Kaluza-Klein-Theorie

Forschungsseminar Quantenfeldtheorie
Montag, 22.05.2006
Jens Langelage

Inhalt

1.) Gravitation und Elektromagnetismus in höheren Dimensionen

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Elektromagnetismus in vier Raumzeit-Dimensionen

Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{-1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Elektromagnetismus in vier Raumzeit-Dimensionen

Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{-1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Elektromagnetismus in drei Raumzeit-Dimensionen

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Elektromagnetismus in drei Raumzeit-Dimensionen

$$E_Z = B_X = B_Y = 0$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Elektromagnetismus in drei Raumzeit-Dimensionen

$$E_Z = B_X = B_Y = 0$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_X & -E_Y \\ E_X & 0 & B_Z \\ E_Y & -B_Z & 0 \end{pmatrix}$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Elektromagnetismus in drei Raumzeit-Dimensionen

$$E_Z = B_X = B_Y = 0 \qquad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_X & -E_Y \\ E_X & 0 & B_Z \\ E_Y & -B_Z & 0 \end{pmatrix}$$

Elektromagnetismus in beliebigen Raumzeit-Dimensionen

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Elektromagnetismus in drei Raumzeit-Dimensionen

$$E_Z = B_X = B_Y = 0 \qquad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_X & -E_Y \\ E_X & 0 & B_Z \\ E_Y & -B_Z & 0 \end{pmatrix}$$

Elektromagnetismus in beliebigen Raumzeit-Dimensionen

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Gaußsches Gesetz: $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Gaußsches Gesetz:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

$$E(r) = \frac{q}{Vol(S^{d-1}) r^{d-1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) q}{2\pi^{\frac{d}{2}} r^{d-1}}$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Gaußsches Gesetz:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

$$E(r) = \frac{q}{Vol(S^{d-1}) r^{d-1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) q}{2\pi^{\frac{d}{2}} r^{d-1}}$$

Poisson-Gleichung:

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

$$\nabla^2 \phi = -\rho$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Allg. Relativitätstheorie

Wirkung: $$S=\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{g(x)}\,R(x)$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Allg. Relativitätstheorie

Wirkung: $$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4 x \sqrt{g(x)}\, R(x)$$

Einsteinsche Feldgleichungen:

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) R(x) = -8\pi G T_{\mu\nu}(x)$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Gravitation und Planck-Länge(n)

Planck-Einheiten: $$G = 1\frac{l_P^3}{m_P t_P^2} \qquad c = 1\,\frac{l_P}{t_P} \qquad \hbar = 1\,\frac{m_P l_P^2}{t_P}$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Gravitation und Planck-Länge(n)

Planck-Einheiten: $G=1\frac{l_P^3}{m_P t_P^2}$ $c=1\frac{l_P}{t_P}$ $\hbar=1\frac{m_P l_P^2}{t_P}$

$$l_P=1{,}61\times10^{-33}\,cm \qquad t_P=5{,}4\times10^{-44}\,s \qquad m_P=2{,}17\times10^{-5}\,g$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Gravitation und Planck-Länge(n)

Planck-Einheiten: $G = 1 \frac{l_P^3}{m_P t_P^2}$ $c = 1 \frac{l_P}{t_P}$ $\hbar = 1 \frac{m_P l_P^2}{t_P}$

$$l_P = 1{,}61 \times 10^{-33}\, cm \quad t_P = 5{,}4 \times 10^{-44}\, s \quad m_P = 2{,}17 \times 10^{-5}\, g$$

Poisson-Gleichung: $\nabla^2 V_g^{(4)} = 4\pi G^{(4)} \rho_m$

$$\nabla^2 V_g^{(D)} = 4\pi G^{(D)} \rho_m$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Planck-Länge in beliebigen Dimensionen

$$[G^{(D)}]\frac{M}{L^{D-1}}=[G^{(4)}]\frac{M}{L^3} \qquad \rightarrow \qquad [G^{(D)}]=L^{D-4}[G^{(4)}]$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Planck-Länge in beliebigen Dimensionen

$$[G^{(D)}]\frac{M}{L^{D-1}}=[G^{(4)}]\frac{M}{L^{3}} \quad \rightarrow \quad [G^{(D)}]=L^{D-4}[G^{(4)}]$$

$$G^{(4)}=\frac{c^{3}l_{P}^{(4)2}}{\hbar} \qquad G^{(D)}=\frac{c^{3}l_{P}^{(D)D-2}}{\hbar}$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Planck-Länge in beliebigen Dimensionen

$$[G^{(D)}]\frac{M}{L^{D-1}}=[G^{(4)}]\frac{M}{L^{3}} \qquad \rightarrow \qquad [G^{(D)}]=L^{D-4}[G^{(4)}]$$

$$G^{(4)}=\frac{c^3 l_P^{(4)2}}{\hbar} \qquad\qquad G^{(D)}=\frac{c^3 l_P^{(D)D-2}}{\hbar}$$

$$\rightarrow \qquad l_P^{(D)}=\left(l_P^2\frac{G^{(4)}}{G^{(D)}}\right)^{\frac{1}{D-2}}$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Kompaktifizierung einer zusätzlichen Raum-Dimension

$$G^{(5)} \quad \rightarrow \quad G^{(4)}$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Kompaktifizierung einer zusätzlichen Raum-Dimension

$$G^{(5)} \quad \rightarrow \quad G^{(4)}$$

Betrachte Punktmasse in 5 Dimensionen

$$M = 2\pi R m$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Kompaktifizierung einer zusätzlichen Raum-Dimension

$$G^{(5)} \quad \rightarrow \quad G^{(4)}$$

Betrachte Punktmasse in 5 Dimensionen

$$M = 2\pi R m \qquad \rho^{(5)} = m\,\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3)$$

$$\rho^{(4)} = M\,\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3)$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Kompaktifizierung einer zusätzlichen Raum-Dimension

$$G^{(5)} \quad \rightarrow \quad G^{(4)}$$

Betrachte Punktmasse in 5 Dimensionen

$$M = 2\pi R m \qquad \rho^{(5)} = m\,\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3)$$

$$\rho^{(4)} = M\,\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3)$$

$$\rightarrow \qquad \rho^{(5)} = \frac{1}{2\pi r}\,\rho^{(4)}$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Da in 5. Dimension homogene Massenverteilung

$$\nabla^2 V_g^{(5)}(x^1, x^2, x^3) = \nabla^2 V_g^{(4)}(x^1, x^2, x^3)$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

Da in 5. Dimension homogene Massenverteilung

$$\nabla^2 V_g^{(5)}(x^1, x^2, x^3) = \nabla^2 V_g^{(4)}(x^1, x^2, x^3)$$

Aus Poisson-Gleichung:

$$4\pi G^{(5)} \rho^{(5)} = 4\pi G^{(4)} \rho^{(4)}$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

$$\rightarrow \qquad \frac{G^{(5)}}{G^{(4)}} = 2\pi R \equiv l_C$$

$$\frac{G^{(D)}}{G^{(4)}} = l_C^{D-4}$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

$$\rightarrow \qquad \frac{G^{(5)}}{G^{(4)}} = 2\pi R \equiv l_C$$

$$\frac{G^{(D)}}{G^{(4)}} = l_C^{D-4}$$

Verhältnis der Gravitationskonstanten wird durch die Größe der Extra-Dimensionen bestimmt!

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

„Große" Extra-Dimensionen

$$\frac{G^{(D)}}{G^{(4)}} = l_C^{D-4} \qquad\qquad l_P^{(D)} = \left(l_P^2 \frac{G^{(4)}}{G^{(D)}} \right)^{\frac{1}{D-2}}$$

1.) Elektromagnetismus und Gravitation in höheren Dimensionen

„Große“ Extra-Dimensionen

$$\frac{G^{(D)}}{G^{(4)}} = l_C^{D-4} \qquad\qquad l_P^{(D)} = \left(l_P^2 \frac{G^{(4)}}{G^{(D)}} \right)^{\frac{1}{D-2}}$$

$$\rightarrow \qquad l_C = l_P^{(D)} \left(\frac{l_P^{(D)}}{l_P} \right)^{\frac{2}{D-4}}$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Wirkung reiner Gravitation in 5 Dimensionen

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^5 z \sqrt{g}\, R$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Wirkung reiner Gravitation in 5 Dimensionen

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^5 z \sqrt{g}\, R$$

Feldgleichungen: $R_{MN} = 0$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Wirkung reiner Gravitation in 5 Dimensionen

$$S=\frac{1}{16\pi G}\int d^5 z\sqrt{g}\,R$$

Feldgleichungen: $R_{MN}=0$

Lösung: $M_5=M_4\times S_1$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Wirkung reiner Gravitation in 5 Dimensionen

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^5 z \sqrt{g}\, R$$

Feldgleichungen: $R_{MN} = 0$

Lösung: $M_5 = M_4 \times S_1$

$$\rightarrow \quad S = \frac{1}{16\pi} \int d^4 x \int_0^{2\pi r} dy \sqrt{g}\, R$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Betrachte 5-dimensionale Vielbeine

$$E_{\Lambda}{}^{A} = \begin{pmatrix} e_{\lambda}{}^{a} & e_{\lambda}{}^{5} \\ e_{5}{}^{a} & e_{5}{}^{5} \end{pmatrix}$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Betrachte 5-dimensionale Vielbeine

$$E_\Lambda{}^A = \begin{pmatrix} e_\lambda{}^a & e_\lambda{}^5 \\ e_5{}^a & e_5{}^5 \end{pmatrix}$$

Invarianz unter

- allg. Koordinaten-Transformationen

$$z' = z'(z)$$

$$E'_\Lambda{}^A = \frac{\partial z^\Pi}{\partial z'^\Lambda} E_\Pi{}^A$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle"

Betrachte 5-dimensionale Vielbeine

$$E_\Lambda{}^A = \begin{pmatrix} e_\lambda{}^a & e_\lambda{}^5 \\ e_5{}^a & e_5{}^5 \end{pmatrix}$$

Invarianz unter

- allg. Koordinaten-Transformationen

$$z' = z'(z)$$

$$E'_\Lambda{}^A = \frac{\partial z^\Pi}{\partial z'^\Lambda} E_\Pi{}^A$$

- lokalen Lorentz-Transformationen

$$E'_\Lambda{}^A = \Omega^A{}_B E_\Lambda{}^B$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Ausnutzen der Invarianz:

- Vektor $e_5^{\ A}$ wird in 5-Richtung ($e_5^{\ a} = 0$) gedreht

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Ausnutzen der Invarianz:

- Vektor $e_5{}^A$ wird in 5-Richtung ($e_5{}^a = 0$) gedreht

$$E_\Lambda{}^A = \begin{pmatrix} e_\lambda{}^a & e_\lambda{}^5 \\ 0 & e_5{}^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{-1/2} e_\lambda{}^a & \kappa A_\lambda \phi \\ 0 & \phi \end{pmatrix}$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Metrik: $$g_{\Lambda\Pi} = E_{\Lambda}{}^{A} E_{\Pi}{}^{B} \eta_{AB}$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Metrik: $$g_{\Lambda\Pi} = E_\Lambda{}^A E_\Pi{}^B \eta_{AB}$$

$$= \begin{pmatrix} \phi^{-1} g_{\mu\nu} - \kappa^2 \phi^2 A_\mu A_\nu & -\kappa \phi^2 A_\mu \\ -\kappa \phi^2 A_\nu & -\phi^2 \end{pmatrix}$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Krümmungstensor:

$$R_{\Lambda \Pi}{}^{AB} = \partial_{\Lambda} \Omega_{\Pi}{}^{AB} - \partial_{\Pi} \Omega_{\Lambda}{}^{AB} + \Omega_{\Lambda}{}^{AC} \Omega_{\Pi C}{}^{B} - \Omega_{\Pi}{}^{AC} \Omega_{\Lambda C}{}^{B}$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Krümmungstensor:

$$R_{\Lambda\Pi}{}^{AB} = \partial_\Lambda \Omega_\Pi{}^{AB} - \partial_\Pi \Omega_\Lambda{}^{AB} + \Omega_\Lambda{}^{AC}\, \Omega_{\Pi C}{}^{B} - \Omega_\Pi{}^{AC}\, \Omega_{\Lambda C}{}^{B}$$

$$\rightarrow \qquad S = \frac{1}{16\pi} \int d^5 z\, E\, E^\Lambda{}_A E^\Pi{}_B \left(\partial_\Lambda \Omega_\Pi{}^{AB} + \Omega_\Lambda{}^{AC}\, \Omega_{\Pi C}{}^{B} - (\Lambda \Leftrightarrow \Pi) \right)$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Krümmungstensor:

$$R_{\Lambda\Pi}{}^{AB} = \partial_\Lambda \Omega_\Pi{}^{AB} - \partial_\Pi \Omega_\Lambda{}^{AB} + \Omega_\Lambda{}^{AC} \Omega_{\Pi C}{}^{B} - \Omega_\Pi{}^{AC} \Omega_{\Lambda C}{}^{B}$$

$$\rightarrow \quad S = \frac{1}{16\pi} \int d^5 z\, E\, E^\Lambda{}_A E^\Pi{}_B (\partial_\Lambda \Omega_\Pi{}^{AB} + \Omega_\Lambda{}^{AC} \Omega_{\Pi C}{}^{B} - (\Lambda \Leftrightarrow \Pi))$$

Partielle Integration liefert

$$\rightarrow \quad S = \frac{1}{16\pi} \int d^5 z\, E\, (\Omega^A{}_{BC} \Omega^{BC}{}_A + \Omega^A{}_{AB} \Omega^C{}_B{}^C)$$

$$\Omega^A{}_{BC} \equiv E_\Lambda{}^A \Omega^\Lambda{}_{BC}$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Zusammenhang lässt sich schreiben als

$$\Omega_{ABC} = -E_{[A}{}^{\Lambda} E_{B]}{}^{\Pi} \partial_{\Pi} E_{\Lambda C} + E_{[B}{}^{\Lambda} E_{C]}{}^{\Pi} \partial_{\Pi} E_{\Lambda A} - E_{[C}{}^{\Lambda} E_{A]}{}^{\Pi} \partial_{\Pi} E_{\Lambda B}$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Zusammenhang lässt sich schreiben als

$$\Omega_{ABC} = -E_{[A}{}^{\Lambda} E_{B]}{}^{\Pi} \partial_{\Pi} E_{\Lambda C} + E_{[B}{}^{\Lambda} E_{C]}{}^{\Pi} \partial_{\Pi} E_{\Lambda A} - E_{[C}{}^{\Lambda} E_{A]}{}^{\Pi} \partial_{\Pi} E_{\Lambda B}$$

Fourier-Zerlegung der Felder:

$$e_{\lambda}{}^{a}(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} e_{\lambda}{}^{a}{}_{(n)}(x) \exp\left(\frac{iny}{r}\right)$$

$$A_{\lambda}(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_{\lambda(n)}(x) \exp\left(\frac{iny}{r}\right)$$

$$\phi(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \phi_{(n)}(x) \exp\left(\frac{iny}{r}\right)$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Die n-te Fourierkomponente beschreibt Teilchen der Masse:

$$m_{(n)} = \frac{n}{r}$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Die n-te Fourierkomponente beschreibt Teilchen der Masse:

$$m_{(n)} = \frac{n}{r}$$

Vernachlässigung aller massiven Moden:

$$S = \int d^4 x \sqrt{g_{(0)}} [\frac{-1}{4\kappa^2} R(g_{(0)}) - \frac{1}{4} \phi_{(0)} F_{\mu\nu(0)} F^{\mu\nu}{}_{(0)} + \frac{1}{6\kappa^2 \phi_{(0)}^2} \partial^\mu \phi_{(0)} \partial_\mu \phi_{(0)}]$$

$$g_{\mu\nu(0)} = e_\mu{}^a{}_{(0)} e_\nu{}^a{}_{(0)}$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Symmetrie in 5 Dimensionen: SO(1,4) Lorentz-Invarianz

Symmetrie in 4 Dimensionen: SO(1,3) Lorentz-Invarianz

gebrochen durch die $M_4 \times S^1$-Topologie des Grundzustands

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Betrachte Transformationen:

$$x'^{\mu} = x^{\mu}$$
$$y' = y + f(x^{\mu})$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Betrachte Transformationen:

$$x'^{\mu} = x^{\mu}$$

$$y' = y + f(x^{\mu})$$

Man findet:

$$e'_{\lambda}{}^{a}(x, y') = e_{\lambda}{}^{a}(x, y)$$

$$A'_{\lambda}(x, y') = A_{\lambda}(x, y) - \frac{1}{\kappa} \partial_{\lambda} f(x^{\mu})$$

$$\phi'(x, y') = \phi(x, y)$$

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Zusammenfassung:

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Zusammenfassung:

- formale Vereinigung von Gravitation und Elektromagnetismus

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Zusammenfassung:

- formale Vereinigung von Gravitation und Elektromagnetismus
- dimensionale Reduktion: Aufwickeln einer zusätzlichen Raum-Dimension zu einem Kreis

2.) „Kaluza-Klein-Miracle“

Zusammenfassung:

- formale Vereinigung von Gravitation und Elektromagnetismus
- dimensionale Reduktion: Aufwickeln einer zusätzlichen Raum-Dimension zu einem Kreis
- Probleme:
  Kosmologische Konstante
  Einbettung chiraler Fermionen

Hier sollte nichts mehr stehen...