Spieltheorie: Duelle

Forschungsseminar
Quantenfeldtheorie

Sommersemester 2000

Otfried Gühne, Tobias Galla

(Teil I - Tobias Galla)

Ein kleines Rätsel:

Duell mit 3 Spielern

- 3 Spieler
- Trefferwahrscheinlichkeiten

$$p_1 = \frac{1}{3}$$

$$p_2 = \frac{1}{2}$$

$$p_3 = 1$$

- 1 fängt an zu schiessen, dann 2 (falls noch lebt), dann 3

Frage:

Was soll Spieler 1 im ersten Schuss tun ?

In unserem Triell mit $p_3 = 1$ gilt

- Spieler 3 schiesst auf Spieler 2, falls der noch lebt

- Spieler 2 schiesst auf Spieler 3, falls der noch lebt

- einziger Parameter:

  Auf wen schiesst Spieler 1, wenn beide anderen Spieler noch leben ?

Vorüberlegung:

- nur 2 Spieler, p_1, p_2, Spieler 1 fängt an

$W_1(p_1, p_2)$:= W'keit, daß Spieler 1 überlebt

Dann gilt:

$$W_1(p_1, p_2) = p_1 + (1 - p_1)(1 - p_2)W_1(p_1, p_2),$$

also

$$W_1(p_1, p_2) = \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2}$$

Annahme: Spieler 1 schiesst auf Spieler 2

$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
W_1 &= p_1 \cdot 0 + (1-p_1) \cdot p_2 \cdot W_1(p_1, p_2) \\
&\quad +(1-p_1) \cdot (1-p_2) \cdot \underbrace{W_1(p_1, 1)}_{=p_1} \\
&= (1-p_1) \cdot p_2 \cdot \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2} \\
&\quad +(1-p_1) \cdot (1-p_2) \cdot p_1 \\
&= \frac{5}{18}
\end{aligned}$$

im Beispiel $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{1}{2}$.

Annahme: Spieler 1 schiesst auf Spieler 3

$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
W_1 &= p_1 \cdot (1 - p_2) \cdot W_1(p_1, p_2) \\
&\quad + (1 - p_1) \cdot p_2 \cdot W_1(p_1, p_2) \\
&\quad + (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot W_1(p_1, 1) \\
&= \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2} \\
&\qquad \cdot (p_1 \cdot (1 - p_2) + (1 - p_1) \cdot p_2) \\
&\quad + (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot p_1 \\
&= \frac{13}{36}
\end{aligned}$$

Annahme: Spieler 1 schiesst in die Luft

danach schiesst Spieler 2 auf Spieler 3

danach schiesst Spieler 3 (ggf) auf Spieler 2

$\leadsto$

$$
\begin{aligned}
W_1 &= p_2 \cdot W_1(p_1, p_2) + (1 - p_2) \cdot W_1(p_1, 1) \\
&= p_2 \cdot \frac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2} \\
&\quad + (1 - p_2) \cdot p_1 \\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

$\leadsto$ Spieler 1 sollte in die Luft schiessen !!!

Jetzt: Allgemeiner Fall

- N Spieler
- Trefferw'keiten $p_1, ..., p_N \in [0, 1]$
- zyklisches Schiessen, Spieler 1 beginnt
- nicht notwendig $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_N$

Frage

Was soll der Spieler, der am Zug ist, tun, wenn ihm alle Trefferw'keiten bekannt sind ?

Er verhält sich so, daß die eigene Überlebens-w'keit optimiert wird, wobei er annimmt, daß die übrigen Spieler ebenfalls rational handeln.

$\rightsquigarrow$ Das Spiel ist rational und transparent.

formal

Situation = Konfiguration lebender und toter Spieler,

d.h. String* aus N bits

$$0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1$$

Raum der Situationen

$$\Omega = \{0, 1\}^N$$

hat 2^N Elemente.

*zum Begriff der Strings vgl. z.B. E. Witten, Noncommutative Tachyons And String Field Theory, hep-th/0006071

Definition (Strategie)

Eine Strategie gibt an, was Spieler $i \in \{0, ..., N\}$ in Situation $\omega \in \Omega$ tun soll, d.h. eine Strategie ist eine Abbildung

$$s : \Omega \times \{1, ..., N\} \longrightarrow \{1, ..., N\}.$$

Die Strategie s_i des i-ten Spielers ist dann

$$s_i : \Omega \longrightarrow \{1, ..., N\}, \; s_i(\omega) := s(\omega, i).$$

Einschränkungen

- $s(\omega, i)$ unsinnig, wenn i schon tot
- auf Tote wird nicht geschossen
- es wird nicht in die Luft geschossen
- sonst: Alle schiessen in die Luft !
- keine anderen Todesursachen außer durch Erschießen

gesucht:

die beste Strategie

Frage:

Was ist überhaupt eine beste Strategie ?

Nash-Gleichgewicht

(John F. Nash Jr., NP Wirtschaftswissenschaften 1994)

Eine „beste“ Strategie liegt vor, wenn kein Spieler einseitig seine Strategie verändern kann, ohne die eigene Überlebenswahrscheinlichkeit zu senken (die Strategie der übrigen Spieler bleibt unverändert).

Fragen

- Gibt es Nash-Gleichgewichte ?

- Wie sehen sie aus ?

- Wie hängt die Überlebensw'keit von der eigenen Trefferw'keit ab ?
  Kann es u.U. günstig sein, ein schlechter Schütze zu sein ?

Iterative Lösung:

1. starte mit zufälliger Strategie

2. optimiere nacheinander Strategien der einzelnen Spieler

3. wiederhole 2 solange bis Fixpunkt erreicht

Programmstruktur:

while(konvergenztester == 0)

for $i = 1, ..., N$

for $j = 1, ..., 2^N$

spielerupdateinsituation(i, j);

spielerupdateinsituation($sit, spieler$)

- $ziel$ fest wählen

$\pi(sit)$:=W'keit für eine Nullrunde

$\sigma(sit, spieler, ziel)$:=

Überlebensw'keit für $spieler$ in sit (falls er zuerst auf $ziel$ schiesst) unter der Bedingung, dass in der ersten Runde jemand stirbt

$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} & \text{w'keit}(spieler, sit, ziel) \\ = \; & \frac{1}{1-\pi(sit)} \cdot \sigma(sit, spieler, ziel) \end{aligned}$$

- dann: $ziel$ optimieren !

Wie berechnet man $\sigma(sit, spieler, ziel)$?

$$\sigma = \sum_{\substack{i=1,\ldots,2^N \\ \#(i) < \#(sit)}} < i|sit >_{spieler,ziel} \cdot \text{w'keit}(spieler, i)$$

$< i|sit >_{spieler,ziel}$:=

W'keit, daß in der ersten Runde der Übergang $sit \to i$ erfolgt (wobei $spieler$ zuerst schiesst und zwar auf $ziel$).

Wie berechnet man $< i|sit >_{spieler,ziel}$?

$$\text{smatrix}(\psi_i, \psi_f, amzug)$$

$$= \sum_{k=1,\ldots,\#(\psi_i)} \text{tmatrix}(\psi_i, \psi_f, amzug, k, amzug)$$

Dabei berechnet tmatrix die Wahrscheinlichkeit, daß der übergang $\psi_i \to \psi_f$ in genau k Schüssen erfolgt. Dabei soll zuerst $amzug$ schiessen und am Ende auch wieder $amzug$ an der Reihe sein.

Wie berechnet man
tmatrix($\psi_i, \psi_f, amzug, k, gernot$) ?

if(k==0)
    if ($\psi_i == \psi_f$)
      &&(amzug==gernot) return(1);

    else return(0);

return(
$$p[amzug] \cdot \text{tmatrix}(\psi_{neu}, \psi_f, dernaechstebitte, k-1, gernot)$$

$$+ (1 - p[amzug]) \cdot \text{tmatrix}(\psi_i, \psi_f, dernaechstebitte, k-1, gernot)$$
)