerische Durchrechnung des Beispiels:

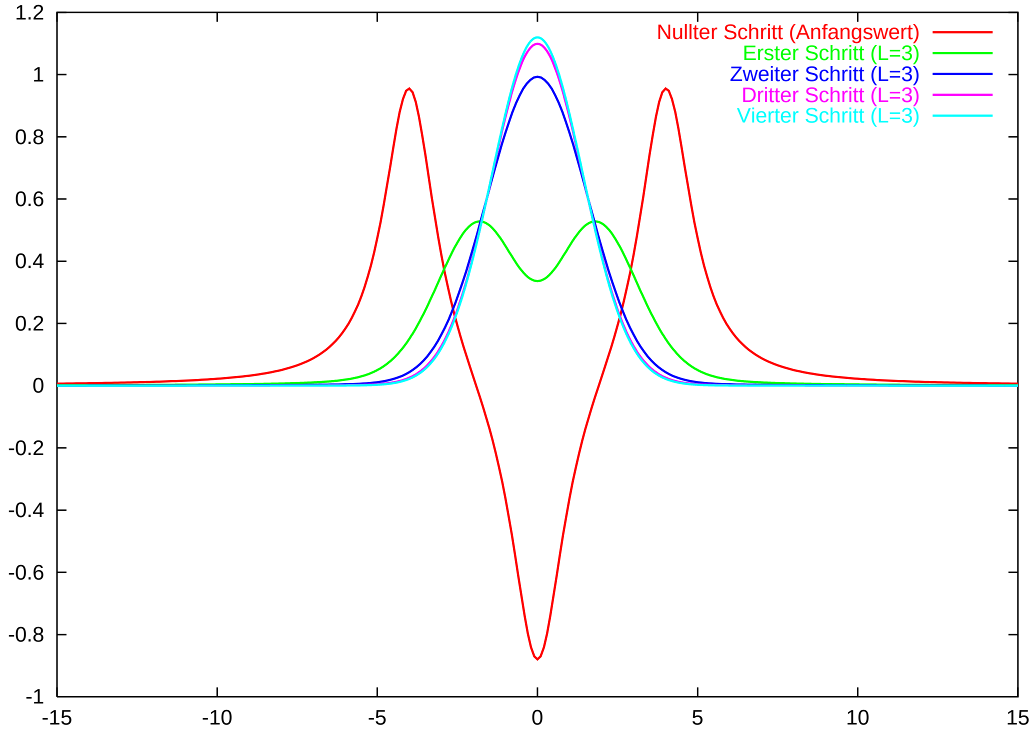
$$\dot{u} = u'' + u^6$$

$$u(x,1) = f(x) = \frac{-0.5}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x-4)^2} + \frac{1}{1+(x+4)^2}$$

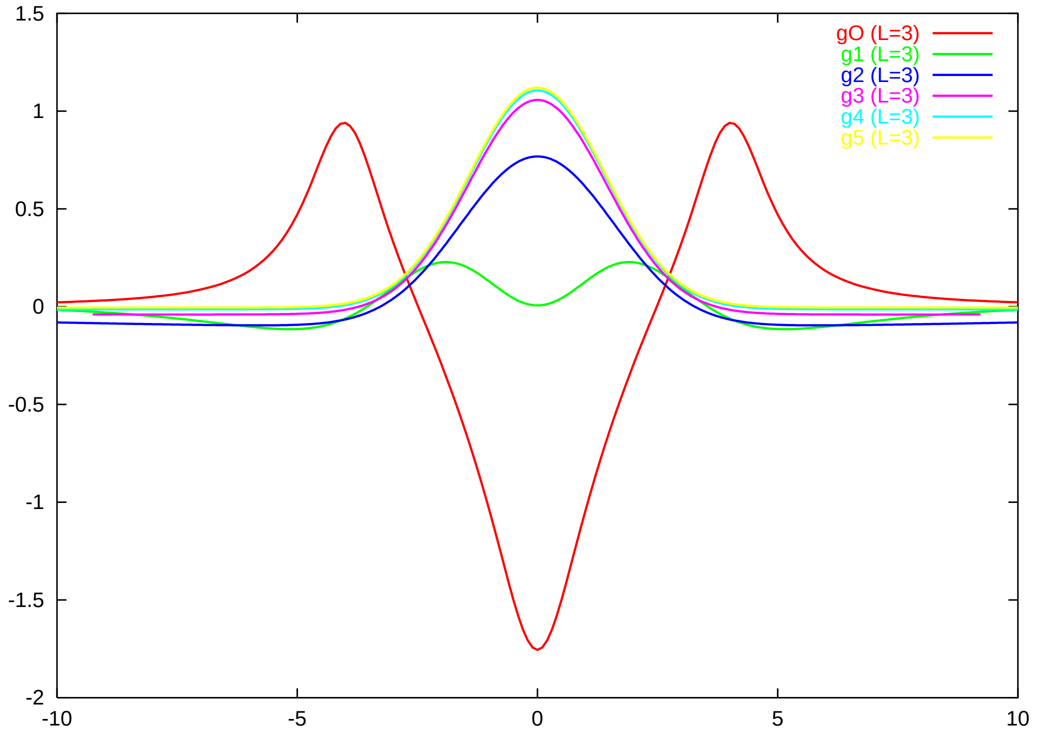


- Bilder von f unter der wiederholten RG-Transformation zu $L = 3$ sind von der Form:

$$R_{L^n, F} f = L^n u(L^n x, L^{2n}).$$



- Berechnung der g_n:



3. Der Gaußsche Fixpunkt

- Betrachte den Fall $F = 0$. Das ist die normale Wärmeleitungsgleichung, die man mittels Fouriertransformation lösen kann. Mit $\alpha = 1$ erhält man als RG-Transformation:

$$\widehat{Rf}(k) = \exp\{-k^2(1 - \frac{1}{L^2})\}\widehat{f}(\frac{k}{L}) =: \widehat{R_0 f}(k)$$

- Fixpunkt von diesem R_0 :

$$\widehat{f_0^*}(k) = \exp\{-k^2\}$$

Das ist der sogenannte Gaußsche Fixpunkt.

Definition. *Die Norm einer Funktion f mit $\widehat{f} \in C^1$ ist gegeben durch*

$$\|f\| := \sup_k (1 + k^4)(|\widehat{f}(k)| + |\widehat{f}'(k)|)$$

Bemerkung. *Konvergenz in obiger Norm impliziert auch L^1 - und L^∞ -Konvergenz. Das kann man mit der Hölderschen Ungleichung nachrechnen.*

Lemma. *Mit dieser Norm und obigem R_0 gilt für eine Funktion g mit $\widehat{g}(0) = 0$:*

$$\|R_0 g\| \leq \frac{C}{L}\|g\|$$

Beweis: Nach Mittelwertsatz existiert ein s mit $|\widehat{g}(\frac{k}{L})| \leq \frac{|k|}{L}|\widehat{g'}(\frac{ks}{L})|$. Damit kann man die Behauptung nachrechnen.

Bemerkung: Im folgenden sei C immer eine Konstante unabhängig von L und F ; C_L , C_F seien Konstanten die von L bzw. F abhängen, usw.

Definition. *(a) Falls* $F(a,b,c) = a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3}$ *ein Monom ist, so ist* $F_{L^n} = L^{-nd_F}F$ *mit*

$$d_F := n_1 + 2n_2 + 3n_3 - 3$$

(b) Für ein analytisches F *sei* d_F *immer das kleinste* d_F *in der Potenzreihenentwicklung mit nichtverschwindendem Koeffizient.*

(c) F *heißt irrelevant, falls* $d_F > 0$, *marginal, falls* $d_F = 0$, *und relevant, falls* $d_F < 0$.

4. Der irrelevante Fall

Theorem. *Sei $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ analytisch um 0 mit $d_F > 0$ und δ mit $0 < \delta < 1$ gegeben. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so daß für $\|f\| < \epsilon$ das Anfangswertproblem*

$$\dot{u} = u'' + F(u, u', u'') \ , \ u(x,1) = f(x)$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Diese Lösung hat die Asymptotik

$$\lim_{t \to \infty} t^{1-\delta} \| u(xt^{\frac{1}{2}}, t) - At^{-\frac{1}{2}} f_0^*(x) \| = 0.$$

Dabei ist $A = A(f, F) \in \mathbb{C}$.

Beweis. Beim Beweis geht man in folgenden Schritten vor:

- **Existenz und Eindeutigkeit**

Zuerst wird die DGL in eine Integralgleichung umgerechnet:

$$u(x,t) = e^{(t-1)\partial^2} f + \int_0^{t-1} ds e^{s\partial^2} F(t-s) =: u_f + N(u).$$

Daß dieser Ausdruck die DGL formal löst, kann man nachrechnen. Um nun Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen wird der Banachraum aller $u(x,t)$ mit $t \in [1, L^2]$ mit der Norm

$$\|u\|_L := \sup_{t \in [1,L^2]} \|u(t)\|$$

betrachtet. Zu zeigen ist, daß dieAbbildung

$$T(u) := u_f + N(u)$$

die Kugel $B_f = \{u | \|u - u_f\|_L \leq \|f\|\}$ in sich selbst abbildet und kontrahierend ist. Dann hat sie nach Banachschem Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt, die Lösung der Integralgleichung.

Es muß nun $\|N(u)\|_L$ abgeschätzt werden. Für den Fall daß $F(a,b,c) = a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3}$ ein Monom ist, läßt sich zeigen, daß

$$\|N(u)\|_L \leq C_L (C\|u\|_L)^m$$

gilt, dabei ist $m = \Sigma n_i$. Da $d_F > 0$, ist $m > 2$, und für kleine $\|u\|_L$ gilt für beliebiges F

$$\|N(u)\|_L \leq C_{L,F} \|u\|_L^2$$

Ganz analog schätzt man ab:

$$\begin{gathered} \|T(u_1) - T(u_2)\|_L = \|N(u_1) - N(u_2)\|_L \\ \leq C_F L^2 (\|u_1\|_L + \|u_2\|_L) \|u_1 - u_2\|_L \end{gathered}$$

Nun ist $\|u_f\|_L \leq C\|f\|$, deshalb ist in B_f $\|u\|_L \leq (C+1)\|f\|$ und daher bildet T B_f in sich selbst ab und ist kontrahierend.

Die Lösung der DGL ist also

$$u(x,t) = e^{(t-1)\partial^2} f + v$$

mit

$$\|v\| = \|N(u)\| \leq C_{L,F}\|f\|^2$$

Im folgenden sei $\|f\|$ immer so klein gewählt, daß an dieser Stelle $C_{L,F}\|f\| \leq L^{-5}$ ist.

- **Bestimmung der Asymptotik**

Nun wird der Anfangswert geschrieben als

$$f = A_0 f_0^* + g_0$$

wobei $A_0 = \widehat{f}(0)$, und da $\widehat{f_0^*}(0) = 1$, ist $\widehat{g_0}(0) = 0$. Der Vorteil ist, daß R_0 für dieses g_0 bereits kontrahierend ist. Die RG-Transformation ist nun

$$Rf := Le^{(L^2-1)\partial^2} f(Lx) + Lv(Lx)$$

$$= R_0 f + Lv(Lx) =: A_1 f_0^* + g_1$$

mit

$$A_1 = A_0 + \widehat{v}(0)$$

und

$$g_1 = R_0 g_0 + Lv(Lx) - \widehat{v}(0) f_0^*$$

Dann hat auch g_1 wieder die schöne Eigenschaft, daß $\widehat{g_1}(0) = 0$. Deshalb gilt für g_1 die Abschätzung

$$\|g_1\| \leq \|f\| L^{-(1-\delta)}$$

falls $\|f\|$ klein und L groß ist (abhängig von δ).

Nun wird die Transformation wiederholt, dh. man hat

$$f_n := R_{L^n F} f = A_n f_0^* + g_n$$

$$A_{n+1} = A_n + \widehat{v_n}(0)$$

$$g_{n+1} = R_0 g_n + L v_n(Lx) - \widehat{v_n}(0) f_0^*$$

Dann zeigt man induktiv, daß

$$|A_n| \leq (C - L^{-n}) \|f\|$$

$$\|g_n\| \leq C L^{-(1-\delta)n} \|f\|$$

Nun werden bei der Abbildung von L^n nach L^{n+1} die Abschätzungen für $\|v_n\|$ um einen Faktor L^{-nd_F} besser, da in den Monomen von F nun dieser Faktor drinsteht. Also

$$\|v_n\| \leq C_{L,F} L^{-nd_F} \|f\|^2$$

$$|A_{n+1} - A_n| \leq C_{L,F} L^{-nd_F} \|f\|^2$$

Deshalb ist die Folge der A_n eine Cauchyfolge die (gegen A) konvergiert und man hat, falls $t = L^{2n}$ ist:

$$\|u(xt^{1/2}, t) - At^{-\frac{1}{2}} f_0^*\| = \|t^{-\frac{1}{2}} R_{L^n,F} f - At^{-\frac{1}{2}} f_0^*\| =$$

$$= \|t^{-\frac{1}{2}} g_n(x) + (A_n - A) t^{-\frac{1}{2}} f_0^*\| \leq$$

$$\leq Ct^{-\frac{1}{2}} (\|g_n\| + |A_n - A|) \leq$$

$$\leq Ct^{-\frac{1}{2}} \|f\| (L^{-(1-\delta)n} + L^{-nd_F}) \leq$$

$$\leq CL^{-2n} L^{\delta n} \|f\| = Ct^{-1+\frac{1}{2}\delta} \|f\|.$$

Diese Abschätzung, die die zu zeigende Behauptung für diskrete Zeitpunkte darstellt, läßt sich durch die Ersetzung $L^2 \to \tau L^2$ mit $1 < \tau < L^2$ für alle Zeiten erweitern. Damit ist die Behauptung bewiesen. q.e.d.

5. Der marginale Fall

Beim marginalen Fall kommen im Wesentlichen zwei Formen für F in Betracht:

$$F = -u^3 + G(u, u', u'')$$

$$F = 2uu' + H(u, u', u'')$$

wobei G bzw. H irrelevant sind. Wir beschränken uns hier auf den ersten Fall, da bei der zweiten Gleichung auch stabile Fronten entstehen können. Weiterhin wird u skaliert: $u \to \lambda^{\frac{1}{2}} u$. Es gilt dann:

Theorem. *Sei $G : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ analytisch, die Potenzreihe von G beginne mit Monomen vom Grade 4 oder höher. Weiter sei $G_\lambda(u) := \lambda^{-\frac{1}{2}} G(\lambda^{\frac{1}{2}} u)$. Für alle $\delta > 0$ existiert ein $\lambda_0 > 0$ und ein $\epsilon > 0$ so daß für $0 < \lambda < \lambda_0$ und $\|g\| \leq \epsilon$ das Anfangswertproblem*

$$\dot{u} = u'' - \lambda u^3 + G_\lambda(u, u', u'')$$

$$f = f_0^* + g \, , \, \widehat{g}(0) = 0$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Diese Lösung erfüllt:

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}}(\log t)^{1-\delta}\|u(xt^{\frac{1}{2}},t) - (\frac{\lambda}{2\sqrt{3}\pi} t\log t)^{-\frac{1}{2}} f_0^*\| = 0.$$

Beweis. Wiederum teilt sich der Beweis in zwei Teile:

- **Existenz und Eindeutigkeit**

Wie im ersten Beweis soll der Banachsche Fixpunktsatz angewandt werden. Betrachtet wird wiederum

$$B_f = \{u | \|u - u_f\| \le \|f\|\}$$

Auf diesem Ball soll Kontraktion gezeigt werden, allerdings wird $\|f\|$ diesmal nicht beliebig klein, sondern es ist $\|f\| \ge 1$. Es kann allerdings λ klein gewählt werden. Als Abschätzungen, aus denen für die Abbildung

$$T : B_f \to B_f \ , \ T(u) := u_f + N(u)$$

die Existenz genau eines Fixpunktes folgt, erhält man:

$$\|N(u)\|_L \le \lambda C_{L,G}$$

$$\|N(u_1) - N(u_2)\|_L \le \lambda C_{L,G}\|u_1 - u_2\|_L$$

Deshalb existiert eine eindeutige Lösung in B_f, nämlich

$$u(x,t) = e^{(t-1)\partial^2} f + v$$

- **Bestimmung der Asymptotik**

Man zerlegt $R_{L^n,F} f = f_n$ wieder in ein Vielfaches von f_0^* und einen Restterm:

$$f_n = A_n f_0^* + g_n$$

Dann versucht man Abschätzungen für A_n und $\|g_n\|$ zu finden, was diesmal wesentlich komplizierter ist, man erhält schließlich:

$$A_n \leq \frac{1}{\sqrt{2\lambda\beta n}} + \frac{C}{n}$$

$$\|g_n\| \leq \frac{C_{L,G}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Dabei ist

$$\beta = \frac{\log L}{2\pi\sqrt{3}}$$

eine Hilfsgröße. Setzt man nun $t = L^{2n}$ ergibt sich die Behauptung wie im irrelevanten Fall.

6. Fronten

- **Situation:** Betrachtet werden Dgl. vom Typ:

$$\dot{u} = u'' + a(u, u')u'' + \frac{\partial a}{\partial u}(u')^2 + \frac{\partial a}{\partial u'}u''u'$$

mit frontartigen Anfangsbedingungen:

$$u(x, 1) = \phi(x) \ , \ \lim_{x \to \pm\infty} \phi(x) = u_\pm$$

- Im Falle der Wärmeleitungsgleichung ($a = 0$) läßt sich die Gleichung lösen und die Asymptotik explizit bestimmen, man hat:

$$\phi_0^*(x) = u_- + (u_+ - u_-)e(x)$$

- Im Falle $a \neq 0$ kommt zu diesem ϕ_0^* noch ein Zusatzterm hinzu: $\phi^* = \phi_0^* + \psi$. Dieses ψ ist durch eine Dgl. eindeutig bestimmt, aber nicht explizit bekannt. Für kleine $u_\pm$ gilt jedoch:

$$\psi \approx \psi_0 := \partial(a(\phi_0^*, 0)\partial\phi_0^*)$$

Satz. Sei $a : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ analytisch mit $a(u, u' = 0) \sim u^d$ mit $d > 0$ für $|u\ |$ klein. Für alle $\delta > 0$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß für $|u_\pm| < \epsilon$ und $\|f\| \leq \epsilon$ die Dgl.

$$\dot{u} = \partial(1 + a(u, \partial u)\partial u)$$

$$= u'' + au'' + \tfrac{\partial a}{\partial u}(u')^2 + \tfrac{\partial a}{\partial u'}u'u''$$

$$u(x, 1) = \phi_0^*(x) + \psi(x) + f(x)$$

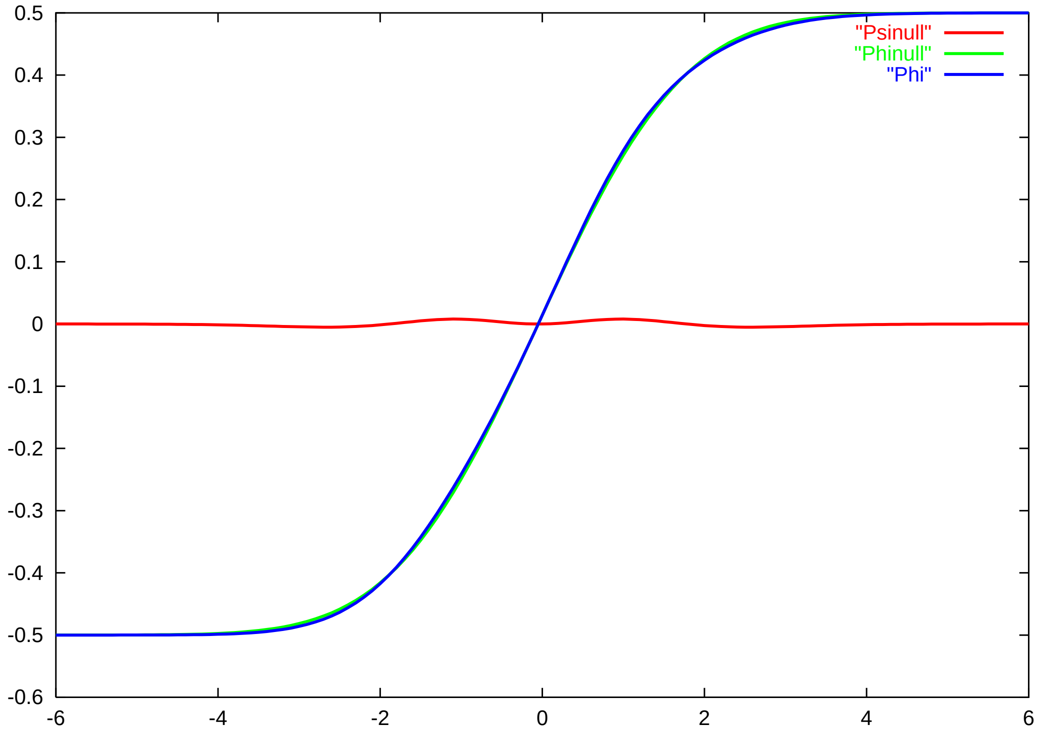
eine eindeutige Lösung besitzt, diese Lösung erfüllt:

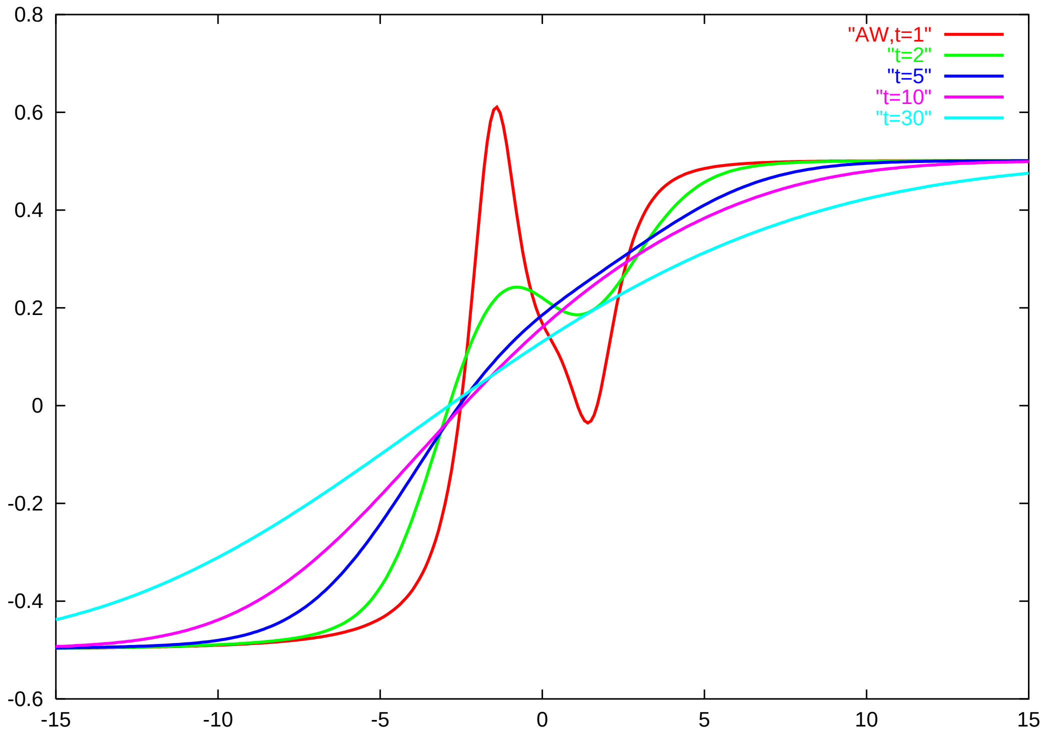
$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\delta}\|u(\sqrt{t}x, t) - \phi^*(x) - \frac{\widehat{f}(0)}{\sqrt{t}} f^*(x)\| = 0.$$

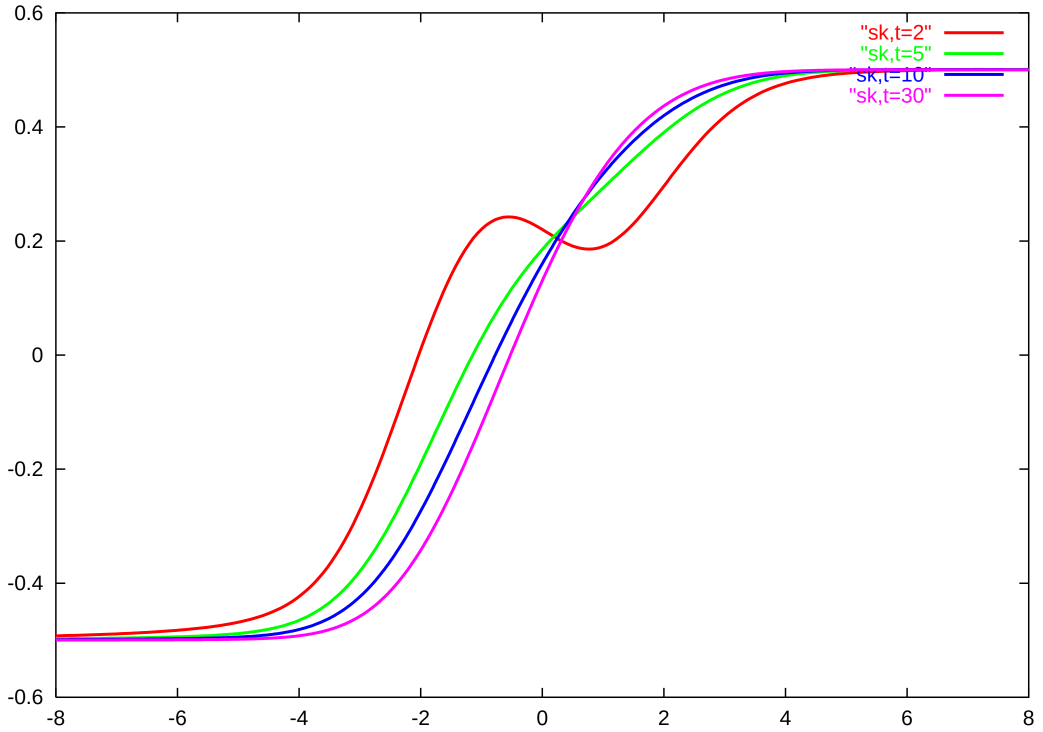
Dabei ist f^* der Fixpunkt der auf f wirkenden Renormierungsgruppentransformation. f^* ist explizit gegeben, wenn ϕ^* bekannt ist.

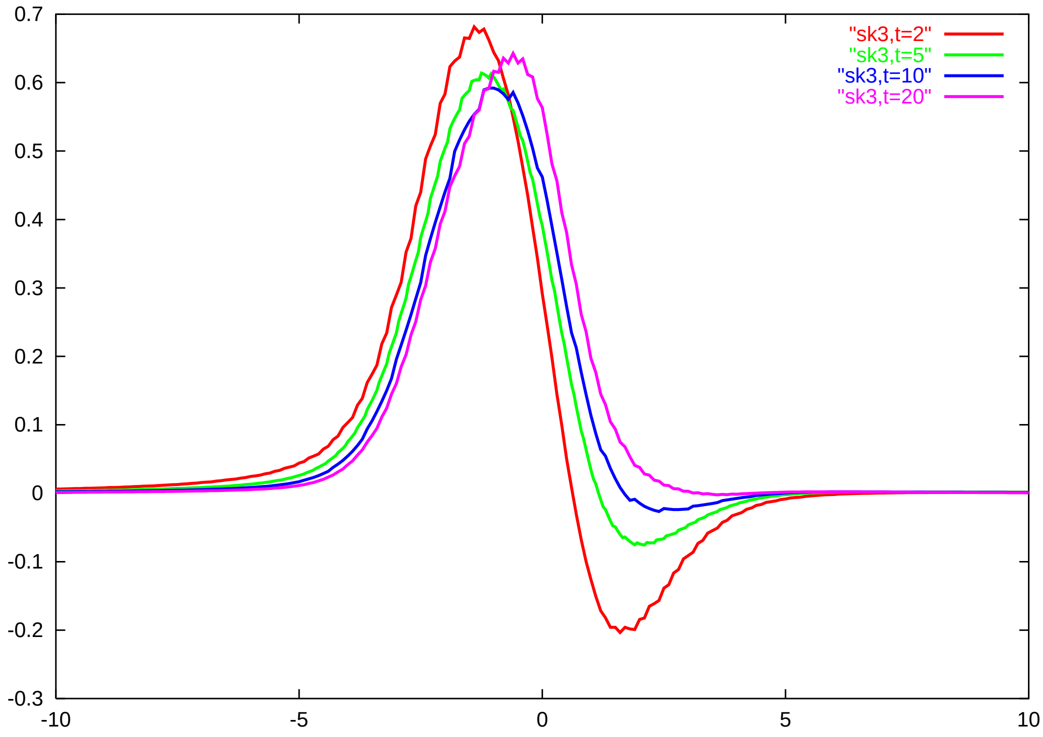
Beispiel:

$$a = u^3(u')^3$$
$$f(x) = \tfrac{1}{1+(x-1.5)^2} - \tfrac{0.5}{1+(x+1.5)^2}$$
$$u_+ = 0.5 = -u_-$$


"Psinull"
"Phinull"
"Phi"


"AW,t=1"
"t=2"
"t=5"
"t=10"
"t=30"


"sk,t=2"
"sk,t=5"
"sk,t=10"
"sk,t=30"
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


"sk3,t=2"
"sk3,t=5"
"sk3,t=10"
"sk3,t=20"
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-10
-5
0
5
10