# Solitonen und Instantonen

Christel Kamp

11. November 1998

Dieses Manuskript erhebt weder Anspruch auf Vollständigkeit noch können inhaltliche Fehler ausgeschlossen werden.Über entsprechende Fehlerhinweise würde ich mich allerdings freuen.

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Formelsammlung

Im folgenden sollen die wichtigsten Formeln der Pfadintegraldarstellung der Quantenmechanik und der Quantenfeldtheorie in der Minkowsischen und in der Euklidischen Formulierung zusammengestellt werden.

## 1.1 Quantenmechanik

Klassische Lagrange-Funktion

$$L\left(q,\dot{q}\right)=\frac{1}{2}\sum_{a}m_a\dot{q}_a^2-V\left(q\right) \tag{1}$$

Wirkungsfunktional

$$S[q]=\int_{t_i}^{t_f}L(q(s),\dot{q}(s))\,ds \tag{2}$$

Hierbei seien q und $\dot{q}$ Vektoren der verallgemeinerten Koordinaten (bzw. deren Zeitableitungen ), die durch a indiziert werden.Die klassischen Bewegungsgleichungen erhält man durch lineare Variation von S bzgl. q ($\delta S=0$):

$$\frac{\partial L}{\partial q_a}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_a}\right]=0 \tag{3}$$

(Euler-Lagrange-Gleichungen)

Für die folgende quantenmechanische Übergangsamplitude hat man die Darstellung durch das Feynmansche Pfadintegral (Minkowsische Formulierung):

$$\langle q_f,t_f|q_i,t_i\rangle=\int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f}[d^Dq]\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[q]\right) \tag{4}$$

$$[d^Dq]=const\prod_{t_i<t<t_f}d^Dq(t) \tag{5}$$

O.E.:

$$\begin{aligned} t_i &= -\frac{T}{2} & t_f &= +\frac{T}{2} \\ q_i\left(-\frac{T}{2}\right) &= q & q_f\left(+\frac{T}{2}\right) &= q' \end{aligned} \tag{6}$$

Hiermit erhält man:

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \langle q' | U(it) | q \rangle \tag{7}$$

Wobei U(it) den Zeitentwicklungsoperator darstellt:

$$U(it) = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\hat{H}(\hat{p}, \hat{q})\right) \tag{8}$$

Man kann nun die Variable it als beliebige komplexe Größe auffassen und erhält folgende Interpolationsformel (Wick-Rotation):

$$\langle q' | U(e^{i\theta}T) | q \rangle = \int_q^{q'} [d^D q] \exp\left(\frac{S_\theta[q]}{\hbar}\right) \tag{9}$$

$$S_\theta[q_\theta] = -e^{-i\theta} \int_{-\frac{T_\theta}{2}}^{+\frac{T_\theta}{2}} dt_\theta \left(\frac{1}{2}\sum_a m_a \dot{q}^2_{\theta_a}(t_\theta) + e^{2i\theta} V(q_\theta)\right) \tag{10}$$

$$t_\theta = e^{-i\theta} t \qquad q_\theta(t_\theta) = q(t) \tag{11}$$

Hiermit erhält man die Spezialfälle:

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ Feynman-/Minkowski-Pfadintegral

- $\theta = 0$ Euklidisches Pfadintegral

Im Euklidischen Fall wechselt also der Potentialterm in der Lagrange-Funktion (1) das Vorzeichen.

### 1.2 Klassische Feldtheorie und Quantenfeldtheorie

Zunächst soll nur eine Feldtheorie mit einem skalaren Feld und folgender Lagrange-Dichte betrachtet werden:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi) \qquad U(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{12}$$

$$S[\phi] = \int dt \int d^D \vec{x} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \int d^{D+1} x \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi) \tag{13}$$

D bezeichne die Anzahl der Raumdimensionen, $\vec{x}$ einen Vektor im Ortsraum, x einen Vierervektor.

Durch Variation von S gelangt man wieder zu den
Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right] = 0 \tag{14}$$

Für die Hamilton- bzw.Energiedichte erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\dot{\phi} - \mathcal{L} &(15)\\ &= \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial_i\phi + U(\phi) &(16)\end{aligned}$$

(i laufe über die Raumdimensionen)

In der Quantenfeldtheorie besitzt das erzeugene Funktional Z[J] eine ähnliche Funktion wie das quantenmechanische Pfadintegral:

$$Z[J] \sim \langle 0, \infty | 0, -\infty\rangle^J \tag{17}$$

Es beschreibt die Übergangsamplitude vom Vakuumzustand bei $t = -\infty$ zum Vakuumzustand bei $t = +\infty$ unter Anwesenheit einer Quelle J.

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int\ d^4x(\mathcal{L} + J\phi)\right)}{\int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int\ d^4x\mathcal{L}\right)} \tag{18}$$

$$\mathcal{D}\phi = const. \prod_{x \in R^{D+1}} d\phi(x) \tag{19}$$

Auch hier kann durch Wick-Rotation zwischen der Euklidischen Wirkung und der Minkowskischen Wirkung interpoliert werden.

$$S_\theta[\phi] = -e^{-i\theta}\int dt_\theta \int d^D\vec{x}\, \mathcal{L}_\theta(\phi_\theta(t_\theta, \vec{x}), \dot{\phi}_\theta(t_\theta, \vec{x})) \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_\theta(\phi_\theta(t_\theta, \vec{x}), \dot{\phi}_\theta(t_\theta, \vec{x}))\\ &= \frac{1}{2}\dot{\phi}_\theta(t_\theta, \vec{x})^2 + e^{2i\theta}\partial_i\phi_\theta(t_\theta, \vec{x})\partial_i\phi_\theta(t_\theta, \vec{x}) + e^{2i\theta}V(\phi_\theta(\vec{x}) \qquad (21)\end{aligned}$$

$$t_\theta = e^{-i\theta}t \qquad \phi_\theta(t_\theta, \vec{x}) = \phi(t, \vec{x}) \tag{22}$$

Hiermit erhält man auch wieder die folgenden Spezialfälle:

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ Minkowskische Wirkung mit

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}\partial_0\phi\partial_0\phi - \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial_i\phi - U(\phi) \tag{23}$$

- $\theta = 0$ Euklidische Wirkung mit

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}\partial_0\phi\partial_0\phi + \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial_i\phi + U(\phi) \tag{24}$$

# 2 Lumps, solitäre Wellen, Solitonen und Instantonen

In der Literatur werden keine einheitlichen Definitionen für diese Begriffe angegeben. Vielmehr werden häufig dem jeweiligen Problem angepaßte Kriterien angegeben.Hier sollen nun COLEMAN und RAJARAMAN zitiert werden.

## 2.1 Klassifikation nach COLEMAN

### 2.1.1 Lumps (solitäre Wellen)

*Lumps* sind nicht-singuläre Lösungen der Bewegungsgleichungen endlicher Energie,d.h.

$$E = \int d^D\vec{x}\,\mathcal{H} = \int d^D\vec{x}\frac{1}{2}\partial_0\phi\partial_0\phi + \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial_i\phi + U(\phi) < \infty \tag{25}$$

Ihre wesentliche Eigenschaft ist jedoch, daß sie *nicht-dissipativ* sind, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} \max_{\vec{x}} \mathcal{H}(\vec{x},t) > 0 \tag{26}$$

### 2.1.2 Instantonen

*Instantonen* sind nicht-singuläre Lösungen der Euklidischen Bewegungsgleichungen mit endlicher Euklidischer Wirkung.D.h.

$$S_E = \int dt \int d^D\vec{x}\frac{1}{2}\partial_0\phi\partial_0\phi + \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial_i\phi + U(\phi) < \infty \tag{27}$$

Im Gegensatz zu Lumps, die im Raum lokalisierte Objekte sind, sind Instantonen also in Raum und Zeit lokalisierte Objekte.

## 2.2 Klassifikation nach RAJARAMAN

### 2.2.1 Solitäre Wellen

*Solitäre Wellen* sind Lösungen der (nicht-linearen) Bewegungsgleichungen mit lokalisierter Energiedichte $\mathcal{H}$ der Form:

$$\mathcal{H}(\vec{x},t) = \mathcal{H}(\vec{x} - \vec{v}t) \tag{28}$$

Insbesondere tragen sie endliche Gesamtenergie.

### 2.2.2 Solitonen

*Solitonen* sind solitäre Wellen, für die zusätzlich gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(\vec{x},t) &\overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{N} \mathcal{H}_0(\vec{x}-\vec{a}_i-\vec{u}_i t) \\
\Longrightarrow \mathcal{H}(\vec{x},t) &\overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{N} \mathcal{H}_0(\vec{x}-\vec{a}_i-\vec{u}_i t+\vec{\delta}_i)
\end{aligned}
$$

(asymptotisches Superpositionsprinzip)

### 2.2.3 Instantonen

*Instatonen* sind nicht-singuläre Lösungen der Euklidischen Feldgleichungen mit lokalisierter Euklidischer Lagrange-Dichte, d.h. sie besitzen insbesondere endliche Euklidische Wirkung.

## 2.3 Bemerkungen

- Da es i.a. sehr schwer zu überprüfen ist, ob eine Gleichung Soliton-Lösungen besitzt, und auch bereits solitäre Wellen „hinreichend gute Eigenschaften“ für die zu behandelnden Proleme besitzen, werden diese Begriffe im folgenden synonym verwendet.

- Instantonen in D Raumdimensionen entsprechen gerade den statischen Solitonen in D+1 Raumdimensionen.

## 2.4 Derrick's Theorem

Es sei ein System mit folgender Lagrange-Dichte gegeben:

$$
\mathcal{L}(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\phi}\partial^\mu\vec{\phi} - U(\vec{\phi}(\vec{x},t)) \tag{29}
$$

$$
\vec{\phi} = (\phi_1, ..., \phi_N) \tag{30}
$$

N gekoppelte skalare Felder
Für die Raumdimension$D \geq 3$ existieren keine nicht-trivialen statischen Solitonen.

- Es wird keine Aussage über zeitabhängige Solitonen gemacht,solche Lösungen können existieren.

- Es wird außerdem keine Aussage gemacht über Systeme mit Vektor- bzw. Eichfeldern.

## 2.5 Klassifikation der Solitonen nach Homotopieklassen

Betrachte nun ein System mit spontaner Symmetriebrechung und folgender Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + D_\mu \phi^* D^\mu \phi - U(\phi) \tag{31}$$

a indiziere die Eichfelder bzw.die Generatoren der Symmetriegruppe (Eichgruppe) G,$F^{a\mu\nu}$ sei der Feldstärketensor, $D_\mu$ die kovariante Ableitung. In der axialen Eichung $A^a_0(x) = 0 \, \forall x, a$ erhält man:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0 A^a_i)^2 - \frac{1}{4}(F^a_{ij})^2 + \partial_0 \phi^* \partial_0 \phi - D_i \phi^* D_i \phi - U(\phi) \tag{32}$$

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \, \frac{1}{2}(\partial_0 A^a_i)^2 + \partial_0 \phi^* \partial_0 \phi + \int d^3x \, \frac{1}{4}(F^a_{ij})^2 + D_i \phi^* D_i \phi + U(\phi) \\ &= T + V \end{aligned} \tag{33}$$

Hierbei sei das Potential U so gewählt, daß es für die klassischen Grundzustände, d.h. Zustände minimaler Energie, verschwindet. Hier sollen nur Lösungen für das skalare Feld $\phi$ untersucht werden. Nun entsprechen nichtsinguläre Lösungen endlicher Energie gerade nicht singulären Anfangswerten $\phi(\vec{x}, t)$ und $\partial_0 \phi(\vec{x}, t)$ zu einer beliebigen aber festen Zeit. Außerdem muß $\lim_{\vec{x} \to \pm\infty} \phi(\vec{x}, t)$ existieren und Nullstelle von U sein, um die Forderung endlicher Energie zu erfüllen.
$\phi$ stellt also eine Abbildung vom $\mathcal{S}^{D-1}$,der Sphäre mit Radius $r \to \infty$ im Ortsraum in die Menge der Nullstellen von U ($= NS(U)$) im Feldraum dar.

$$\phi : \mathcal{S}^{D-1} \longrightarrow NS(U) \tag{34}$$

Sei nun $H \subseteq G$ die ungebrochen Gruppe, d.h.$\forall h \in H$ ist $h\phi_0 = \phi_0$, wobei $\phi_0$ eine Nullstelle von U ist ($\phi_0 \in NS(U)$).
Es wird nun angenommen, daß alle Nullstellen von U von der Form $g\phi_0$ für ein $g \in G$ sind (Es ist klar, daß $g\phi_0$ Nullstelle ist !).D.h.

$$NS(U) = \mathcal{O}_{\phi_0} = G\phi_0 = \{g\phi_0 | g \in G\} \tag{35}$$

$\mathcal{O}_{\phi_0} = G\phi_0$ heißt die Bahn oder das Orbit von $\phi_0$.
Dies schließt aus, daß zusätzlich zur Eichgruppe eine weitere innere Symmetriegruppe existiert. Auch kann keine zufällige Entartung des Grundzustandes vorliegen. Nun ist $H = G_{\phi_0} = \{g \in G | g\phi_0 = \phi_0\}$ (Stabilisator von $\phi_0$in G) und es gilt:

$$G/H \cong NS(U) \tag{36}$$

$$\phi : \mathcal{S}^{D-1} \longrightarrow G/H \qquad (37)$$

Damit entsprechen die Zusammenhangskomponenten des Raumes der nichtsingulären Lösungen endlicher Energie den Homotopieklassen der Abbildungen von $\mathcal{S}^{D-1}$ ($\infty$-Sphäre im Ortsraum in D Dimensionen) nach G/H (Nullstellen von U im Feldraum).Diese Tatsache ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Bestimmung der Lösungen der Feldgleichungen oder doch wenigstens ihrer wesentlichen Struktur.

Da die Zeitentwicklung von $\phi$ stetig ist, können sich zwei Lösungen der Feldgleichungen $\phi_1, \phi_2$ natürlich auch nicht zeitlich ineinander entwickeln, sofern sie nicht in derselben Homotopieklasse liegen. Dies kann als ein erster *topologischer* Erhaltungssatz aufgefaßt werden und sichert die Stabilität einer solchen Lösung.

Zu beachten bleibt, daß hier hinreichende Bedingungen zur Auffindung Lösungen endlicher Energie angegeben werden - jedoch müssen diese nicht notwendigerweise nicht-dissipativ sein.

Diese recht technischen Ausfürungen sollen später am Beispiel klargemacht werden.

# 3 Klassische Soliton- und Instanton-Lösungen für das Doppelmuldenpotential

## 3.1 Soliton-Lösungen (1+1 Dimensionen,statisch)

Es soll ein System mit folgender Lagrange-Funktion untersucht werden:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_1\phi)^2 - U(\phi) \tag{38}$$

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - a^2)^2 = \frac{\lambda}{2}\phi^4 - \mu^2\phi^2 + \frac{\mu^4}{2\lambda} \qquad a^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \tag{39}$$

Damit erhält man die Bewegungsgleichungen

$$-\frac{\partial U(\phi)}{\partial\phi} = \ddot{\phi} - \partial_1\partial_1\phi \tag{40}$$

und für das Energiefunktional (x bezeichne nur die Ortskomponente)

$$E[\phi] = \int dx\, \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_1\phi)^2 + U(\phi) \tag{41}$$

Für statische Lösungen reduziert sich die Bewegungsgleichung auf:

$$\frac{\partial U(\phi)}{\partial\phi} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \tag{42}$$

Seien nun $\phi_0^i$, i=1...M, die Nullstellen von U, dann muß für Lösungen endlicher Energie gelten:

$$\phi(x) \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} \phi_0^i \tag{43}$$

Man kann sich die Lösung dieses Problems erleichtern, indem man ein mechanisches Analogon heranzieht.Wenn man die folgenden Ersetznungen vollzieht

$$\begin{array}{ccc} x & \longleftrightarrow & t \\ \phi & \longleftrightarrow & x \end{array}$$

,wobei x die Ortskoordinate eines Teilchens mit Masse 1 ist, das sich im Potential $-U(\phi)$ bewegt.Hierbei ist

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - U(\phi) \tag{44}$$

erhalten. Aufgrund er Randbedingungen $\lim_{x\to\pm\infty} W = 0$ ist $W \equiv 0$.D.h.

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\sqrt{2U(\phi)} \tag{45}$$

$$x = \pm \int_{\phi_0=\phi(0)}^{\phi} d\phi' \sqrt{2U(\phi')} \tag{46}$$

Damit erhält man

$$\phi = \pm a \tanh(\mu x) \tag{47}$$

Diese Lösungen werden auch als Kink und Antikink bezeichnet.Aber auch

$$\phi = \pm a \tanh(\mu(x - x_0)) \tag{48}$$

löst die Bewegungsgleichungen.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &= 2U(\phi(x)) \\ &= \lambda a^4 sech^4(\mu(x - x_0)) \\ &= 2\lambda a^4 \frac{1}{e^{\mu(x-x_0)} + e^{-\mu(x-x_0)}} \end{aligned} \tag{49}$$

$\mathcal{H}$ ist um $x_0$ lokalisiert und die Kink-Energie oder die klassische Masse beträgt:

$$E = \int dx \mathcal{H}(x) = \frac{4\mu^3}{3\lambda} \tag{50}$$

Für die Kinks bzw.Antikinks gilt $\phi(\infty, t) = -\phi(-\infty, t)$, so daß aufgrund der Stetigkeit von $\phi$ in x für beliebige t ein $x_{0,t}$ existiert mit $\phi(x_{0,t}, t) = 0$ und $\mathcal{H}(x, t) \geq U(0) = \frac{\lambda}{2} a^4$.Damit ist

$$\lim_{t\to\infty} \max_x \mathcal{H}(x, t) \geq \frac{\lambda}{2} a^4 > 0 \tag{51}$$

D.h. Kinks bzw. Antikinks sind nicht-dissipative Lösungen der Bewegungsgleichungen. Neben den Kinks und Antikinks gibt es natürlich auch noch die trivialen Lösungen

$$\phi(x) = \pm a \tag{52}$$

D.h. die Lösungen endlicher Energie zerfallen in 4 (Homotopie-)Klassen indiziert durch ihre Werte für $x \to \pm\infty$

$$\begin{aligned} (-a, a) &\quad \phi(x) = a \tanh(\mu x) && (53) \\ (a, -a) &\quad \phi(x) = -a \tanh(\mu x) && (54) \\ (a, a) &\quad \phi = +a && (55) \\ (-a, -a) &\quad \phi = -a && \end{aligned}$$

Hiebei sind die angegebenen Funktionen als Repräsentanten der Homotopieklassen aufzufassen, denn der Lösungsraum enthält auch die verschobenen Kinks und Antikinks sowie zeitabhängige Lösungen. Man sieht hier

auch noch einmal direkt, daß sich die Lösungen nur innerhalb ihrer Homotopieklasse zeitlich entwickeln können.Da $\lim_{x\to\infty}\phi(x,t) = \pm a$ und die Nullstellen von U diskret liegen, die Zeitentwicklung aber stetig ist, muß gelten:$\partial_0\phi(\infty,t) = 0$(,was natürlich auch direkt aus der Forderung endlicher Energe folgt).D.h. jede Lösung behält ihr Homotopieklasse mit dem Verlauf der Zeit bei.
So kommt man schließlich zum Begriff der *topologischen Ladung* Q mit dem zugeörigen erhaltenen Strom $k^\mu$:

$$Q = \frac{1}{a}(\phi(x=\infty) - \phi(x=-\infty)) \tag{57}$$

$$k^\mu = \frac{1}{a}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi \tag{58}$$

($\epsilon^{\mu\nu}$ ist antisymmetrisch mit $\epsilon^{01} = 1$)

$$\partial_\mu k^\mu = 0 \tag{59}$$

$$Q = \int dx k_0 \tag{60}$$

Hierbei ist zu beachten, daß $k^\mu$ kein NOETHER-Strom ist, d.h. er resultiert nicht aus einer Invarianz der Lagrange-Dichte unter einer Symmetrietransformation, sondern er ist ein „topologischer Strom“.

### 3.2 Instanton-Lösungen (1 Dimension)

Es stellt sich natürlich die Frage,warum hier das Soliton-Problem so ausführlich diskutiert wurde, wenn es doch eigentlich um Instantonen gehen soll.Wie jedoch schon in (2.3) bemerkt wurde, entsprechen Instantonen in D Raumdimensionen gerade den statischen Solitonen in D+1 Raumdimensionen. Gehen wir von der Situation im vorherigen Abschnitt aus, so ergeben sich nun Instantonen in der Raumdimension 0, d.h. man hat Funktionen $\phi(\tau)$. Diese fassen wir im folgenden einfach wieder als Trajektorien $x(\tau)$ auf.Es sind also Lösungen der Euklidischen Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dV}{dx} \tag{61}$$

gesucht,die endliche Wirkung bsitzen.

$$S_E = \int d\tau \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + V(x) < \infty \tag{62}$$

$$V(x) = \frac{\lambda}{2}(x^2 - a^2)^2 \tag{63}$$

Dies entspricht nun gerade den Gleichungen (41) und (42) für statische Lösungen.Damit ist dieses Problem bereits vollständig gelöst. Neben den trivialen Lösungen gibt es noch die Instantonen bzw. Antiinstantonen

$$x(\tau) = \pm a \tanh(\mu(\tau - \tau_0)) \tag{64}$$

$$a^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \tag{65}$$

mit topologischer Ladung

$$Q = \pm 1 \tag{66}$$

# 4 Instantonen und Tunnelprozesse

## 4.1 Bekanntes zu Tunnelprozeßen und erste Beobachtungen

Es soll ein Teilchen in einem Potential

$$V(x) = \frac{\lambda}{2}(x^2 - a^2)^2 \tag{67}$$

betrachtet werden.Klassisch gibt es zwei Grundzustände,d.h. Zustände minimaler Energie, bei $\pm a$.In quantenmechanischen Systemen treten jedoch Tunneleffekte auf, so daß der neue Grundzustand $\frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |-a\rangle)$ ist.Die Gesamtenergie beträgt:

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) \tag{68}$$

Ein Tunnelprozeß liegt nun gerade dann vor, wenn gilt $E < V$, also für $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 < 0$, d.h. für imaginäre Zeiten $t = i\tau$. Wir befinden uns also wieder in der Euklidischen Formulierung mit

$$E = -\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + V(x) \tag{69}$$

Für $E = 0$ erhält man wieder:

$$x(\tau) = a\tanh(\mu(\tau - \tau_0)) \quad a^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \tag{70}$$

Zur Erinnerung sei hier noch einmal die WKB-Formel für den Transmissionskoeffizienten bei Tunnelprozeßen angegeben ($x_1, x_2$ seinen die klassischen Umkehrpunkte):

$$|\, T(E) \,| \approx \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{2(V-E)}\right)(1 + \mathcal{O}(\hbar)) \tag{71}$$

Für $E = 0$ bedeutet dies aber gerade:

$$|\, T(E=0) \,| \approx \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_{-a}^{a} dx\sqrt{2V}\right)(1 + \mathcal{O}(\hbar)) \tag{72}$$

Im Euklidischen Pfadintegralformalismus entspricht dies gerade folgender exakten Formel:

$$\langle a \mid e^{-\frac{\hat{H}T_E}{\hbar}} \mid -a\rangle = \int [dx] e^{-\frac{S_E}{\hbar}} \tag{73}$$

Entwickelt man nun $S_E$ um den einen stationären Punkt $S_{E_0}$, d.h. um die Wirkung der klassischen Trajektorie, nimmt nur den Term 0-ter Ordnung mit, so erhält man:

$$\langle a \mid e^{-\frac{\hat{H}T_E}{\hbar}} \mid -a\rangle \sim e^{-\frac{S_{E_0}}{\hbar}} \tag{74}$$

Nun ist aber:

$$S_{E_0}(E=0) = \int d\tau \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + V(x) = \int_{-a}^{a} dx\sqrt{2V} \tag{75}$$

D.h. es wird gerade die WKB-Formel reproduziert. Im folgenden Kapitel soll dieses Konzept weiter ausgearbeitet werden und es werden Korrekturen höerer Ordnung bestimmt werden.

## 4.2 Stationary Phase Approximation(SPA) und Instantonen

In diesem Kapitel soll folgende Übergangsamplitude mit Hilfe der SPA bestimmt werden:

$$\langle x_f \mid e^{-\frac{\hat{H}T_E}{\hbar}} \mid x_i\rangle = \langle a \mid e^{-\frac{\hat{H}T_E}{\hbar}} \mid -a\rangle = N\int_{-a=x\left(-\frac{T_E}{2}\right)}^{a=x\left(\frac{T_E}{2}\right)} [dx] e^{-\frac{S_E}{\hbar}} \tag{76}$$

$$S_E[x] = \int_{-\frac{T_E}{2}}^{\frac{T_E}{2}} d\tau \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + V(x) \tag{77}$$

Von nun an soll jedoch der Index E aus Gründen der Übersichtlichkeit unterdrückt werden,jedoch wird weiterhin Euklidisch gerechnet. Insbesondere ist T eher eine Hilfsgröße, denn es wird noch der Grenzfall $T \to \infty$ zu untersuchen sein.
Sei $\bar{x}$ nun eine Lösung der Bewegungsgleichungen,d.h. ein stationärer Punkt der Wirkung S und $x(\tau) = \bar{x}(\tau) + y(\tau)$.

$$S[\bar{x}+y] = S[\bar{x}] + \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau' y(\tau)\left(\frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(\tau)\delta x(\tau')}\right)_{\bar{x}} y(\tau') + \mathcal{O}(y^3) \tag{78}$$

Ist $y(\tau) = x_n(\tau)$ eine Eigenfunktion des Operators $\hat{\mathcal{O}}$ unter dem Integral, so wird dieser diagonal:

$$\hat{\mathcal{O}}_{\bar{x}} = \left(\frac{\delta^2 S[x]}{\delta x(\tau)^2}\right)_{\bar{x}} \tag{79}$$

$$S[\bar{x}+x_n] = S[\bar{x}] + \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x_n(\tau)\hat{\mathcal{O}}_{\bar{x}} x_n(\tau) + \mathcal{O}(x_n^3) \tag{80}$$

Die $\{x_n\}$ seien ein VONS von Eigenfunktionen zu $\hat{\mathcal{O}}_{\bar{x}}$ und

$$x(\tau) = \bar{x}(\tau) + \sum_n c_c x_n(\tau) \tag{81}$$

$$[dx] = \prod_n (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} dc_n \tag{82}$$

Für $\hat{\mathcal{O}}_{\bar{x}}$ errechnet man:

$$\hat{\mathcal{O}}_{\bar{x}} = -\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}_{|\bar{x}(\tau)} \tag{83}$$

Nun ist ($\{\lambda_n\}$ seien die Eigenwerte zu den $\{x_n\}$):

$$\begin{aligned}
\langle a \mid e^{-\frac{\hat{H}T}{\hbar}} \mid -a\rangle &\approx Ne^{-\frac{S[\bar{x}]}{\hbar}} \int \prod_n \frac{dc_n}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{2\hbar}\lambda_n c_n^2}(1+\mathcal{O}(\hbar)) \\
&= Ne^{-\frac{S[\bar{x}]}{\hbar}} \left(\det \hat{\mathcal{O}}_{\bar{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} (1+\mathcal{O}(\hbar)) \\
&= Ne^{-\frac{S[\bar{x}]}{\hbar}} \prod_n \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{2}} (1+\mathcal{O}(\hbar))
\end{aligned} \tag{84}$$

Es gibt nun nach Kapitel 3 gerade die trivialen Lösungen der Bewegungsgleichungn $\pm a$ sowie für $T \to \infty$ die Instanton- und Antiinstantonlösungen als stationïe Punkte des Wirkungsfunkionals.Letztere sollen im folgenden als $\bar{x}_\pm$ bezeichnet werden.
Zunächst sollen hier die trivialen Lösungen betrachtet werden,für die gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{O}}_{\pm a} &= -\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}_{|\pm a} \\
&= -\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + V''(\pm a) \\
&= -\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \omega^2
\end{aligned} \tag{85}$$

Die Eigenfunktionen von $\hat{\mathcal{O}}_{\pm a}$ sind offenbar:

$$x_n^{\pm a} = \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \tag{86}$$

$$\begin{aligned}
N(\det \hat{\mathcal{O}}_{\pm a})^{-\frac{1}{2}} &= N \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2\pi^2}{T^2} + \omega^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= NF(T) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega^2 T^2}{n^2\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{\omega}{\sinh \omega T}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{T\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{\omega}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega T}{2}}
\end{aligned} \tag{87}$$

Hierbei wurde das Integrationsmaß so gewählt, daß $NF(T) = (2\pi i\hbar T)^{-\frac{1}{2}}$, um eine in sich konsistente Theorie zu definieren.Zu erwähnen bleibt noch, daß $e^{S[\pm a]} = 1$.Außerdem besitzt $\hat{\mathcal{O}}_{\pm a}$ keine Nullmoden.
Nun sollen die asymptotisch stationären Punkte der Wirkung, die Instantonen und Antiinstantonen, untersucht werden. Hier treten verschiedene Probleme auf:

1. Für $T \to \infty$ wird S translationsinvariant, so daß neben $\bar{x}_\pm(\tau)$ auch $\bar{x}_\pm(\tau - \tau_0)$ für beliebige $\tau_0$ stationärer Punkt von S ist. Dies führt zu einer Divergenz im Gauß-Integral oder äquivalent zu einer Nullmode in der Determinante. Dies soll zunächst durch einen Faktor P berücksichtigt werden, wobei det$'$ die Determinante unter Ausnahme der Nullmode bezeichne:

$$\langle a \mid e^{-\frac{\hat{H}T}{\hbar}} \mid -a\rangle \approx NPe^{-\frac{S[\bar{x}_\pm]}{\hbar}} \left(\det{}'\hat{\mathcal{O}}_{\bar{x}_\pm}\right)^{-\frac{1}{2}} (1 + \mathcal{O}(\hbar)) \tag{88}$$

   Andererseits kann die normierte Eigenfunktion zum Eigenwert 0 auch direkt angegeben werden:

$$x_0^{\bar{x}_\pm}(\tau) = x_0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{S[\bar{x}_\pm]}} \frac{d\bar{x}_\pm(\tau - \tau_0)}{d\tau} \tag{89}$$

   Bei der Integration über den Entwicklungskoeffizienten $c_1(O.E.\lambda_1 = 0)$ in (84) ergibt sich daraus offenbar eine Divergenz. Nun ist eine Variation in $c_1$ um $\bar{x}_\pm$ gegeben durch

$$dx = x_0(\tau)dc_1 = \frac{1}{\sqrt{S[\bar{x}_\pm]}} \frac{d\bar{x}_\pm(\tau - \tau_0)}{d\tau} dc_1 \tag{90}$$

   Andererseits ist eine Variation in $\tau$ um $\bar{x}_\pm$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial \bar{x}_\pm(\tau - \tau_0)}{\partial\tau} d\tau = \frac{d\bar{x}_\pm(\tau - \tau_0)}{d\tau} d\tau \\ &\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{S[\bar{x}_\pm]}} dc_1 = d\tau && (91) \\ &\Longrightarrow P = \left(\frac{\sqrt{S[\bar{x}_\pm]}}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} T && (92) \end{aligned}$$

   Die Integration über $c_1$ wird also durch die Integration über die Zeitachse,d.h. die Zentren der Instantonen und Antiinstantonen ersetzt, hierbei ist $\sqrt{S[\bar{x}_\pm]}$ die Jacobi-Determinante, die sich aus der Variablentransformation ergibt. So erhält man für die Übergangsamplitude:

$$\langle a \mid e^{-\frac{\hat{H}T}{\hbar}} \mid -a\rangle \approx N \left(\frac{\sqrt{S[\bar{x}_\pm]}}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} Te^{-\frac{S[\bar{x}_\pm]}{\hbar}} \left(\det{}'\hat{\mathcal{O}}_{\bar{x}_\pm}\right)^{-\frac{1}{2}} (1 + \mathcal{O}(\hbar)) \tag{93}$$

Allgemein führt auch in anderen Theorien jede Invarianz der Bewegungsgleichungen zu einer Nullmode in der Fluktuationsdeterminante, die dann auch analog durch eine Integration über eine sogenannte *kollektive Koordinate* ersetzt wird.
Der Übersichtlichkeit wegen werde $S[\bar{x}_\pm]$ im folgenden einfach als $S_0$ bezeichnet.

2. $\det \hat{\mathcal{O}}_{\bar{x}_\pm(\tau)}$ läßt sich im Gegensatz zu $\det \hat{\mathcal{O}}_{\pm a}$ kaum bestimmen. Hier hilft jedoch die Beobachtung, daß $\lim_{\tau \to \pm\infty} \bar{x}_\pm = \pm a$. D.h. für hinreichend große $\tau$ ist $\det \hat{\mathcal{O}}_{\bar{x}_\pm(\tau)} \approx \det \hat{\mathcal{O}}_{\pm a}$. Die Abweichungen in einem Bereich um das Zentrum $\tau_0$ des Instantons bzw.Antiinstantons sollen durch einen Faktor K berücksichtigt werden, der später noch genauer bestimmt wird.

$$\begin{aligned} &\langle a \mid e^{-\frac{\hat{H}T}{\hbar}} \mid -a\rangle \\ \approx\ & N e^{-\frac{S_0}{\hbar}} \left(\det \hat{\mathcal{O}}_{\bar{x}_\pm(\tau)}\right)^{-\frac{1}{2}} (1 + \mathcal{O}(\hbar)) \\ =\ & NK e^{-\frac{S_0}{\hbar}} \left(\det \hat{\mathcal{O}}_{\pm a}\right)^{-\frac{1}{2}} (1 + \mathcal{O}(\hbar)) \\ \overset{T\to\infty}{=}\ & e^{-\frac{S_0}{\hbar}} K \left(\frac{\omega}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega T}{2}} (1 + \mathcal{O}(\hbar)) \end{aligned} \tag{94}$$

3. Da für große $\tau$ gilt

$$\frac{dx}{dt} = \omega(a - x) \tag{95}$$

$$(a - x) \sim e^{-\omega\tau} \tag{96}$$

$$\omega = \sqrt{V''(\pm a)} \tag{97}$$

lösen auch Konfigurationen $\bar{x}_n$ aus n weit entfernten Instantonen und Antiinstantonen näherungsweise die Bewegungsgleichungen, d.h. sind stationäre Punkte von S mit Wirkung $nS_0$. Hierbei ist zu beachten, daß die Instantonen und Antiinstantonen sich auf der Zeitachse abwechseln müssen. Als weitere Randbedingung ist vorgegeben:

$$\lim_{\tau \to -\infty} \bar{x}_n = -a \qquad \lim_{\tau \to \infty} \bar{x}_n = a \tag{98}$$

D.h. n ist ungerade. Schließlich liefert jedes Instanton bzw. Antiinstanton in (94) einen Faktor K in der Übergangsamplitude. Die Summation über die Postionen der Kinks und Antikinks liefert:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{\tau_1} d\tau_2 ... \int_{-\frac{T}{2}}^{\tau_{n-1}} d\tau_n = \frac{T^n}{n!} \tag{99}$$

Schließlich erhält man $((1+\mathcal{O}(\hbar))$:

$$\begin{aligned}
& \langle +a \mid e^{-\frac{\hat{H}T}{\hbar}} \mid -a\rangle & (100)\\
\approx \quad & N\left(\det \hat{\mathcal{O}}_{\pm a}\right)^{-\frac{1}{2}} \textstyle\sum_{n\,ungerade} \frac{(TKe^{-\frac{S_0}{\hbar}})^n}{n!} \\
= \quad & N\left(\det \hat{\mathcal{O}}_{\pm a}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left(\exp(TKe^{-\frac{S_0}{\hbar}}) - \exp(-TKe^{-\frac{S_0}{\hbar}})\right) \\
\overset{T\to\infty}{=} \quad & \left(\tfrac{\omega}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \frac{1}{2}\left(\exp(TKe^{-\frac{S_0}{\hbar}}) - \exp(-TKe^{-\frac{S_0}{\hbar}})\right) & (101)
\end{aligned}$$

4. Die Näherungen basieren auf der Annahme, daß die Instantonen bzw. Antiinstantonen weit voneinander getrennt sind. Hier steht sicher noch ein Konsistenz-Check aus. Dazu trägt folgende Überlegung bei: Für beliebiges aber festes x wc̈hst die Exponentialreihe $\sum \frac{x^n}{n!}$ mit n bis n von der Größenordnung von x ist, danach fallen ihre Werte mit n schnell ab. Die wesentlichen Beitrage in (100) liegen also in dem Bereich, für den gilt: $n < KTe^{-\frac{S_0}{\hbar}}$ D.h. für die *Instanton-Antiinstanton-Dichte* $\rho$ gilt dort:

$$\rho = \frac{n}{T} < Ke^{-\frac{S_0}{\hbar}} \tag{102}$$

   Ist $\hbar$ also klein gegen $S_0$, d.h. in der semiklassischen Näherung, so sind diese Anforderungen gut erfüllt. Hier spricht man auch von der *dilute gas approximation* .

5. Vergleicht man nun Gleichung (93), in der die Nullmode in $\det \hat{\mathcal{O}}_{\bar{x}\pm}$ durch eine Integration über $\tau$,d.h. einen Faktor T, berücksichtigt wird, mit dem Ein-Kink-Beitrag in (100), so erhält man:

$$K = \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\det \hat{\mathcal{O}}_{\pm a}}{\det' \hat{\mathcal{O}}_{\bar{x}\pm}}\right)^{\frac{1}{2}} (1+\mathcal{O}(\hbar)) \tag{103}$$

Insgesamt wurde nun ausgerechnet, wie die klassischen Instanton-Lösungen in die Übergangsamplitude $\langle a \mid e^{-\frac{\hat{H}T}{\hbar}} \mid -a\rangle$ bis $\mathcal{O}(\hbar)$ eingehen. Es bleibt noch die Energieaufspaltung, d.h. die Aufhebung der Entartung des Grundzustandes, zu bestimmen.

## 4.3 Energieaufspaltung des Grundzustandes

Es sei $\{|n\rangle\}$ ein VONS von Eigenfunktionen zum Hamiltonoperator $\hat{H}$,$|x_f\rangle$ und $|x_i\rangle$ seien Eigenzustände des Ortsoperators.

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \tag{104}$$

$$\langle x_f | e^{-\frac{\hat{H}T}{\hbar}} | x_i \rangle = \sum_n e^{-\frac{E_n T}{\hbar}} \langle x_f | n \rangle \langle n | x_i \rangle \tag{105}$$

$$\stackrel{T \to \infty}{=} e^{-\frac{E_0 T}{\hbar}} \langle x_f | 0 \rangle \langle 0 | x_i \rangle \tag{106}$$

Nun sei $|x_f\rangle = |x_i\rangle = | \pm a\rangle$ und man erhält durch analoge Überlegungen wie im vorangehenden Abschnitt $(1 + \mathcal{O}(\hbar))$:

$$\langle \pm a \mid e^{-\frac{\hat{H}T}{\hbar}} \mid \pm a\rangle \stackrel{T \to \infty}{\approx} \left(\frac{\omega}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \frac{1}{2} \left(\exp(TKe^{-\frac{S_0}{\hbar}}) + \exp(-TKe^{-\frac{S_0}{\hbar}})\right) \tag{107}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{-\frac{E_0 T}{\hbar}} = e^{-\frac{\omega T}{2} \pm KTe^{-\frac{S_0}{\hbar}}}$$

$$\Longrightarrow \quad E_0^{\pm} = \tfrac{1}{2}\hbar\omega \pm \hbar K e^{-\frac{S_0}{\hbar}} (1 + \mathcal{O}(\hbar)) \tag{108}$$

Hiermit konnte also die Energieaufspaltung des Grundzustandes durch Vergleich der obigen Ausdrücke gewonnen werden.In 0-ter Ordnung entspricht dies gerade Oszillatorgrundzuständen. Um $E_0^{\pm}$ direkt auszurechnen, muß man auf folgenden Zusammenhang zurückgreifen:

$$\begin{aligned} Tr\left(e^{-\frac{\hat{H}T}{\hbar}}\right) &= \sum_n e^{-\frac{E_n T}{\hbar}} \\ &= \int dx \langle x \mid e^{-\frac{\hat{H}T}{\hbar}} \mid x\rangle \\ &= \int dx \int_x^x [dx'] e^{-\frac{S[x']}{\hbar}} \\ &\stackrel{T \to \infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{E_0 T}{\hbar}} \end{aligned} \tag{109}$$

Alternativ kann man auch auf diese Beziehung zurückgreifen:

$$\frac{\langle +a | e^{-\frac{\hat{H}T}{\hbar}} | -a\rangle}{\langle +a | e^{-\frac{\hat{H}T}{\hbar}} | +a\rangle} = \frac{1 - e^{-\frac{\Delta E T}{\hbar}}}{1 + e^{-\frac{\Delta E T}{\hbar}}} \tag{110}$$

Hierbei ist $\Delta E$ die Energieaufspaltung des Grundzustandes. Die konkrete Rechnung liefert dann wieder das obige Ergebnis.

## 4.4 Bemerkung

Die vorangehenden Abschnitte mögen recht akademisch erscheinen,jedoch enthalten sie die wesentlichen Ideen und Ansätze, die man auch bei der Behandlung „physikalischerer“ Systeme findet, allerdings werden sie nicht durch eine Vielzahl von Indices oder durch modellspezifische Komplikationen verdeckt. Betrachtet man z.B. in einem Modell in zwei Raumdimensionen mit einer inneren U(1)-Symmetrie die Solitonlösungen so kann durch den

Übergang in drei Raumdimensionen eine Beschreibung für die Flußlinien in Supraleitern gewonnen werden.Schließlich stellt der T'HOOFT-POLYAKOV-Monopol eine Soliton Lšung für ein System mit einer O(3)-Eichsymmetrie dar.Wenn die Elektrodynamik als Einbettung in eine solche Theorie verstanden werden muß,folgt daraus die Existenz magnetischer Monopole.

# 5 YANG-MILLS-Instantonen

Auch in YANG-MILLS-Theorien existiern Instantonen, d.h. Lösungen der Euklidischen Bewegungsgleichungen endlicher Wirkung, die eine *topologische Ladung* oder auch *Windungszahl* $Q \geq 0$ tragen.Es handelt sich dabei um Eichtheorien, deren Eichgruppe die SU(2) ist. Als Generatoren der SU(2) können die Pauli-Matrizen $\tau_a$ gewählt werden. Sie gehorchen folgenden Kommutatorrelationen:

$$\left[\frac{\tau_a}{2}, \frac{\tau_b}{2}\right] = i\epsilon_{abc}\frac{\tau_c}{2} \tag{111}$$

Damit haben die Eichtransformationen folgende Gestalt:

$$U(\theta(x)) = \exp\left(-\frac{i\tau^a\theta^a(x)}{2}\right) \tag{112}$$

Hier sei nur eine kurze Zusammenstellung der weiteren wesentlichen Größen sowie deren Transformationsverhaltens gegeben (g bezeichne die Kopplungskonstante)

- Eichfelder

$$A_\mu = \frac{\tau_a}{2}A_\mu^a \tag{113}$$

$$A_\mu \longrightarrow UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \tag{114}$$

- Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \tag{115}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\tau^a}{2}F_{\mu\nu}^a \tag{116}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \tag{117}$$

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow UF_{\mu\nu}U^{-1} \tag{118}$$

- Kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \tag{119}$$

$$D_\lambda F_{\mu\nu} = \partial_\lambda F_{\mu\nu} - ig[A_\lambda, F_{\mu\nu}] \tag{120}$$

- Lagrangedichte und Wirkung
  Mit der Normierung $Tr(\tau_a\tau_b) = \delta_{ab}$ folgt:

$$Tr(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \tag{121}$$

  Damit sind die folgende Lagrangedichte bzw. die zugehörige Wirkung offensichtlich eichinvariant:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \tag{122}$$

In der Literatur fndet man oft in der folgenden Art umskalierte Felder, da dies zu einer kürzeren Schreibweise führt:

$$A_\mu = \frac{g}{i}\frac{\tau^a}{2}A^a_\mu \qquad\qquad F_{\mu\nu} = \frac{g}{i}\frac{\tau^a}{2}F^a_{\mu\nu} \tag{123}$$

Insbesondere ergibt sich hier:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \tag{124}$$

$$A_\mu \longrightarrow UA_\mu U^{-1} - (\partial_\mu U)U^{-1} \tag{125}$$

$$S_E \propto \frac{1}{g^2}\int dx Tr((F_{\mu\nu})^2) \tag{126}$$

Man definiert nun den *dualen Tensor* folgendermaßen

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho} \tag{127}$$

, so daß

$$\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \tag{128}$$

So erhält man neben der Bewegungsgleichung (ohne Quellen)

$$D_\mu F_{\mu\nu} = 0 \tag{129}$$

die *Bianchi-Identität*, die für Tensoren des Typs in (115) erfüllt ist:

$$D_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \tag{130}$$

Die Aufgabe besteht nun darin, für die Bewegungsgleichung (129)Lösungen endlicher Wirkung zu finden. Durch letztere Bedingung erhält man folgende Anforderungen an den Feldstärketensor und damit an die Eichfelder:

$$F_{\mu\nu} \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{131}$$

$$A_\mu \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} -(\partial_\mu U)U^{-1} = U(\partial_\mu U^{-1}) \tag{132}$$

Hierbei ist U eine Eichtransformation, die i.a. nur auf der $\mathcal{S}^3_\infty$-Sphäre definiert ist, d.h. sie muß auch nicht notwendigerweise analytisch auf $E^4$ fortsetzbar sein.$A_\mu$ wird also auf $\mathcal{S}^3_\infty$ zu einer *reinen Eichung.*Im folgenden werde $\mathcal{S}^3_\infty$ im $E^4$ als $\mathcal{S}^3_{phys}$ bezeichnet. Analog zu Kapitel 2.5 zerfallen die Instanton-Lösungen in die Homotopieklassen der Abbildungen von $\mathcal{S}^3_{phys}$ in die Menge der Nullstellen des Feldstärketensors bezüeglich $A_\mu$. Letztere sind aber gerade durch die Elemnte der Form $(\partial_\mu U)U^{-1}$ aus der Eichgruppe SU(2) gegeben. Was ist nun der Gruppenraum der SU(2)? Jedes Element der Eichgruppe hat folgende Darstellung:

$$U = u_0 + i\sum_{j=1}^{3} u_j\tau_j \quad \textstyle\sum_{j=0}^3 u_j^2 = 1 \tag{133}$$

Offenbar ist der Gruppenraum der SU(2) die $\mathcal{S}^3$ -Sphäre, hier parametrisiert durch den vierkomponentigen Einheitsvektor u, die im folgenden mit $\mathcal{S}^3_{int}$ bezeichnet werden soll. Zusammenfassend kann also festgehalten werden:

$$\mathcal{S}^3_{phys} \longrightarrow \mathcal{S}^3_{int} \tag{134}$$

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \longrightarrow (\partial_\mu U)U^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \tag{135}$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ können z.B. die Polarwinkel in $E^4$ sein. Es sind also die Homotopieklassen der Abbildungen von $\mathcal{S}^3$ nach $\mathcal{S}^3$ zu untersuchen. Diese werden mit $\pi_3(\mathcal{S}^3)$ bezeichet und es gilt:

$$\pi_3(\mathcal{S}^3) = Z \tag{136}$$

D.h. die Lösungen können durch eine Windungszahl klassifiziert werden. Dies wird vielleicht deutlicher wenn man bedenkt, daß die obige Aussage auch für Sphären in beliebigen Dimensionen gültig ist. Für die eindimensionale Sphäre, den Kreis, können die Abbildungen anschaulich dadurch klassifiziert werden,indem man zählt wie oft der Bildbereich einen Kreis überdeckt während der Wertebereich einmal durchlaufen wird, d.h. wieviele Windungen durchlaufen werden. Die Klassifikation erfolgt also durch ganze Zahlen. Im Prinzip wird auch im Fall der 3-dimensionalen Sphären nur untersucht werden, wie oft sie sich umeinander winden - nur der mathematische Formalismus wird aufwendiger und die Anschauung läßt etwas zu wünschen übrig.

## 5.1 Windungszahl oder Pontryagin-Index

Dieses Kapitel soll nur dazu dienen die wesentlichen Formeln bereitzustellen und sie evtl. am Beispiel klar zu machen.Für eine gründlichere Behandlung dieses Themas sei auf die Bücher von Coleman und Rajaraman verwiesen.Die *Windungszahl* oder der *Pontryagin-Index* einer Abbildung U (bzw. $A_\mu = -(\partial_\mu U)U^{-1} = U(\partial_\mu U^{-1})$) von $\mathcal{S}^3$ nach $S^3$ ist gegeben durch folgende Formel:

$$Q = \frac{1}{24\pi^2} \oint_{\mathcal{S}^3_{phys}} d\sigma_\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} Tr(U(\partial_\nu U^{-1})U(\partial_\lambda U^{-1})U(\partial_\tau U^{-1})) \tag{137}$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \oint_{\mathcal{S}^3_{phys}} d\sigma_\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} Tr(A_\nu A_\lambda A_\tau) \tag{138}$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \int_{G=\mathcal{S}^3_{int}} d^3 g \tag{139}$$

Hierbei stellt $d^3 g$ ein invariantes Volumenelement im Gruppenraum G der SU(2) dar, so daß die obige Formel gerade die im vorigen Abschnitt gewünschten Eigenschaften hat.

Dies soll an einem Beispiel klargemacht werden:

$$U^{(1)} = \frac{u_0 + iu_j\tau_j}{|u|} \tag{140}$$

Der Anschauung entsprechend sollte $U^{(1)}$ die Windungszahl 1 tragen. Man rechnet dies schließlich nach:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{24\pi^2}\oint d\sigma_\mu \frac{12u_\mu}{|u|^4} && (141)\\ &= \frac{1}{2\pi^2}\oint d\Omega u_\mu |u|^2 \frac{u_\mu}{|u|^4} && (142)\\ &= \frac{1}{2\pi^2}\oint d\Omega && (143)\\ &= 1 && (144)\end{aligned}$$

(Das Volumen der $\mathcal{S}^3$-Sphäre mit Radius 1 betrğt gerade $2\pi^2$.)
Man kann schließlich zeigen, daß Q eine Invariante der Homotopieklasse ist und daß jede Lösung der Windungszahl Q homotop ist zu $U^{(Q)} = \left(U^{(1)}\right)^Q$.
Schließlich ist der 3-dimensionale Raum $E^3$, in dem alle Punkte bei Unendlich mit einem Punkt identifiziert werden, topologisch äquivalent zur $\mathcal{S}^3$-Sphäre. So kann man die Abbildungen dieses Raumes in den Gruppenraum der SU(2) einer analogen Klassifikation unterziehen. Als Beispiele für Abbildungen mit Windungszahl 1 seien hier angegeben:

$$\begin{aligned} U(\vec{x}) &= \exp\left(\frac{i\pi\vec{x}\vec{\tau}}{(\vec{x}^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}\right) && (145)\\ U(\vec{x}) &= \frac{(\lambda\vec{\tau} + i\vec{x})^2}{\vec{x}^2+\lambda^2} && (146)\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Windungszahl wird die Oberflächenintegrartion durch eine Volumenintegration ersetzt:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{24\pi^2}\int d^3x \epsilon_{\mu\nu\lambda} Tr(A_\mu A_\nu A_\lambda) && (147)\\ A_\mu &= U(\vec{x})(\partial_\mu U^{-1}(\vec{x})) && (148)\end{aligned}$$

Abbildungen mit höerer Windungszahl Q sind dann wieder homotop zu Produkten dieser Abbildungen.
Zurückkehrend zu dem ursprünglichen Problem soll nun eine neue Schreibweise für Q erarbeitet werden, nämlich

$$Q = -\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x Tr\left(\tilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) \tag{149}$$

Dies wird in zwei Schritten erfolgen:

- Umwandlung des obigen Integrals in ein Oberflächenintegral
- Identifikation der dabei auftretenden Stromdivergenz $\partial_\mu j_\mu$ als Windungszahldichte

$$q(x) := -\frac{1}{16\pi^2} Tr\left(\tilde{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right) \tag{150}$$

Unter Ausnutzung der Bianchi-Identiät erhält man:

$$-16\pi^2 q(x) = Tr\left(\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau}(2\partial_\mu(A_\nu\partial_\lambda A_\tau + \frac{2}{3}A_\nu A_\lambda A_\tau)\right) \tag{151}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} j_\mu &:= -\frac{1}{8\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} Tr\left(A_\nu(\partial_\lambda A_\tau + \frac{2}{3}A_\lambda A_\tau)\right) && (152) \\ q(x) &= \partial_\mu j_\mu && (153) \\ Q &= \int d^4x \partial_\mu j_\mu && (154) \\ &= \oint_{\mathcal{S}^3_{phys}} d\sigma_\mu j_\mu && (155) \end{aligned}$$

Beachtet man weiter die Randbedingung $F_{\mu\nu}(x = \infty) = 0$ so ergibt sich:

$$\begin{aligned} j_\mu^{\mathcal{S}^3_{phys}} &= \frac{1}{24}\epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} Tr(A_\nu A_\lambda A_\tau) && (156) \\ Q &= \frac{1}{24}\oint_{\mathcal{S}^3_{phys}} d\sigma_\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} Tr(A_\nu A_\lambda A\tau) && (157) \end{aligned}$$

Mit dem asymtotischen Verhalten der $A_\mu$

$$A_\mu \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} U(\partial_\mu U^{-1}) \tag{158}$$

folgt

$$Q = \frac{1}{24\pi^2}\oint_{\mathcal{S}^3_{phys}} d\sigma_\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} Tr(U(\partial_\nu U^{-1})U(\partial_\lambda U^{-1})U(\partial_\tau U^{-1})) \tag{159}$$

So wird also die ursprüngliche Formel für die Windungszahl reproduziert.

### 5.2 Selbst(-anti-)dualität und Lösung der Bewegungsgleichungen

Zunächst einmal gilt:

$$-\int d^4x Tr((F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu})^2) \geq 0 \tag{160}$$

(Es ist zu beachten, daß $F_{\mu\nu}$ antihermitesch definiert wurde.) Mit $Tr(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = Tr(\tilde{F_{\mu\nu}}\tilde{F_{\mu\nu}})$ folgt:

$$- \int d^4xTr((F_{\mu\nu})^2) \geq \mp \int d^4xTr(F_{\mu\nu}\tilde{F_{\mu\nu}}) \tag{161}$$

Damit ergibt sich:

$$S_E \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|Q| \tag{162}$$

$S_E$ wird also minimal für den Fall

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \pm F_{\mu\nu} \tag{163}$$

Die *selbst-dualen* bzw.*selbst-anti-dualen* Konfigurationen extremalisieren $S_E$ und lösen damit die Bewegungsgleichung - jedoch müssen nicht alle Lösungen selbt-dual bzw. selbst-anti-dual sein. Ersteres kann auch direkt mit Hilfe der Bianchi-Identität gesehen werden:$D_\mu F_{\mu\nu} = \mp D_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$. In jedem Fall stellen die selbst-dualen bzw. anti-selbst-dualen Lösungen das absolute Minimum der Wirkung im jeweiligen Q-Sektor dar. Als Lösung dieses Problems mit Windungszahl Q=1 (Instanton) sei nun folgendes Eichfeld angegeben:

$$A_\mu(x) = \left(\frac{r^2}{r^2+\lambda^2}\right) U(\partial_\mu U^{-1}) \tag{164}$$

$$U(x) = \frac{x_o + i\vec{x}\vec{\tau}}{r} \tag{165}$$

$$r^2 = x_0^2 + \vec{x}^2 \tag{166}$$

Hierbei ist $\lambda$ ein beliebiger Parameter, der i.a. als *Instanton-Größe* bezeichnet wird. Für $r \gg \lambda$ geht $A_\mu$ offenbar in eine reine Eichung über wie es die Randbedingungen erfordern. Es existieren auch exakte Instantonlösungen mit beliebiger Windungszahl Q, sogenannte n-Instanton-Lösungen.Zusätzlich betrachtet man aber auch wie im quantenmechanischen Fall Superpositionen der Ein-Instanton-Lösungen als näherungsweise Lösungen der Bewegungsgleichungen.

# 6 Vakuum-Tunnel-Prozesse und $\theta$-Vakuum

Analog zu den Kapiteln 3 und 4 soll nun festgestellt werden zwischen welchen klassischen Vakuumzuständen eine zeitliche Entwicklung der Instantonlösungen erfolgt.Hierbei ist das Vakuum durch die Bedingung $F_{\mu\nu} = 0$ definiert. Bisher wurde als Randbedingung immer gefordert, daß das Vakuum außerhalb einer hinreichend großen Sphäre angenommen wird. Im Prinzip kann man die Forderung auch derart formulieren, daß das Vakuum außerhalb eines hinreichend großen Zylinders vorliegt, d.h. für die Region, in der gilt:

$$t < -\frac{T}{2} \qquad t > \frac{T}{2} \qquad |\vec{x}| > R \tag{167}$$

Nun soll folgende Eichfixierungsbedingung erfüllt sein:

$$A_0(x) = 0 \qquad \forall x \tag{168}$$

Damit bleibt jedoch weiterhin die Freiheit erhalten, zeitunabhängige Eichtransformationen durchzuführen:

$$\partial_0 U(\vec{x}) \;=\; 0 \tag{169}$$
$$A_0 \;\longrightarrow\; U(\vec{x})A_0U^{-1}(\vec{x}) - (\partial_0 U(\vec{x}))U^{-1}(\vec{x}) \tag{170}$$

Damit wird das Vakuum durch ein zeitunabhängiges reines Eichfeld beschrieben:

$$A_i(x) = A_i(\vec{x}) = -(\partial_i U(\vec{x}))U^{-1}(\vec{x}) = U(\vec{x})(\partial_i U^{-1}(\vec{x})) \tag{171}$$

Zur Zeit $t = \frac{T}{2}$ kann die verbleibende Eichfreiheit genutzt werden, um z.B. $A_i(\vec{x}) = 0$ zu wählen (durch $U(\vec{x}) = 1$).Mit der Vakuumbedingung $F_{\mu\nu} = 0$ folgt $F_{0i} = \partial_0 A_i = 0$. Damit verschwindet das Eichfeld für den gesamten Bereich außerhalb des Zylinders, d.h. im Vakuum. Der Schnitt durch den Zylinder bei $t = \frac{T}{2}$ entspricht also gerade einer 3-dimensionalen Scheibe deren Begrenzung mit einem Punkt identifiziert werden kann. Die Eichtransformationenen auf einer solchen Scheibe koennen durch folgende Formel (bis auf Homotopie) angegeben werden (vgl. Kapitel 5.1):

$$U(\vec{x}) = \exp\left(n\frac{i\pi\vec{x}\vec{\tau}}{(\vec{x}^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{172}$$

Die Vakuumzustände zerfallen damit auch in verschiedene Homotopieklassen, die durch eine Windungszahl n gelabelt werden. Sei also $\{|n\rangle\}$ die Menge der Vakuumzustände. Die Behauptung ist nun:

$$A_i^{inst}(\vec{x}, x_0 = -\infty) \;=\; A_i(\vec{x}) \qquad von \qquad |n\rangle \tag{173}$$
$$A_i^{inst}(\vec{x}, x_0 = \infty) \;=\; A_i(\vec{x}) \qquad von \qquad |n+Q\rangle \tag{174}$$

(vgl. z.B. Cheng,Li)
Eine Instanton-Lösung der Windungszahl Q verbindet offenbar klassische Vakuua, die sich in ihrer Windungszahl um Q unterscheiden. Das klassische YANG-MILLS-Vakuum ist also unendlich entartet, in der quantisierten Theorie treten jedoch Tunnelprozesse auf, so daß der tatsächliche Vakuumzustand eine geeignete Überlagerung der klassichen Vakuumzustände ist. Die Vakuum-Vakuum-Übergangsamplituden sollten gegeben sein durch:

$$\langle n|e^{-\hat{H}T}|m\rangle^J = \int [dA]_{Q=n-m} \exp\left(-S_E\right) \tag{175}$$

Hierbei ist $\hbar = 1$.
Die Vakuumzustände $\{|n\rangle\}$ verhalten sich unter Eichtransformationen $U^{(1)}$ mit Windungszahl 1 folgendermaßen:

$$U^{(1)}|n\rangle = |n+1\rangle \tag{176}$$

Eichinvarianz bedeutet nun:

$$[U^{(1)}, \hat{H}] = 0 \tag{177}$$

Der neue Vakuumzustand muß eine geeignete Überlagerung der klassischen Vakuumzustände sein und insbesondere Eigenzustand von $\hat{H}$. Aufgrund der obigen Kommutatorrelation muß der Vakuumzustand aber auch Eigenzustand von $U^{(1)}$ mit Eigenwert der Form $e^{-i\theta}$ sein ( $U^{(1)}$ ist unitär). Damit muß der neue Vakuumzustand $|\theta\rangle$ die Form haben:

$$|\theta\rangle = \sum_n e^{in\theta}|n\rangle \tag{178}$$

Schließlich soll noch die Vakuum-Vakuum-Übergangsamplitude im Pfadintegralformalismus bestimmt werden:

$$\langle\theta'|e^{-i\hat{H}t}|\theta\rangle^J = \delta(\theta-\theta')Z_J(\theta) \tag{179}$$

Man rechnet nach:

$$\begin{aligned}
\langle\theta'|e^{-i\hat{H}t}|\theta\rangle^J &= \sum_{n,m} e^{-im\theta'}e^{in\theta}\langle m|e^{-i\hat{H}t}|n\rangle^J \\
&= \sum_{n,m} e^{-i(m-n)\theta}e^{im(\theta-\theta')}\int [dA]_{m-n}e^{-S_E} \\
&= \delta(\theta-\theta')\sum_{Q=m-n} e^{-iQ\theta}\int [dA]_Q e^{-S_E}
\end{aligned} \tag{180}$$

Damit erhält man:

$$Z_J(\theta) = \sum_Q \int [dA]_Q \exp\left(-\int \mathcal{L}_{eff} d^4x\right) \tag{181}$$

$$\mathcal{L}^E_{eff} = \mathcal{L}^E + \frac{i\theta}{16\pi^2} Tr\left(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right) \tag{182}$$

Im Minkowskischen Fall führt dies auf folgende effektive Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \frac{\theta}{16\pi^2} Tr\left(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right) \tag{183}$$

Für $\theta \neq 0$ ist die effektive Lagrange-Dichte nicht invariant unter P - und T-Transformationen, so daß die entsprechenden Symmetrien in dieser Theorie gebrochen sind.
Außerdem bleibt zu bemerken, daß jedes $\theta$-Vakuum eine „eigene Welt“ darstellt und daß diese Vakua nicht etwa Anregungen eines einzigen Vakuums sind. Die unterschiedlichen $\theta$-Vakua sind physikalisch nicht verbunden!
Dies wird durch folgende Überlegung klar:
Sei $U^{(1)}$ eine Eichtransformation und B ein beliebiger physikalischer Operator

$$\Rightarrow [U^{(1)}, B] = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\theta|[U^{(1)}, B]|\theta'\rangle \\ &= \langle\theta|B|\theta'\rangle(e^{i\theta} - e^{-i\theta'}) \\ &\overset{\theta\neq\theta'}{\Rightarrow} \langle\theta|B|\theta'\rangle = 0 \end{aligned}$$

# Literatur


[1] L.H. Ryder *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press,1996

[2] M.Kaku *Quantum Field Theory*, Oxford University Press, 1993

[3] T.Kugo *Eichtheorie*, Springer Verlag, 1997

[4] R.Rajaraman *Solitons and Instantons*, North Holland Publishing Company,1982

[5] S.Coleman *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press,1985

[6] T.P. Cheng, L.F. Li *Gauge theory of elementary particle physics*, Clarendon Press Oxford, 1991

[7] P.Hoppe *Tunneleffekt und Energieaufspaltung im dreidimensionalen $\phi^4$-Modell mit Pauli-Villars-Regularisierung*,Diplomarbeit 1993

[8] T.Schäfer,E.V.Shuryak *Instantons in QCD*,hep-ph/9610451 v3

[9] C.Wieczerkowski *Quantenelektrodynamik und das Euklidische Pfadintegral*, Vorlesung SS 98

[10] Bronstein, Semendjajew,*Taschenbuch der Mathematik*, Teubner Verlagsgesellschaft 1991

[11] M. Chaichian,N.F.Nelipa *Introduction to Gauge Field Theories*, Springer Verlag, 1984

[12] A.A.Belavin,A.M. Polyakov, A.S.Schwartz, Yu.S. Tyupkin *Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations*, Phys.Let. **59B**,85

[13] C.G. Callan,R.F.Dashen,D.J.Gross *The Structure of the Gauge Theory Vacuum*,Phys.Let.**63B**,334

[14] D.J.Gross *A Theory of the Strong Interactions*,Phys.Rep.**49**,143

[15] H.Kalka, *Supersymmetrie*, Teubner-Verlag, 1997