Optionspreistheorie

Forschungsseminar

WS 98/99

Jörn Voigt

Grundbegriffe:

- Basisgüter S_t, die an der Börse gehandelt werden:
  - Aktie
  - Wertpapiere
  - Wäherungen
  - Commodities (Öl, Gold)

- (europäische Call-) Option mit Wert C_t :
  Das Recht, nicht die Pflicht, zu einem festen Zeitpunkt T ein Basisgut (hier: Aktie) zu einem zum Zeitpunkt $t = 0$ festgelegten Preis K (Basispreis der Option) zu kaufen.

Fragestellung:

Bank gibt Option heraus.

- Was ist diese Option wert?

- Wir realisiert sie risikofrei/mit möglichst geringem Risiko diesen Optionspreis?

Black Scholes:

Antwort auf beide Fragen!

Unter Annahme der **Normalverteilung** der relativen Aktienpreisschwankung:

- Es gibt eine Formel für den Optionspreis C_0 zum Zeitpunkt $t = 0$, (sogar für Optionswert C_t zum Zeitpunkt t), der *unabhängig* vom Erwartungswert der Aktie ist.

- Bank nimmt Geld auf und kauft $\Delta\Phi$ Aktien falls Aktienpreis steigt und verkauft Aktien und legt dieses Geld an, falls Aktienpreis fällt.
  $\Rightarrow$ **Hedging**.
  Black Scholes gibt an wieviele Aktien die Bank zu halten hat, damit sie **risikofrei** hedgt.

Aber: Relative Aktienpreisschwankung ist *nicht* normalverteilt

Ziel: Optionspreistheorie *ohne* Festlegung auf spezielle Aktienpreisverteilung

Black-Scholes-Verteilung:

Kernannahme des Black-Scholes Modell:
Sei S_t ein Zeitreihe von Aktienkursen, dann ist die relative Änderung des Aktienpreises

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S}{S} &= \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \\ &\approx \int_{t-1}^{t} \frac{dS}{S} = \int_{t-1}^{t} d(\log S) = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \end{aligned}$$

normalverteilt mit $E\left[\frac{\Delta S}{S}\right] = \mu$, $Var\left[\frac{\Delta S}{S}\right] = \sigma^2$.

Mit $y_T = \log\left[\frac{S_T}{S_0}\right] = \sum_{t=1}^{T} \log\left[\frac{S_t}{S_{t-1}}\right]$ folgt, daß der Logarithmus des Aktienpreises normalverteilt ist gemäß

$$\begin{aligned} F_G^{\mu,\sigma}(y_T) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{y_T} dy \exp\left[-\frac{(y-\mu T)^2}{2\sigma^2 T}\right] \\ &= F_G^{0,1}\left(z = \frac{\log\left[\frac{S_T}{S_0}\right] - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

mit $E[y_T] = \mu T$, $Var[y_T] = \sigma^2 T$.

Der Aktienkurs $S_T = S_0 \exp\left(\mu T + \sigma\sqrt{T}z\right)$
(mit z: $F_G^{0,1}$ verteilt) ist **lognormalverteilt**:

$$F_{LN}\left(x_T = \frac{S_T}{S_0}\right)$$

$$= F_G^{\mu,\sigma}\left(y_T = \log x_T\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} \int_0^{x_T} \frac{dx}{x} \exp\left[-\frac{(\log x - \mu T)^2}{2\sigma^2 T}\right].$$

$\Rightarrow$ **Black-Scholes Wahrscheinlichkeitsdichte**

$$P_{BS}(S_T, T|S_t, t)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}} \frac{1}{S_T} \exp\left[-\frac{(\log\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - \mu(T-t))^2}{2\sigma^2(T-t)}\right]$$

(Bem: Black-Scholes Verteilung ist in sehr guter Näherung eine Gaussverteilung)

Fehler des BS Modells

Die Annahme, daß die relativen Kursänderungen normalverteilt sind, gilt *nicht* für **Aktien-Tagesverteilungen**. Tatsächlich ist die Wahrscheinlichkeit großer Kursabweichungen signifikant *höher* als von der Gaussverteilung prognostiziert.

Fits von Tagesverteilungen zeigen:

$$P(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} |x|^{-(\alpha+1)} \quad \text{mit} \;\; \alpha \approx 3-4 \quad .$$

Dieses Verhalten läßt sich charakterisieren durch die **Kurtosis** einer (sym.)Verteilung

$$\kappa = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

mit dem 4. zentralen Moment μ_4.

$$\kappa_{BS} = 0 \;\longleftrightarrow\; \kappa_{real} \in [2, 50]$$

Wochen- und Monatsverteilungen nähern sich gemäß dem **Zentralen Grenzwertsatz** einer Gaussverteilung.

Kostenbilanz beim Hedging

Die Bank handelt zu Zeiten $t = 0, \tau, ..., T - \tau$.
Zum Zeitpunkt t hält sie $\Phi_t = \Phi_t(S_t)$ Aktien,
mit S_t=Wert der Aktien zur Zeit t.

- $t = 0$

Die Bank hält Φ_0 Aktien mit Wert S_0. Sie leiht sich B_0 Geld und gibt eine Option C_0 heraus:

$$\Phi_0 S_0 - B_0 = C_0$$

- $t = \tau$

Zum Zeitpunkt $t = \tau$ haben die Aktien den Wert S_τ, der Bond B_0 hat den Wert $B_\tau = B_0 e^{r\tau}$, die Option den Wert C_τ:

$$\Phi_0 S_\tau - B_0 e^{r\tau} \cong C_\tau$$
$$\Leftrightarrow \quad \Phi_0 S_\tau - \Phi_0 S_0 e^{r\tau} \cong C_\tau - C_0 e^{r\tau}$$

Die Bank reagiert auf die Aktienpreisveränderung und kauft/verkauft $\Phi_\tau - \Phi_0$ Aktien zum Preis S_τ und nimmt entsprechend diesen Betrag zum Zins r auf bzw. legt zum Zins r diesen Betrag an:

$$\begin{aligned} C_\tau - C_0 e^{r\tau} &\cong \Phi_0(S_\tau - S_0 e^{r\tau}) + (\Phi_\tau - \Phi_0)S_\tau - (\Phi_\tau - \Phi_0)S_\tau \\ &\cong \Phi_\tau S_\tau - \Phi_0 S_0 e^{r\tau} - (\Phi_\tau - \Phi_0)S_\tau \end{aligned}$$

- $\Rightarrow t = T$

$$C_T - C_0 e^{rT} \cong \sum_{t=0}^{T-\tau} \Phi_t \left[S_{t+\tau} - S_t e^{r\tau}\right] e^{r(T-t-\tau)}$$

$\Rightarrow$ **Gesamtkosten** der Bank:

$$\Delta W := C_0 e^{rT} - C_T + \Delta W_{trade}$$

mit den Handelskosten der Bank:

$$\begin{aligned} \Delta W_{trade} &:= \sum_{t=0}^{T-\tau} \Phi_t \, \delta S_t \, e^{r(T-t-\tau)} \\ \text{mit } \delta S_t &:= S_{t+\tau} - S_t e^{r\tau} \quad . \end{aligned}$$

Optimale Strategie

Hedgingstrategie wird charakterisiert durch Anzahl der gehaltenen Aktien Φ_t.

Was ist die optimale Strategie?

- Erwartungswert $\langle \Delta W \rangle \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ Bank hedgt nicht exakt, sondern es bleibt ein Risiko

$$R := \langle \Delta W^2 \rangle - \langle \Delta W \rangle^2 = \langle \Delta W^2 \rangle$$

- Gesucht ist die optimale Strategie $\Phi^*(S,t)$, die das Risiko minimiert:

$$\frac{\partial \langle \Delta W^2(\Phi^*) \rangle}{\partial \Phi^*} = 0.$$

Bem: Im Falle eines lognormalverteilten Aktienpreises:

$$\Delta W = 0 \quad R^* = 0 \quad .$$

Forderung:

Reproduktion der Black-Scholes-Optionspreisformel C_t und der Black-Scholes-Hedging Strategie $\Phi^*_{BS}(S_t,t)$ mit verschwindendem Risiko R^*_{BS} im Falle einer Lognormal-Verteilung.

Allgemeine Optionspreistheorie

Ausgangspunkt: Kosten der Bank

$$\Delta W := C_0 e^{rT} - C_T + \Delta W_{trade}$$

$$\text{mit} \quad \Delta W_{trade} := \sum_{t=0}^{T-\tau} \Phi_t \delta S_t e^{r(T-t-\tau)}.$$

Erwartungswertbildung:

$$\begin{aligned} \langle \Delta W \rangle &= C_0 e^{rT} - \langle C_T \rangle + \langle \Delta W_{trade} \rangle \\ &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Der Ausgabe-Optionspreis:

$$C_0 = e^{-rT} \Big(\langle C_T \rangle - \langle \Delta W_{trade} \rangle \Big)$$

mit

$$\begin{aligned} \langle C_T \rangle &:= \langle max(S_T - K, 0) \rangle \\ &= \int_K^\infty dS (S-K) P(S, T | S_0, 0) \end{aligned}$$

$$\langle \Delta W_{trade} \rangle := \sum_{t=0}^{T-\tau} \langle \Phi_t^* \delta S_t \rangle e^{r(T-t-\tau)}$$

Beobachtung:

S_t und δS_t sind stochastisch unabhängig:

$\Rightarrow \Phi_t(S_t)$ und δS_t sind unabhängig.

$\Rightarrow \langle \Phi_t^* \delta S_t \rangle = \langle \Phi_t^* \rangle \langle \delta S_t \rangle$ mit

$$\begin{aligned} \langle \Phi_t \rangle &= \int_0^\infty dS_t P(S_t, t|S_0, 0) \Phi_t(S_t) \\ \langle \delta S_t \rangle &= \int_0^\infty dS_t P(S_t, t|S_0, 0) \delta S_t \\ &=: m \neq \text{fkt}(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \Delta W_{trade} \rangle = m \sum_{t=0}^{T-\tau} \int_{t=0}^\infty P(S_t, t|S_0, 0) \Phi_t(S_t)$$

Allgemeine Optionspreisformel:

$$\begin{aligned} C_0 = \quad e^{-rT} \quad & \left(\int_K^\infty dS_T (S_T - K) P(S_T, T|S_0, 0) \right. \\ & \left. -m \sum_{t=0}^{T-\tau} \int_{t=0}^\infty P(S_t, t|S_0, 0) \Phi_t(S_t) \right) \end{aligned}$$

Optionspreisformel in $\mathcal{O}(m^0)$

Da $m \ll \langle S_t \rangle \rightarrow$ Entwicklung in m.
In $\mathcal{O}(m^0)$ ist der **Optionswert** zum Zeitpunkt t

$$C_t = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty dS_T (S_T - K) P(S_T, T|S_t, t) \quad .$$

Durch Minimierung des Risikos $\langle \Delta W^2 \rangle$

$$\frac{\partial \langle \Delta W^2(\Phi^*) \rangle}{\partial \Phi^*} = 0$$

erhält man die **optimale Strategie**

$$\Phi_t^*(S_t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{T-t} \int_K^\infty dS' \frac{S'-K}{\sigma^2 S_t^2} \left(S' - S_t e^{r(T-t)} \right) P(S', T|S_t, t).$$

Einsetzen von $\Phi_t^*(S_t)$ in $\langle \Delta W^2(\Phi) \rangle$ liefert als **Risiko** R^* bei optimaler Strategie Φ^*:

$$R^* = \langle \Delta W_0^2 \rangle - (T-t) \sum_{t=0}^{T-\tau} e^{2r(T-t)} \int_0^\infty dS_t \sigma^2 S_t^2 P(S_t, t|S_0, 0) {\Phi^*}_t^2(S_t)$$

Black-Scholes-Optionspreis

Unter Annahme einer **risikofreien** Welt

$$\begin{aligned} \langle S_T \rangle_{BS} &\stackrel{!}{=} S_0 \exp\{rT\} \\ \Leftrightarrow \mu &= r - \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned}$$

erhält man mittels $P(S_T, T|S_t, t) \to P_{BS}(S_T, T|S_t, t)$ aus

$$C_t = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty dS_T (S_T - K) P(S_T, T|S_t, t).$$

die **Black-Scholes-Optionspreisformel**:

$$C_t{}^{BS} = S_t F_G^{0,1}(d_1) - K e^{-r(T-t)} F_G^{0,1}(d_2)$$

$$\text{mit} \quad d_{1/2} = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad .$$

$C_t{}^{BS}$ ist fairer Preis der Option zum Zeitpunkt t, abhängig von der

- direkt bestimmbaren Restlaufzeit $T - t$
- direkt bestimmbaren Festzinsrate r
- nicht direkt bestimmbaren Volatilität σ

und unabhängig vom

- Erwartungswert μ der Aktie.

Black-Scholes-Hedging + -Risiko

Betrachte optimale Strategie:

$$\Phi_t^*(S_t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{T-t} \int_K^\infty dS' \frac{S'-K}{\sigma^2 S_t^2} (S' - S_t e^{r(T-t)}) P(S', T|S_t, t).$$

Unter Ausnutzung einer Identität für BS-Verteilungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S_t} P_{BS}(S', T|S_t, t) = & \\ & \frac{1}{\sigma^2 S_t (T-t)} \log\left(\frac{S'}{S_t e^{r(T-t)}}\right) P_{BS}(S', T|S_t, t) \\ \approx & \frac{S' - S_t e^{r(T-t)}}{\sigma^2 S_t^2 (T-t) e^{r(T-t)}} P_{BS}(S', T|S_t, t) \end{aligned}$$

erhält man die **Black-Scholes-Hedging-Formel:**

$$\Phi_{BS}^*(S_t, t) = \frac{\partial C_t^{BS}}{\partial S_t} \quad .$$

Man kann zeigen, daß aufgrund einer komplizierteren Identität das **Black-Scholes-Hedging-Risiko** mit kontinuierliches Hedging ($\tau \to 0$) verschwindet:

$$R_{BS}^* = 0.$$

Volatilität und smile effect

Die Volatilität σ in der Black-Scholes-Formel ist nicht direkt bestimmbar, sondern wird aus vorhandenen Marktdaten gewonnen.

• **Historische Volatilität:** Bestimmung der Volatilität aus der Kursentwicklung.
Diese erweist sich in der Praxis als zu klein und führt zu zu niedrigen Optionspreisen.

• **Implizite Volatilität:** Bestimmung der Volatilität aus den auf dem Markt realisierten Optionspreisen. Bei festem Aktienkurs S_t sollte σ unabhängig von den Parametern $T-t$ und K sein.

Insbesondere gilt hingegen:
σ ist *nicht* unabhängig vom Basispreis der Option K
$\rightarrow$ **Volatility smile**.

$\Rightarrow$ Das Black-Scholes ist keine konsistente Beschreibung des Aktienmarktes

Optionspreisformel in $\mathcal{O}(m^1)$

Momentenentwicklung:

$$\begin{aligned}\tilde{P}(z, S_t, T-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dS e^{iSz} P(S, T|S_t, t) \\ &=: 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \frac{(iz)^j}{j!}\end{aligned}$$

Kumulantenentwicklung:

$$\tilde{P}(z, S_t, T-t) =: \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{(iz)^j}{j!}\right]$$

mit den Kumulanten:

- $c_1 = \mu_1 = m(T-t)$
- $c_2 = \mu_2 = \sigma^2 S_t^2 (T-t)$
- $c_3 = 0$ (im Fall einer sym. Verteilung)
- $c_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$

Kumulantenentwicklung in Gleichung für Φ^*

$\Rightarrow$ **optimale Strategie** bzw. **Hedging**:

$$\Phi_t^*(S_t) = \frac{1}{c_2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial S^{n-1}} C(S, K, T-t) \quad .$$

Im Black-Scholes Modell: $c_n = 0$ für $n > 2$.

$\Rightarrow$ Reproduktion der Black Scholes Hedgingformel.

Durch Einsetzen der Kumulantenentw. in

$$\langle \Delta W_{trade} \rangle = m \sum_{t=0}^{T-\tau} \int_{t=0}^{\infty} P(S_t, t | S_0, 0) \Phi_t^*(S_t) \neq 0$$

$\Rightarrow$ **Optionspreisformel** in $\mathcal{O}(m)$:

$$C(S_0, K, T; m) = C(S_0, K, T) - \frac{m}{c_2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-3}}{\partial S^{n-3}} P_0(S, T | S_0, 0) \Big|_{S=K}$$

mit $P \to P_0$ durch $c_1 \to 0$.

Volatility smile und implied Kurtosis

Im Falle von Marktfluktuationen, die nicht zu stark von einer $F_{LN}^{\mu;\sigma}$-Verteilung abweichen:
Erfassung der **fat tails** der realen Verteilungen näherungsweise durch die Kurtosis

$$\kappa = \frac{c_4}{c_2^2}$$

d.h. durch Abbruch der Kumulantenentwicklung nach der vierten Ordnung.

$\Rightarrow$ **Optionspreisformel =**

Black-Scholes-Optionspreisformel mit $\sigma \to \sigma_{impl}$:

$$\sigma_{impl}(K,T) = \sigma_{hist}\left[1 + \frac{\kappa_T}{24}\left(\frac{(K-S_0)^2}{\sigma_{hist}^2 T} - 1\right)\right]$$