Ginsparg-Wilson-Fermionen und Chirale Symmetrie auf dem Gitter

Auslöser der jüngeren Entwicklungen seit 1998: 'Wiederentdeckung' (durch P. Hasenfratz) einer Gleichung von Ginsparg & Wilson aus dem Jahr 1982

Wesentliche Fortschritte seither:

- exaktes Atiyah-Singer-Indextheorem auf dem Gitter, auch bei endlichem Cutoff (Hasenfratz, Laliena, Niedermayer; über Zugang der Fixpunkt-Wirkungen)
- expliziter Dirac-Operator, der die GW-Relation erfüllt (durch Neuberger; ursprünglich gefunden im Kontext des Overlap-Formalismus)
- Existenz einer der GW-Relation assoziierten exakten Symmetrie der Gitter-Fermionwirkung (Lüscher)
- Konstruktion chiraler Eichtheorien auf dem Gitter im Falle anomaliefreier komplexer Fermiondarstellungen der Eichruppe (Lüscher)
- weiteres theoretisches Verständnis u.a. auch mittels der Domain-Wall-Fermionregularisierung
  ($\rightarrow$ z.B. Kikukawa)
- ...

Ginsparg-Wilson-Relation

$$\text{GW}: \qquad \{\,\gamma_5\,,\,D\,\} = \gamma_5 D + D\gamma_5 = aD\gamma_5 D$$

- äquivalente, allgemeinere Form:

$$\gamma_5 D^{-1} + D^{-1}\gamma_5 = a2R\gamma_5$$

  $R \sim \delta_{x,x'}$: lokaler Operator (o.B.d.A. trivial im Dirac-Raum), reproduziert für $a \to 0$ die Bedingung für chirale Symmetrie im Kontinuum

- *nicht-triviale* Bedingung, da D^{-1} nicht lokal ist

- GW = ‘mildeste’ Brechung der chiralen Invarianz: propagierende Zustände effektiv chiral (da Reichweite von R endlich), so daß physikalische Konsequenzen der chiralen Symmetrie erhalten bleiben

- lange vergessen, erst nach 15 Jahren wurde mit der klassisch perfekten Wirkung für die QCD eine Lösung von GW gefunden
  (dann: Neuberger-Operator, DW-Fermionwirkung)

- spielt wesentliche Rolle im Beweis des Gitter-Indextheorems → s. später

- steht *nicht* im Widerspruch zum Nielsen-Ninomiya-Theorem, da die chirale Symmetrie via GW anders realisiert ist, zur Erinnerung:

<u>NN-Theorem o.B.d.A. im Falle freier Fermionen</u>

Für $S_{\rm F} = a^4 \sum_x \overline{\psi} D \psi$, D: Dirac-Operator (translations-invariant, d.h. $D\mathrm{e}^{ipx}u = \widetilde{D}(p)\mathrm{e}^{ipx}u$), kann folgendes nicht gleichzeitig gelten:

1. $\widetilde{D}(p)$ ist analytisch & periodisch modulo $2\pi/a$
2. $p_\mu \ll \pi/a \;\Rightarrow\; \widetilde{D}(p) = i\gamma_\mu p_\mu + \mathrm{O}(ap^2)$
3. $\widetilde{D}(p)$ ist invertierbar $\forall\ p_\mu \neq 0$ (modulo $2\pi/a$)
4. D anti-kommutiert mit γ_5

1. $\Rightarrow$ Lokalität, im Sinne von $\parallel D(x,y;U) \parallel \leq\ C\,\mathrm{e}^{-\gamma|x-y|}$
2.+3. $\Rightarrow$ korrekter Kontinuumslimes
4. $\Rightarrow$ Invarianz unter kont. chir. Transformationen

- GW hat eine kontinuierliche Symmetrie der Fermionwirkung zur Folge, die als *die* Form der chiralen Symmetrie auf dem Gitter zu interpretieren ist:

$$\delta\psi = \gamma_5 \left(1 - \tfrac{1}{2}\,aD\right)\psi \qquad \delta\overline{\psi} = \overline{\psi}\left(1 - \tfrac{1}{2}\,aD\right)\gamma_5$$

lässt $S_{\rm F}$ invariant, falls GW gilt

Nun evtl. sogar zuviel Symmetrie auf dem Gitter?
Nein, denn der Flavour-Singulett-Strom zeigt die erwartete chirale Anomalie, da das Fermion-Integrationsmaß i.A. *nicht* invariant unter den o.g. (globalen) chiralen Transformationen ist.

Genauer: Betrachte endliches Volumen & es gelte GW.

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\rm F} = \int \prod_x \mathrm{d}\psi(x)\,\mathrm{d}\overline{\psi}(x)\,\mathcal{O}\,\mathrm{e}^{-S_{\rm F}}$$

$$\psi \to \psi + \epsilon\,\delta\psi \qquad \overline{\psi} \to \overline{\psi} + \epsilon\,\delta\overline{\psi}$$

$\Rightarrow \qquad \langle\delta\mathcal{O}\rangle_{\mathrm{F}} = -a\,\mathbf{Tr}_{\,\mathrm{fields}}\,\{\gamma_5 D\}\,\langle\mathcal{O}\rangle_{\mathrm{F}}$ in 1. Ordnung ϵ

Dann folgt aus GW für $z \in \mathbb{C}$ aber $\notin$ Spektrum von D:

$$a(z-D)\gamma_5(z-D) =$$
$$z(2-az)\gamma_5 - (1-az)\,[\,(z-D)\gamma_5 + \gamma_5(z-D)\,]$$

$$\Rightarrow \qquad -a\,\mathbf{Tr}_{\,\mathrm{fields}}\,\{\gamma_5 D\} = z(2-az)\,\mathbf{Tr}_{\,\mathrm{fields}}\,\left\{\gamma_5(z-D)^{-1}\right\}$$

Division durch $z(2-az)$ & $\bigcirc$–Integration, so daß kein Spektralwert $\neq 0$ eingeschlossen ist:

$$-\frac{a}{2\pi i}\mathbf{Tr}_{\,\mathrm{fields}}\,\{\gamma_5 D\} \quad \underbrace{\oint \frac{\mathbf{d}z}{z(2-az)}}_{=\,\pi i\ (\text{Residuensatz})} \quad = \oint \frac{\mathbf{d}z}{2\pi i}\mathbf{Tr}_{\,\mathrm{fields}}\,\left\{\gamma_5(z-D)^{-1}\right\}$$

Spektralzerlegung: $D = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_i \;\Rightarrow\; (z-D)^{-1} = \sum_i \frac{1}{z-\lambda_i}\,\mathcal{P}_i$

$\Rightarrow \qquad \displaystyle\oint \frac{\mathbf{d}z}{2\pi i}\,\frac{1}{z-\lambda_i} = 1$ für $i=0$, und 0 sonst

$\Rightarrow \qquad \displaystyle\mathcal{P}_0 \equiv \oint \frac{\mathbf{d}z}{2\pi i}\,(z-D)^{-1}$

projiziert auf Unterraum der Nullmoden von D

$$\Rightarrow \qquad -a\,\mathbf{Tr}_{\,\mathrm{fields}}\,\{\gamma_5 D\} = 2\,\mathbf{Tr}_{\,\mathrm{fields}}\,\{\gamma_5 \mathcal{P}_0\} = 2\,N_{\mathrm{f}} \times \mathrm{index}(D)$$

d.h. zugeh. Ward-Identitäten zeigen richtige Anomalie

Bemerkung:

da Volumen endlich ($\to$ Gitter), hier keine Regularisierung wie z.B. im Beweis à la Fujikawa notwendig

Explizite Lösung von GW

Neuberger's Operator:

$$D_{\rm N} = \frac{1}{a}\left[1 - A\left(A^\dagger A\right)^{-1/2}\right] \qquad A = 1 - aD_{\rm W}$$

$$D_{\rm W} = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \left\{\left(\nabla_\mu + \nabla^*_\mu\right)\gamma_\mu - a\nabla^*_\mu\nabla_\mu\right\}$$

$D_{\rm W}$: Wilson-Dirac-Operator

kompliziertere Struktur $\Rightarrow$ Lokalität von $D_{\rm N}$?

$$a\widetilde{D}(p) = 1 - \left\{1 - \tfrac{1}{2}a^2\hat{p}^2 - ia\gamma_\mu\check{p}_\mu\right\} \times \left\{1 + \tfrac{1}{2}a^4\sum_{\mu<\nu}\hat{p}^2_\mu\hat{p}^2_\nu\right\}$$

$$\hat{p}_\mu = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{ap_\mu}{2}\right) \qquad \check{p}_\mu = \frac{1}{a}\sin\left(ap_\mu\right)$$

Bedingungen 1., 2. und 3. aus NN erfüllt, insbesondere fällt die Fouriertransformierte von $\widetilde{D}(p)$ für große Abstände exponentiell mit einer Rate $\propto 1/a$ ab

Beispiel: Eine chiral-invariante Yukawa-WW

Gegeben: eine freie Fermionwirkung mit (nicht-propagierenden) Hilfsfeldern $\chi, \overline{\chi}$, wobei D GW erfülle

$$S_{\rm F} = a^4\sum_x \left\{\overline{\psi}D\psi - \frac{2}{a}\overline{\chi}\chi\right\}$$

$\Rightarrow$ Invarianz von $S_{\rm F}$ und Integrationsmaß unter

$$\delta\psi = \gamma_5\left(1 - \tfrac{1}{2}aD\right)\psi + \gamma_5\chi \qquad \delta\overline{\psi} = \overline{\psi}\left(1 - \tfrac{1}{2}aD\right)\gamma_5 + \overline{\chi}\gamma_5$$

$$\delta\chi = \gamma_5\,\tfrac{1}{2}aD\psi \qquad \delta\overline{\chi} = \overline{\psi}\,\tfrac{1}{2}aD\gamma_5$$

$$\Rightarrow \qquad \delta\,(\psi+\chi) = \gamma_5\,(\psi+\chi) \qquad \delta\left(\overline{\psi}+\overline{\chi}\right) = \left(\overline{\psi}+\overline{\chi}\right)\gamma_5$$

d.h. der Propagator von $\psi+\chi$ ist chiral invariant im üblichen Sinn (NB: konsistent mit NN, da sein Inverses im Impulsraum singulär und damit Bedingung 1. verletzt)

Yukawa-Wechselwirkungsterm durch Kopplung an ein komplexes Gitter-Skalarfeld ϕ:

$$S_{\rm int} = a^4 \sum_x g_0\,(\overline{\psi}+\overline{\chi})\left\{\tfrac{1}{2}\,(1-\gamma_5)\phi + \tfrac{1}{2}\,(1+\gamma_5)\phi^*\right\}(\psi+\chi)$$

$\Rightarrow$ Flavour- und chirale Symmetrie sind erhalten

Bemerkungen:

- es werden keine chiral-unsymmetrischen Gegenterme benötigt, um diese Theorie(n) zu renormieren
- man kann zeigen:
  keine Doppler bei hinreichend schwacher Kopplung
- $\chi, \overline{\chi}$ koppeln nur lokal, sie tragen keine neue physikalische Information ($\Leftrightarrow$ Lagrange-Multiplikatoren)
- <u>allgemeiner Zug chiral-invarianter Gittertheorien:</u>
  nicht-triviale, von der WW abhängende Transformationsvorschriften, speziell in Eichtheorien
  (plausibel, da sonst z.B. Anomalie nicht realisiert)

an dieser Stelle noch unbeantwortet:
genaue Bedingungen, unter denen chirale Symmetrie auf dem Gitter — etwa via GW — existieren kann

Einige Resultate für GW-Fermionen

- Gültigkeit von chiralen Ward-Identitäten (WI) auf dem Gitter, prinzipielle Idee des Argumentes:

  $\left\langle \cdots \overline{\psi} D R \gamma_5 D \psi \cdots \right\rangle$: symmetriebrechender Anteil

  dann: D^{-1}'s aus den fermionischen Kontraktionen werden durch D's auf beiden Seiten kompensiert
  $\Rightarrow$ nur (lokaler) Operator R bleibt übrig
  $\Rightarrow \partial_\mu j_\mu^5 = 0$ erfüllt bis auf Kontakterme
  in diesem Zusammenhang folgt dann z.B.:

  – Quarkmassen geschützt vor additiver Renormierung, kein Tuning um $m_\pi = 0$ zu bekommen [erinnere: Pionen = (quasi-)Goldstone-Bosonen der chiralen Flavour-Symmetrie in der QCD]

  $$m_\pi^2 \sim m_{\rm q} \text{ für } m_{\rm q} \to 0 \quad \Rightarrow \quad m_{\rm q}^{\rm critical} = 0$$

  – Ordnungsparameter der ('flavour non-singlet') chiralen Symmetrie verlangt Subtraktion:

  $$\lim_{m_{\rm q}\to 0} \lim_{V\to\infty} \left\langle \overline{\psi} \left(1 - \tfrac{1}{2}\, aD\right) \psi \right\rangle_{\rm F} = \Sigma \neq 0 \qquad \Sigma \propto \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{m_{\rm q}}$$

  – $Z_{\rm A} = Z_{\rm V} = 1$ bei endlichem a wie im Kontinuum

  – keine Mischung zwischen 4-Fermion-Operatoren aus verschiedenen chiralen Darstellungen

- aus Flavour-Singulett-WIs leitet man dagegen her:

$$\frac{1}{V} \left\langle [\, Q_{\rm top}(U)\,]^2 \right\rangle = -\frac{m_{\rm q}}{N_{\rm f}^2} \left\langle \overline{\psi} \left(1 - \tfrac{1}{2}\, aD\right) \psi \right\rangle + {\rm O}(m_{\rm q}^2) \quad [\to \eta'\,]$$

- <u>chirale Zerlegung:</u> $\hat\gamma_5 \equiv \gamma_5\,(1 - aD)$, $\hat P_\pm \equiv \frac{1}{2}\,(1 \pm \hat\gamma_5)$, so erhält man für $D = D_{\rm GW}$ analog zum Kontinuum

$$D = P_+ D \hat P_- + P_- D \hat P_+ \;\Rightarrow\; \overline\psi D \psi = \overline\psi_{\rm L} D \psi_{\rm L} + \overline\psi_{\rm R} D \psi_{\rm R}$$
$$\psi_{\rm L} = \hat P_- \psi \quad \overline\psi_{\rm L} = \overline\psi P_+ \qquad \psi_{\rm R} = \hat P_+ \psi \quad \overline\psi_{\rm R} = \overline\psi P_-$$

  wichtig für Formalismus vektorartiger Theorien wie QCD, wesentlich: asymmetrische Definition R$\leftrightarrow$L!
  $\Rightarrow$ richtige LR-Kopplung im Massenterm möglich:

$$m \times S \qquad S = \overline\psi_{\rm L}\psi_{\rm R} + \overline\psi_{\rm R}\psi_{\rm L} = \overline\psi \left(1 - \tfrac{1}{2}\,aD\right)\psi$$

  $\Rightarrow \delta P = S, \delta S = P$ für $P = \overline\psi_{\rm L}\psi_{\rm R} - \overline\psi_{\rm R}\psi_{\rm L} = \overline\psi\gamma_5\left(1 - \frac{a}{2}D\right)\psi$

- <u>Cutoff-Effekte:</u> $\mathrm{O}(a)$–Verbesserung ‘automatisch’, d.h. keine $\mathrm{O}(a)$–Gitterartefakte zu jeder Ordung in g (einsichtig, da $\overline\psi\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\psi$–Term GW-Symmetrie verletzt; Tree-Level-Beitrag sogar via GW direkt erzeugt)

- weitere Eigenschaften von Neuberger’s $D = D_{\rm N}$
  - es gilt: $\gamma_5 D \gamma_5 = D^\dagger$ und $V \equiv 1 - aD$ ist unitär
    $\Rightarrow D = \frac{1}{a}\,(1 - V)$ ist allgemeine Lösung von GW
  - da $H \equiv \gamma_5 A = \gamma_5(1 - D_{\rm W})$ hermitesch und $A^\dagger A = H^2$:

$$D = \frac{1}{a}\,[\,1 - \gamma_5\,\mathrm{sign}(H)\,] \qquad \text{‘Overlap-Operator’}$$

  - Dispersionsrelation $\Rightarrow \mathrm{O}(a^2)$–Artefakte u.U. groß
  - Lokalität unter Kontrolle für praxisrelevante β
  - $\beta = 6 - 6.5$: quasi-Nullmoden häufiger, aber noch gut lokalisiert & vom Rest des Spektrums isoliert ($\rightarrow$ Abwesenheit ‘exzeptioneller Konfigurationen’)

- <u>wertvolle chirale Eigenschaften des Spekrums:</u>

  $\gamma_5 D \gamma_5 = D^\dagger$ + GW implizieren $D + D^\dagger = DD^\dagger = D^\dagger D$

  $\Rightarrow$ D ist ein normaler Operator, $\lambda \neq \lambda'$: $(u_\lambda, u_{\lambda'}) = 0$

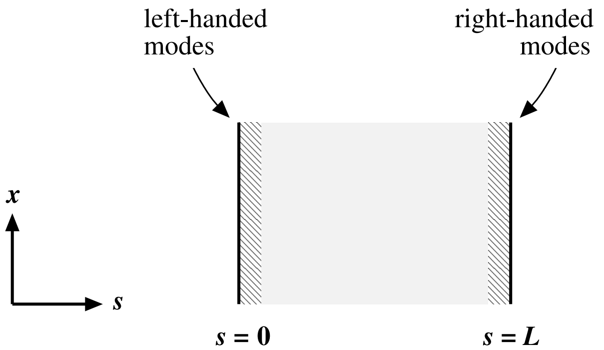
  $\mathrm{Spec}(D = D_{\mathrm{GW}}) \in$ Kreis $\{ \lambda = 1 - \mathrm{e}^{i\alpha} \}$, Eigenwerte:

  - $\lambda = 0$: $\gamma_5 u_\lambda = \pm u_\lambda \quad (\# = n_+, n_-)$
  - $\lambda = 2$: $\gamma_5 u_\lambda = \pm u_\lambda \quad (\# = n'_+, n'_-)$
  - $\lambda \in \mathbb{C}$: $\gamma_5 u_\lambda = u_{\lambda^*}$ mit $(u_\lambda, \gamma_5 u_\lambda) = 0$

  $\Rightarrow$ alternative Herleitung des Gitter-Indextheorems:

$$
\begin{aligned}
Q_{\mathrm{top}} &= \tfrac{1}{2}\,\mathbf{Tr}\,(\gamma_5 D) = -\tfrac{1}{2}\,\mathbf{Tr}\,\{\gamma_5(2 - D)\} \\
&= -\tfrac{1}{2}\sum_\lambda (2-\lambda)(u_\lambda, \gamma_5 u_\lambda) = n_- - n_+ = \mathrm{index}(D)
\end{aligned}
$$

Zusammenhang mit Domain-Wall-Fermionen



<u>Idee:</u> massive Fermionen in 5–dimensionalen Volumen, die sich (bei niedrigen Energien) auf 4–dim., links- und rechtshändige Fermionen auf den Rändern reduzieren und in deren Umgebung an das Eichfeld koppeln

$$
D_5 = D_4 + \gamma_5 \partial_s - M \quad \Rightarrow \quad D = M + (D_4 - M)\left[1 - \left(\frac{D_4}{M}\right)^2\right]^{-1/2}
$$

genügt GW ($M = 1/a$), chirale Theorie in 4 Dimensionen

Weyl-Fermionen auf dem Gitter [Lüscher 1999]

Chirale Eichtheorien

linkshändige Fermionen ($\rightarrow$ EW-Sektor im SM):

$$P_-\psi = \psi \qquad \overline{\psi}P_+ = \overline{\psi} \qquad P_\pm = \tfrac{1}{2}\,(1 \pm \gamma_5)$$

Verhalten unter Eichtransformationen $\Lambda(x) \in \mathcal{G}$:

$\psi(x) \;\rightarrow\; R\,[\,\Lambda(x)\,]\;\psi(x)$

R : unitäre Darstellung von $\mathcal{G}$ (Generatoren T^a)

Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{4g^2}\,F^a_{\mu\nu}(x)F^a_{\mu\nu}(x) + \overline{\psi}(x)\gamma_\mu D_\mu \psi(x)$$

'anomaly cancellation condition' in Störungstheorie:

$$d_R^{abc} \equiv 2i\,\mathbf{Tr}\,\left\{R\,(T^a)\,R\left(T^b\right)\,R\,(T^c) + (b \leftrightarrow c)\right\} = 0$$

$\Rightarrow$ sichert Konsistenz der Theorie zu allen Ordnungen

Ziel:
finde eine adäquate Gitterformulierung derart, daß

- (von Beginn an) das bekannte Fermionspektrum der Kontinuumstheorie reproduziert wird
- Lokalität erhalten ist
- Eichinvarianz der Theorie ungebrochen bleibt
- Störungsreihe die gewöhnliche Form besitzt

Ausgangspunkt:
eichkovarianter Gitter-Dirac-Operator, der

- GW-Relation erfüllt
- korrektes Verhalten im Limes freier Fermionen zeigt
- lokal & stetig-differenzierbar vom Eichfeld abhängt

z.B. für $D \equiv D_{\mathrm{GW}} \equiv D_{\mathrm{N}}$ ist Letzteres streng gültig, falls

$\| 1 - R[U(p)] \| < \epsilon \qquad \forall$ Plaquetten p und $\epsilon < 1/30$

('admissibility condition')
$\Rightarrow$ solche Eichwirkungen im Folgenden angenommen

<u>Weyl-Fermionen</u>

$$\hat{\gamma}_5 \equiv \gamma_5 (1 - aD)$$

$$\Rightarrow \qquad (\hat{\gamma}_5)^\dagger = \hat{\gamma}_5 \qquad (\hat{\gamma}_5)^2 = 1 \qquad D\hat{\gamma}_5 = -\gamma_5 D$$

$\Rightarrow$ chirale Projektoren für Fermion-/Antifermionfelder:

$$\hat{P}_\pm = \tfrac{1}{2}(1 \pm \hat{\gamma}_5) \qquad P_\pm = \tfrac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$$

$\Rightarrow \qquad S_{\mathrm{F}} = a^4 \sum_x \overline{\psi}(x) D \psi(x)$
zerfällt in rechts- und linkshändige Anteile

$\Rightarrow \qquad$ chirale Gitter-Eichtheorie durch Forderung der einschränkenden Bedingungen
$\hat{P}_- \psi = \psi \qquad \overline{\psi} P_+ = \overline{\psi}$

Betrachte wieder das fermionische Integrationsmaß:

$$\psi(x) = \sum_j v_j(x) c_j \qquad \hat{P}_- v_j = v_j$$

$$\{v_j(x)\} \; : \; \text{ONB der linkshändigen Felder}$$

$$\{c_j\} \; : \; \text{Grassmann-wertige Koeffizienten}$$

$\Rightarrow$ für $\mathrm{D}[\psi] = \prod_j \mathrm{d}c_j$ folgt

$$v_j(x) \to \sum_l v_l(x) \mathcal{J}_{lj} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{D}[\psi] \to \det \mathcal{J} \times \mathrm{D}[\psi]$$

$\Rightarrow$ Phasenambiguität ($\mathcal{J}$ unitär!), abhängig vom Eichfeld

Antifermionmaß:

$$\overline{\psi}(x) = \sum_k \overline{c}_k \overline{v}_k(x) \qquad \mathrm{D}[\,\overline{\psi}\,] = \prod_k \mathrm{d}\overline{c}_k$$

$$\{\overline{v}_k(x)\} \; : \; \text{Eichfeld-unabhängig (nur } \gamma_5 \text{ involviert!)}$$

für fermionische EVs $\langle \mathcal{O} \rangle_{\mathrm{F}} = \int \mathrm{D}[\psi]\,\mathrm{D}[\,\overline{\psi}\,]\,\mathcal{O}\,\mathrm{e}^{-S_{\mathrm{F}}}$ findet man nun z.B. im Falle der 2–Punkt-Funktion

$$\begin{aligned} \left\langle \psi(x)\overline{\psi}(y) \right\rangle_{\mathrm{F}} &= \langle 1 \rangle_{\mathrm{F}} \times \hat{P}_- S(x,y) P_+ \\ &= \langle 1 \rangle_{\mathrm{F}} \times \left\{ P_- S(x,y) P_+ + \tfrac{1}{2}\, a P_+ \delta(x-y) \right\} \end{aligned}$$

$$S(x,y) \; : \; \text{Greensche Funktion von } D$$

d.h. nur linkshändige Komponenten des Fermionfeldes propagieren (wie es für chirale Fermionen sein soll)

damit ist die Definition der Theorie im wesentlichen schon vollständig, es bleibt allerdings noch die Phase des Fermionmaßes zu fixieren

$\to$ Eigenschaften des Maßes?

$\to$ Existenz?

Skizze der weiteren Schritte (Details $\in$ Originalarbeiten):

- <u>Lokalitätsbedingung</u>

  bei Variation $\delta_\eta U(x,\mu) = a\eta_\mu(x)U(x,\mu)$ der Linkvariablen Änderung der fermion. effekt. Wirkung gemäß

$$\mathcal{Z}_\mathrm{F} = \langle 1\rangle_\mathrm{F} = \det M \qquad M_{kj} = a^4 \sum_x \overline{v}_k(x) D v_j(x)$$

$$\rightarrow \qquad \delta_\eta \ln\det M = \mathbf{Tr}\left\{\delta_\eta D \hat{P}_- D^{-1} P_+\right\} - i\mathfrak{L}_\eta$$

  wobei der Term $\mathfrak{L}_\eta$ vom Maß kommt:

$$\mathfrak{L}_\eta = i\sum_j (v_j, \delta_\eta v_j) \equiv a^4 \sum_x \eta^a_\mu(x) j^a_\mu(x)$$

  daher muß das Fermionmaß dergestalt sein, daß der induzierte Strom $j^a_\mu(x)$ *lokal* im Eichfeld ist (dann: Maßterm = lokaler Gegenterm $\Leftrightarrow$ lokale FEs)

- <u>eichkovariante Anomalie</u>

  für Variationen $\eta_\mu(x) = -\nabla_\mu\,\omega(x)$ ändert sich die fermionische effektive Wirkung um

$$\delta_\eta \ln\det M = ia^4 \sum_x \omega^a(x)\left\{\mathcal{A}^a(x) - \left[\nabla^*_\mu j_\mu\right]^a(x)\right\}$$

$$\mathcal{A}^a(x) = \frac{ia}{2}\mathbf{Tr}\left\{\gamma_5 R\left(T^a\right) D(x,x)\right\}$$

  $\rightarrow$ im klassischen Kontinuumslimes:

$$\mathcal{A}^a(x) = c_1 d_R^{abc} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^b_{\mu\nu}(x) F^c_{\rho\sigma}(x) + \mathrm{O}(a) \quad c_1 = -\frac{1}{128\pi^2}$$

  $\Rightarrow\ \mathcal{A}(x)\ =$ (kovariante) Anomalie auf dem Gitter

  Forderung nach Eichinvarianz dann äquivalent zu

$$\left[\nabla^*_\mu j_\mu\right]^a(x) = \mathcal{A}^a(x) \qquad j^a_\mu(x): \text{eichkovariant}$$

  da unlösbar, wenn Anomalie bei $a = 0$ nicht verschwindet, folgt: Lokalität + Eichinvarianz $\Rightarrow d_R^{abc} = 0$

- Integrabilitätsbedingung

  Frage: Kann von einem gegebenen Strom auch das Fermionmaß abgeleitet werden?

  Betrachte eine Kurve $U_t(x,\mu)$, $0 \le t \le 1$, im Raum der Felder und die Änderung der effektiven Wirkung entlang derselben:

$$\begin{aligned} \partial_t \ln\det M &= \mathbf{Tr}\left\{\partial_t D \hat{P}_- D^{-1} P_+\right\} - i\mathfrak{L}_\eta \\ a\eta_\mu(x) &= \partial_t U_t(x,\mu) U_t^{-1}(x,\mu) \end{aligned}$$

  Lösung ist nur von den Endpunkten des Weges abhängig, genauer kann man zeigen:

  Fermiondeterminante wegunabhängig genau dann, wenn für alle geschlossenen Kurven gilt

$$\begin{aligned} W &\equiv \exp\left\{i\int_0^1 \mathrm{d}t\, \mathfrak{L}_\eta\right\} = \det\{1 - P_0 + P_0 Q_1\} \\ P_t &\equiv \hat{P}_-\big|_{U=U_t} \end{aligned}$$

  Q_t : implizit definierter (unitärer) Operator, bildet linkshändige Felder zwischen $U = U_0, U_t$ ab

  Theorem:

  Ein gegebener Strom $j_\mu^a(x)$ leitet sich von einem Fermionmaß ab genau dann, wenn die assoziierten Phasenfaktoren obiger Gleichung genügen. In jedem topologischen Sektor ist das Maß durch diesen Strom bis auf eine konstante Phase eindeutig bestimmt.

  [für ein anomaliefreies Fermionmultiplett ($d_R^{abc} = 0$) erfüllt $j_\mu(x) = 0$ im klassischen Kontinuumslimes: (differentielle) Integrabilitätsbedingung + Forderung nach Eichinvarianz]

Zusammenfassend: zur Konstruktion einer Gittertheorie für Weyl-Fermionen ist ein Strom zu finden, der

- eichkovariante, lokale Funktion des Eichfeldes ist
- sich wie ein Axialvektorstrom transformiert
- anomales Erhaltungsgesetz $\left[\nabla^*_\mu j_\mu\right]^a(x) = \mathcal{A}^a(x)$ erfüllt
- der globalen Integrabilitätsbedingung genügt

darauf aufbauend:
Resultate für konkrete Fermiondarstellungen

- U(1)–Theorie mit N linkshändigen Fermionen
  Falls die 'anomaly cancellation condition' $\sum_{\alpha=1}^N \mathrm{e}_\alpha^3 = 0$ ($R[\Lambda]_{\alpha\beta} = \Lambda^{\mathrm{e}_\alpha}\delta_{\alpha\beta}$, $\Lambda \in \mathrm{U}(1)$, e_α: Ladungen) gilt, existiert ein Strom mit o.g. Eigenschaften, d.h. abelsche chirale Eichtheorien können auf das Gitter gebracht werden, ohne die Eichsymmetrie zu brechen.

  Anomalie = lokales, eichinvariantes Feld mit

  $$\mathcal{A}(x) = -\frac{a}{2}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5 T D(x,x)\right\} \quad : \quad a^4 \sum_x \delta\mathcal{A}(x) = 0$$

  $\Rightarrow \mathcal{A}$ = topologisches Feld, allgemeine Form in $D = 4$:

  $$\begin{aligned} q(x) &= c(x) + \partial^*_\mu k_\mu(x) \qquad c: \text{Chern-Polynom} \\ c(x) &= \alpha + \beta_{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x) + \gamma\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}(x)F_{\rho\sigma}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \end{aligned}$$

  – Klassifikation modulo Divergenzterme
  – Lösung eines lokalen Kohomologie-Problems
  – $q = \mathcal{A}$: $\alpha = \beta_{\mu\nu} = 0$, $\gamma \propto \sum_{\alpha=1}^N \mathrm{e}_\alpha^3 = 0$
    $\Rightarrow$ Anomalie $\mathcal{A}(x) = \partial^*_\mu k_\mu(x)$ behebbar

- <u>Nicht-abelsche Theorien</u>

  In diesem Fall ist die Anomalie *kein* topologisches Feld, aber sie steht in Beziehung mit dem Chern-Charakter in $4+2$ Dimensionen.

  Existenz eines lokalen, eichinvarianten und topologischen Feldes $\in \mathrm{Gitter} \times \mathbb{R}^2$ mit klassischem Kontinuumslimes:

  $$q(z) = \tfrac{1}{6}\, c_1 d_R^{abc} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_6} F^a_{\mu_1\mu_2}(z) F^b_{\mu_3\mu_4}(z) F^c_{\mu_5\mu_6}(z) + \mathrm{O}(a)$$

  Theorem:

  $q(z)$ besitzt triviale Kohomologie genau dann, wenn es einen lokalen Strom $j^a_\mu(x)$ gibt, der

  - der Integrabilitätsbedingung (in ihrer differentiellen Form) genügt
  - die Forderungen der Eichinvarianz und das anomale Erhaltungsgesetz (s.o.) erfüllt

  Aber:

  Ein (nachwievor) ungelöstes Problem bleibt die Klassifizierung der topologischen Felder!

  $\Rightarrow$ nicht-perturbative Konstruktion des Maßes fehlt

  Erwartung: $q(z)$ hat triviale Kohomologie, falls $d_R^{abc} = 0$

  - ok zu allen Ordnungen in a, d.h. in Störungstheorie können anomaliefreie Eichtheorien in vernünftiger Weise auf dem Gitter regularisiert werden ohne die Eichinvarianz zu brechen
  - z.Z. jedoch noch unbewiesen für festes $a > 0$ ...

Vieles bliebe noch zu diskutieren, z.B. ...

- $\mathrm{U}(1)_\mathrm{A}$–Problem: Gestalt der Witten-Veneziano-Formel für die η'–Masse ist wie im Kontinuum
- numerische Implementierung von GW-Operatoren: polynom./rationale Approximation, $D_\mathrm{W}^\mathrm{improved}$ in GW, exakte Behandlung eines Teil des Spektrums, ...

Einige Literaturhinweise

- P. Hasenfratz, V. Laliena, F. Niedermayer, Phys. Lett. B427 (1998) 125
- P. Hasenfratz, Nucl. Phys. B525 (1998) 401;
  The theoretical background and properties of perfect actions, Lecture Notes (Peniscola 1997), hep-lat/9803027
- M. Lüscher, Phys. Lett. B428 (1998) 342
- F. Niedermayer, Nucl. Phys. B73 (Proc. Suppl.) (1999) 105, und darin angebene Referenzen
- M. Lüscher, Nucl. Phys. B538 (1999) 515, Nucl. Phys. B549 (1999) 295, Nucl. Phys. B568 (1999) 162
- M. Lüscher, Nucl. Phys. B 83-84 (Proc. Suppl.) (2000) 34, und darin angebene Referenzen
- M. Lüscher, *Chiral gauge theories revisited*, Erice-Lectures 2000, hep-th/0102028
- P. Hernández, hep-lat/0110218;
  Y. Kikukawa, hep-lat/0111035