Langzeitlösungen von Reaktions-Diffusions-Systemen

Otfried Gühne, Thorsten Hiester

5. November 2000

Alles fließt — diskret

Problem:
Langzeitverhalten einer PDGl vom Typ

$$u_t = u_{xx} + F(u, u_x, u_{xx})$$

Lösung: Unter speziellen Voraussetzungen

$$u(x,t) \sim t^{-\frac{\alpha}{2}} g(xt^{-\frac{1}{2}})$$

Zu beachten sind:

- Der Anfangswert $u(x, t = 1) = f(x)$
- Der Störterm $F(u, u_x, u_{xx})$
- Eine Norm, die o.g. Asymptotik liefert

Bemerkung:
1. Die SCHRÖDINGER-Gl. ist hier nicht gemeint!

2. Für $F = 0$ ist die Lösung des Problems

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-1)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{4(t-1)}} f(y)dy \\
&= \exp\left(\frac{x^2}{4(t-1)}\right) * f(x)
\end{aligned}
$$

Technik:

1. Zu festem $L > 1$ sei def.

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &\mapsto T_L(u) := u_L(x,t) \\
u_L(x,t) &:= L^\alpha u(Lx, L^2 t)
\end{aligned}
$$

2. Stelle fest: Für $t \in [1, L^2]$

$$
\begin{aligned}
\partial_t u_L &= \partial_x^2 u_L + F_L(u_L, \partial_x u_L, \partial_x^2 u_L) \\
F_L(a,b,c) &:= L^{2+\alpha} F(L^{-\alpha} a, L^{-1-\alpha} b, L^{-2-\alpha} c)
\end{aligned}
$$

3. Für $t = 1$ gilt also

$$(R_{L,F}f)(x) := u_L(x,1) = L^\alpha u(Lx, L^2)$$

4. Die $R_{L,F}$–Abb. hat Halbgruppeneigenschaft:

$$R_{L^n,F} = R_{L,F_{L^{n-1}}} \circ \ldots \circ R_{L,F_L} \circ R_{L,F}$$

5. Bei $t = (L^2)^n$ erfüllt $u(x,t)$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= t^{-\frac{\alpha}{2}}(R_{L^n,F}f)(xt^{-\frac{1}{2}}) \\ &= L^{-\alpha n}u_{L^n}(xL^{-n}) \\ &= u(x, L^{2n}) \end{aligned}$$

6. Finde das passende α, so daß für $n \to \infty$

$$\begin{aligned} R_{L^n,F}f &\to f^* \\ F_{L^n} &\to F^* \\ R_{L,F^*}f^* &= f^* \end{aligned}$$

gilt, d.h die Renormierungsabbildung läuft in einen Fixpunkt.

7. Die Lösung erfüllt dann

$$u(x,t) \sim t^{-\frac{\alpha}{2}} f^*(xt^{-\frac{1}{2}})$$

Definition:
(a) Für $F(a.b.c) = a^{n_a} b^{n_b} c^{n_c}$ gilt

$$\begin{aligned} F_{L^n} &= L^{-nd_F} F \\ d_F &:= n_a + 2n_b + 3n_c - 3 \end{aligned}$$

(b) Für ein um 0 analytisches F wird d_F aus (a) aus dem ersten Monom der Potenzreihe gebildet.
(c) F heißt

$$\begin{aligned} \text{irrelevant,} \quad & \text{falls} \quad d_F > 0 \\ \text{marginal,} \quad & \text{falls} \quad d_F = 0 \\ \text{relevant,} \quad & \text{falls} \quad d_F < 0 \end{aligned}$$

Irrelevante Fälle: $d_F > 0$

$\longrightarrow$ Banachscher Fixpunktsatz

Satz:
Sei $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ analyt. um 0 und $0 < \delta < 1$ gegeben.
Dann ex. ein $\varepsilon > 0$, d.d.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + F(u, u_x, u_{xx}) \\ u(x,1) &= f(x) \\ \|f\| &< \varepsilon \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung hat, welche

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\delta} \left\| u(xt^{\frac{1}{2}}, t) - At^{-\frac{1}{2}} f_o^*(x) \right\| = 0$$

mit $A \in \mathbb{C}$ und

$$f_o^*(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

erfüllt.

Marginale Fälle: $d_F = 0$

Vorbereitung:

$$F = -u^3 + G(u, \partial_x u, \partial_{xx} u)$$

mit G irrelevant.
Nun: $u \mapsto \lambda^{\frac{1}{2}} u$ und $G_\lambda(u) := \lambda^{-\frac{1}{2}} G(\lambda^{\frac{1}{2}} u)$

Satz:
Für alle $\delta > 0$ ex. ein $\lambda_o, \varepsilon > 0$, d.d. für $0 < \lambda < \lambda_o$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - \lambda u^3 + G_\lambda(u, u_x, u_{xx}) \\ u(x,1) &= f(x) \\ &= f_o^*(x) + g(x) \\ \hat{g}(0) &= 0 \\ \|g\| &< \varepsilon \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung hat, welche

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}}(\log t)^{1-\delta} \left\| u(xt^{\frac{1}{2}},t) - (\frac{\lambda t \log t}{2\sqrt{3}\pi})^{-\frac{1}{2}} f_o^* \right\| = 0$$

erfüllt.

Frontlösungen:

Startwertproblem diesmal:

$$
\begin{aligned}
\partial_t u &= \partial_x \left\{(1 + a(u, \partial_x u))\partial_x u\right\} \\
u(x, 1) &= \phi(x) \\
\lim_{x \to \pm\infty} \phi(x) &= u_\pm
\end{aligned}
$$

Langzeitverhalten der Lösung bei $a = 0$:

$$\phi_o^* := u_- + (u_+ - u_-)\mathrm{erf}(x)$$

Langzeitverhalten der Lösung bei $a \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
\phi^* &= \phi_o^* + \psi \\
\psi &\approx \psi_o \\
&:= \partial(a(\phi_o^*)\partial\phi_o^*) \\
&\text{falls} \quad u_\pm \text{ klein}
\end{aligned}
$$

Satz:

Sei $a : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ analyt. mit $a(u,0) \sim u^d$ für kleine $|u|$ und $d > 0$. Für alle $\delta > 0$ ex. ein $\varepsilon > 0$, d.d.

$$\begin{aligned}
\partial_t u &= \partial_x \left\{(1 + a(u, \partial_x u))\partial_x u\right\} \\
u(x,1) &= \phi_o^*(x) + \psi(x) + f(x) \\
|u_\pm| &< \varepsilon \\
\|f\| &\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung hat, welche

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\delta} \left\| u(xt^{\frac{1}{2}}, t) - \phi^*(x) - \frac{\hat{f}(0)}{\sqrt{t}} f^*(x) \right\| = 0$$

erfüllt.

Dabei ist f^*der Fixpunkt der Renormierungstrafo auf f (explizit bekannt, falls ϕ^* bekannt ist).

Malen nach Zahlen

Probleme:

1. Diskretisierung der PDGl:
   Fehlerminimierung

2. Langzeituntersuchung:
   Stabilität, effiziente Zerlegungen

Lösung: **Crank-Nicolson-Verfahren**
Betrachte

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}y(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_o) &= y_o \end{aligned}$$

Euler

$$\begin{aligned} \text{Ableitung} &\mapsto \text{Differenzenquotient} \\ \frac{1}{a}(y_{n+1} - y_n) &= f(x_n, y_n) \quad n = 0, 1, \ldots \\ x_n &:= x_o + an, \qquad a = konst. \end{aligned}$$

Bei RD-Systemen aber: 2 partielle Ableitungen in der DGl!

EULER: Für $i = 2, \ldots, n-1$, $j \geq 0$

$$\begin{aligned} x_i &= x_o + hi \\ t_j &= t_o + kj \\ u(x_i, t_j) &\approx u_{i,j} \\ u_t &\approx \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) \\ u_{xx} &\approx \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \end{aligned}$$

Schlechter Ansatz, denn Abb.1 verdeutlicht:
u_t wird beim Punkt C approximiert
u_{xx} wird beim Punkt A approximiert

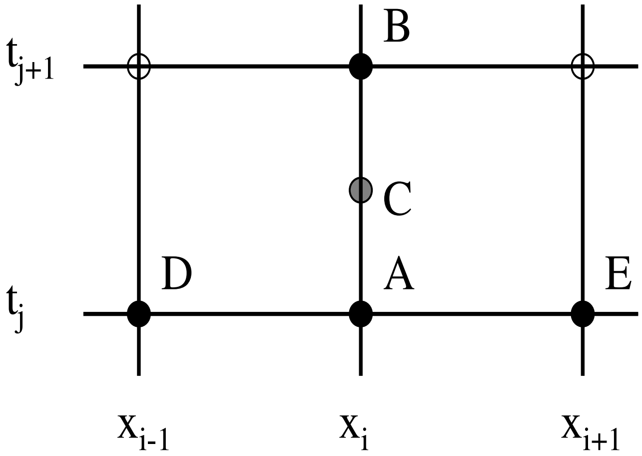

Abb.1

Verbesserung:
Mittelung über zwei Zeitschritte

$$
\begin{aligned}
u_{xx} \quad &\approx \quad \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1})\right\} \\
&+ \quad \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})\right\}
\end{aligned}
$$

Eine RD-Gleichung
$u_t = Du_{xx} + \alpha u + N(u)$, $\alpha = konst$, $0 < D$

hat damit die Gestalt

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) \quad &= \quad D\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1}\right. \\
&\qquad \left. + u_{i-1,j+1})\right\} \\
&+ \quad D\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})\right\} \\
&+ \quad \alpha\frac{1}{2}\{u_{i,j+1} + u_{i,j}\} + N(u_i)
\end{aligned}
$$

wobei $N(u)$ allgemeine Nichtlinearitäten, bezeichnet.

Vektornotation:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &= (u_{2,j}, \ldots, u_{n-1,j}) \\ ((2-k\alpha)\mathbf{E} + rD\mathbf{J})\mathbf{u}_{j+1} &= ((2+k\alpha)\mathbf{E} - rD\mathbf{J})\mathbf{u}_j \\ &+ 2k\mathbf{N}_j \end{aligned}$$

wobei $r = \frac{k}{h^2}$ und für $s, t = 2, \ldots, n-1$

$$\mathbf{J} := (j)_{s,t} := \begin{cases} -1 \text{ falls } s \pm 1 = t \\ 2 \text{ falls } s = t \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

definiert ist.
Periodische Ränder: $(j)_{1,n} = (j)_{n,1} = -1$

Effizienzsteigerung: $\mathbf{LR}$–Zerlegung symmetrischer Matrizen

$$((2-k\alpha)\mathbf{E}+rD\mathbf{J}) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & \dots & 0 & c \\ c & a & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & c & 0 \\ 0 & \vdots & & c & a & c \\ c & 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

mit $a := 2 - k\alpha + 2rD$ und $c = -rD$
Dann gilt mit

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ \frac{c}{m_1} & 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{c}{m_{n-2}} & 1 & 0 \\ \xi_1 & \dots & \dots & \xi_{n-2} & \xi_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} m_1 & c & 0 & \dots & 0 & \xi_1 m_1 \\ 0 & m_2 & c & 0 & \dots\ 0 & \xi_2 m_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & c & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & m_{n-1} & \xi_{n-1} m_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & m_n \end{pmatrix}$$

die Zerlegung

$$\mathbf{A} := ((2 - k\alpha)\mathbf{E} + rD\mathbf{J}) = \mathbf{LR}$$

Also $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} 1. \quad \mathbf{Lc} &= \mathbf{b} \\ 2. \quad \mathbf{Rx} &= \mathbf{c} \end{aligned}$$

wobei 1. und 2. "leicht" sind.
$(m_i)_i$, $(\xi_{i-1})_{1 \leq i-1}$, $i = 1 \dots n$ sind rekursiv def.

Diskretisierungsfehler und Stabilität

Definition:
An der Stelle x_k sei der
(a) *Lokaler Diskretisierungsfehler* d_{k+1}

$$\begin{aligned} d_{k+1} \quad &:= \quad y(x_{k+1}) - y(x_k) \\ &\quad\quad -af(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), a) \end{aligned}$$

(b) *Globaler D.-Fehler* g_{k+1}

$$g_{k+1} := y(x_{k+1}) - y_{k+1}$$

Damit berechnet man für das CRANK-NICOLSON-Schema an der Stelle (x_i, t_j)

$$\begin{aligned} d_{i,j+1} \quad &= \quad \mathcal{O}(k^3) + \mathcal{O}(h^2 k) \\ g_{i,j+1} \quad &= \quad \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Definition:
Eine Methode mit der Iterationsvorschrift

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{y}_n$$

heiße *stabil*, falls ein $G \in \mathbb{R}$ ex. mit

$$\|\mathbf{g}_{n+1}\| \leq \left\| \left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^n \right\| \|\mathbf{g}_1\| \leq G$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. $\mathbf{g}_n$ bez. den n. Fehlervektor

Es gilt:

1. $\left\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right\| \leq 1 \Leftrightarrow$ Stabilität des Verfahrens

2. $\mathbf{g}_n \to 0$, falls $\left\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right\| < 1$

Wählt man

$$\|\mathbf{M}\| := \max\{|\lambda| |\ \lambda \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{M}\}$$

so sind die EW der CN-Methode beschränkt durch

$$-1 \leq \frac{2 + k\alpha - rD\lambda_{\mathbf{J}}}{2 - k\alpha + rD\lambda_{\mathbf{J}}} \leq 1$$

wobei $0 \leq \lambda_{\mathbf{J}} \leq 4$ die EWe von $\mathbf{J}$ sind, woraus

$$\alpha h^2 \leq D\lambda_{\mathbf{J}}$$

folgt (man kann $0 < \lambda_{\mathbf{J}}$ annehmen.).
Beachte: Es gibt keine Beschränkung von k !

Ein RD-System

$$\begin{aligned}
a_t &= D_a a_{xx} - k_a ab \\
b_t &= D_b b_{xx} - k_b ab \\
a(x < 0, 1) &= a_o \\
b(0 < x, 1) &= b_o \\
a(0 < x, 1) &= b(x < 0) = 0
\end{aligned}$$

wird durch Umskalierung zu

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_t &= \tilde{a}_{xx} - 2\tilde{a}\tilde{b} \\
\tilde{b}_t &= D\tilde{b}_{xx} - 2\tilde{a}\tilde{b} \\
\tilde{a}(x < 0, 1) &= 1 \\
\tilde{b}(0 < x, 1) &= \frac{b_o k_a}{a_o k_b} =: k \\
\tilde{a}(0 < x, 1) &= \tilde{b}(x < 0, 1) = 0
\end{aligned}$$

O.B.d.A. sei $D = 1$.
Schau' auf

$$\begin{aligned} u &:= \tilde{a} - \tilde{b} \\ v &:= \tilde{a} + \tilde{b} \\ u_t &= u_{xx} \\ v_t &= v_{xx} - v^2 + u^2 \\ u(x < 0, 1) &= v(x < 0, 1) = 1 \\ u(0 < x, 1) &= -v(0 < x, 1) = -k \end{aligned}$$

Die Lösung für u ist bekannt (Gauss-Faltung)

$$u(x, t-1) = \frac{1-k}{2} + \frac{1+k}{2} \mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{t}})$$

Sei nun noch $k = 1$ ($k \neq 1$ läßt die R.-Zone wandern).
Jetzt der Skalierungsansatz:

$$\begin{aligned} v_L &:= L^\alpha v(Lx, L^\gamma t), \quad t \in [1, L^\gamma] \\ \partial_t v_{L^n} &= L^{(-2+\gamma)n} \partial_x^2 v - L^{(\gamma-\alpha)n}(v_{L^n}^2 - u_{L^n}^2) \end{aligned}$$

Problem: $\delta := -1 + \frac{\gamma}{2} > 0$

Mögliche Lösung:

Sei zu $a \in \mathbb{R}^+$und $\mu \in \mathbb{R}$ die Norm

$$\begin{aligned} \|f(x,t)\|_{a,\mu} &:= \sup_{t\in[1,L^\gamma]} \sup_{|x|<a} |f(xt^{-\mu},t)| \\ &= \sup_{t\in[1,L^\gamma]} \sup_{|x|<\frac{a}{t^\mu}} |f(x,t)| \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall a > 0 \, \exists N(a,\varepsilon) \in \mathbb{N} : \; a \leq \varepsilon L^{\delta N}$$

Für $\mu \geq 1 - \frac{1}{\gamma} > \frac{1}{2}$ $(\Leftrightarrow r \geq 0)$, $m \geq n > N(a,\varepsilon)$ und

$$\alpha \leq \delta = \frac{\gamma}{2} - 1$$

erhält man

$$\|v_{L^n} - v_{L^m}\|_{a,\mu} \;\; \leq \;\; C \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^r |v'(0,L^{\gamma n}t)|\varepsilon + \|Rest\|_{\varepsilon,\mu}$$

$$
\begin{aligned}
\|Rest\|_{\varepsilon,\mu} &= \left\| v_{L^n}(\frac{K_m}{L^n}x,t) - v_{L^m}(\frac{K_m}{L^m}x,t) \right\|_{\varepsilon,\mu} \\
K_m &= CL^{-\delta m} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^r \ll 1
\end{aligned}
$$

Insgesamt:

$$
v_{L^n} \text{ ist Cauchy} - \text{Folge} \;\Leftrightarrow\; \|Rest\|_{\varepsilon,\mu} \leq \varepsilon
$$

Idee: Zeige

$$
\begin{aligned}
& 2 = \alpha = \delta \\
\Rightarrow \quad & v_{L^n}(0,t) = L^{\alpha n} v(0, L^{\gamma n} t) \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} C > 0
\end{aligned}
$$

Leichter zu sehen ist:

$$
\begin{aligned}
& v_{L^n}(0,t) = L^{\alpha n} v(0, L^{\gamma n} t) \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} C > 0 \\
\Rightarrow \quad & 2 \leq \alpha \leq \delta
\end{aligned}
$$

Mögliche Verallgemeinerung:

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} - v^p + u^p \\ p &> 1 \end{aligned}$$

hat vielleicht ein Skalenverhalten

$$\frac{2}{p-1} = \alpha = \frac{\gamma}{2} - 1$$

also

$$\lim_{t\to\infty} v(x,t) = t^{-\frac{1}{p+1}} g(xt^{-\frac{p-1}{2(p+1)}})$$