9. On the State of the Art [17]

Thema: Stand der Kunst der (mechanischen) Turbulenz in inkompressiblen Flüssigkeiten und Gasen bei $\mathrm{Re} \gg \mathrm{Re}_{kr}$

9.1. Qualitative Aspekte

- Große Wirbel ($r \sim L$)
  - Geometrieabhängig, nicht universell
  - Wichtig f. Energiebilanz, Transportphänomene [18]
  - Ingenieursanwendungen [19]
- Kleine Wirbel ($r \ll L$)
  - Geometrieunabhängig, universell
  - Von fundamentalem Interesse
  - LES (large eddy simulation) [20]

[17] M. Nelkin: Turbulence in Fluides, chao-dyn/990623
[18] Tenneke, Lumley 1972
[19] Hinze 1975
[20] Meneveau, Katz 2000

- DNS (direct numerical simulation) [21]
  - $(L/\eta)^3 \sim \mathrm{Re}^{9/4}$ Freiheitsgrade
  - $\mathrm{Re} = 10^3 \quad \Rightarrow \quad 10^{27/4}$
  - Luft: $\mathrm{Re} = 10^6 \quad \Rightarrow \quad 10^{27/2}$

- Existenz und Eindeutigkeit
  - $\nu = 0$ glatte AW entwickeln räumliche Singularitäten in endlicher Zeit [22]

9.2. Kolmogorov Theorie [23]

- Kaskade von Energietransport von großen zu kleinen Skalen charakterisiert durch $\langle\epsilon\rangle$
  - Energiedissipationsrate pro Masseneinheit
  - Rate der Energiezufuhr bei Skala L
  - Rate des Energietransfers durch Nichtlinearität
  - Rate der Dissipation bei Skala η

---

[21] Moin, Mahesch 1998

[22] Constantin 1994

[23] Frisch 1995

- $\langle\epsilon\rangle$ unabhängig von ν [24]

- $\eta = (\nu^3/\langle\epsilon\rangle) \sim L\mathrm{Re}^{-3/4}$ [25]

- Longitudinales Energiespektrum $E(k)/(\langle\epsilon\rangle\,\nu^5)^{1/4}$ universelle Fkt. von $k\eta$ [26]

- $1/L \ll k \ll 1/\eta$ (inertial subrange) Gleichgewicht unabhängig von ν:

$$E(k) = C\,\langle\epsilon\rangle^{2/3}\,k^{-5/3} \tag{235}$$

  mit $C \sim 0.5$ [27]

- Experimenteller Test der Isotropie [28]

---

[24] Sreenivasan 1998
[25] Nelkin 1994
[26] Saddoughi, Veeravalli 1994
[27] Yeung, Zhou (DNS) 1997
[28] Saddoughi, Veeravalli 1994

9.3. Intermittenz

- Turbulenz ist kein Gauß-Prozeß [29]
- Korrelatoren haben anomale Exponenten
- Lokale Dissipationsrate $\epsilon(x) = 15\nu(\partial u(x))^2$

$$\langle \epsilon(x)\epsilon(x+r)\rangle \sim \langle \epsilon \rangle^2 \, (L/r)^{\mu} \tag{236}$$

  hat Exponenten $\mu \sim 0.25$ [30]

- Longitudinale Strukturfunktionen

$$\langle (u(x+r)-u(x))^p \rangle \sim \langle \epsilon \rangle^{p/3} \, r^{p/3} \, (r/L)^{\zeta_p - p/3} \tag{237}$$

- Exponenten ζ_p
  - Experimente [31]
  - DNS [32]
  - Fit durch She-Leveque-Modell $\zeta_p = (p/9) + 2(1-(2/3)^p)$

---

[29] Frisch 1995

[30] Sreenivasan, Kailasnath 1993

[31] Sreenivasan, Antonia 1997

[32] Cao, Chen, She 1996

- ∞-viele Exponenten: Multifraktale [33]
- Turbulenz als multiplikativer Zufallsprozeß [34]
- Vortexfilamente [35]
- Kraichnan-Modell [36]

9.4. 2D Turbulenz

- Keine Dehnung von Vortices: $u \perp \omega$
- Inverse Energiekaskade [37]
  - DNS [38]
  - Expermimente [39]
- Direkte Enstrophiekaskade (Betrag der Vortizität) [40]
  - k^{-3} Energiespektrum [41]

[33] Mandelbrot 1974
[34] Toschi 1998
[35] She, Jackson, Orszag 1990
[36] Kraichnan 1974
[37] Kraichnan 1970
[38] Smith, Yakhot 1994
[39] Paret, Tabeling 1997
[40] Batchelor 1969
[41] Goldburg et al. 1998

9.5. Passive Skalare

Bsp.: Dynamik eines Farbstoffs, der Temperatur usw. [42]

$$[\partial_t + u \cdot \nabla - \kappa \triangle]\Theta = f \qquad (238)$$

- Keine Isotropie bei kleinen Skalen: $\frac{\langle(\partial_x\Theta)^3\rangle}{\langle(\partial_x\Theta)^2\rangle^{3/2}}$ nicht Null [43]
- Intermittenz [44]
- Kraichnan-Modell: Geschw. Gauß-verteilt [45]
  - Theorie [46]
  - DNS [47]

[42] Warhaft 2000
[43] Sreenivasan 1991
[44] Mydlarski, Warhaft 1998
[45] Kraichnan 1994
[46] Frisch, Mazzino, Vergassola 1998
[47] Chen, Kraichnan 1998

9.6. Ausblick

- Ist Turbulenz ein ungelöstes Phänomen? [48]

- *Lösung* def. als klares Verständnis des beobachteten Phänomens

- 2 Vergleichsfälle: stat. Theorie v. Flüssigkeiten vs. kritische Phänomene
  - MC reproduziert molekulare Dynamik: *numerische* Lösung
  - RG erklärt kritische Phänomene: *theoretische* Lösung

- Turbulenz: z. Z. weder numerisch noch theoretisch gelöst

[48] Nelkin 1992