8. Homogene isotrope Turbulenz II

8.1. Ortsdarstellung der Zweipunktfunktion

Betrachte den Geschwindigkeit-Geschwindigkeit-Korrelator

$$B_{i,j}(\xi, \tau) = \langle u_i(x,t)\, u_j(x+\xi, t+\tau)\rangle \qquad (209)$$

bei verschwindender Zeitdifferenz $\tau = 0$. (Simultane Messung der Geschwindwigkeiten an verschiedenen Orten.)

Homogenität und Isotropie schränken (209) auf die allgemeine Form

$$B_{i,j}(\xi) = U^2 \left\{ \Big(f(r) - g(r) \Big) \frac{\xi_i \, \xi_j}{r^2} + g(r) \, \delta_{i,j} \right\} \tag{210}$$

ein. (Siehe letzte Vorlesung.)

8.2. Impulsdarstellung der Zweipunktfunktion

Betrachte die Fouriertransformierte von (210)

$$\Phi_{i,j}(k) = \int d^3\xi \; e^{-i\xi k} \; B_{i,j}(\xi) \tag{211}$$

(Keine FT in der Zeit.)

kurze Abstände $\sim$ große Impulse

8.3. Spur der Zweipunktfunktion

Ortsraumdarstellung

$$R_{i,i}(\xi) = U^2 \Big(f(r) + 2\,g(r) \Big) = U^2\ R(r) \tag{212}$$

Impulsraumdarstellung

$$\Phi_{i,i}(k) = 4\pi\ U^2 \int_0^\infty dr\ r^2\ R(r)\ \frac{\sin(|k|\,r)}{|k|\,r} \tag{213}$$

bzw.

$$\Phi_{i,i}(k) = 4\pi\ U^2\ \phi_{i,i}(|k|) \tag{214}$$

8.4. Energiespektrum

Kinetische Energiedichte bei x proportional zu

$$\langle u_i(x)\, u_i(x) \rangle = B_{i,i}(0) = 4\pi \int_0^\infty dk\ k^2\ \phi_{i,i}(k) \tag{215}$$

und somit ein Ausdruck der Form

$$2 \int_0^\infty dk\ E(k) = 2\ q \tag{216}$$

Dabei bedeutet

$$\int_k^{k+\triangle k} dk' \, E(k') \tag{217}$$

die kinetische Energie im Intervall

$$[k, k + \triangle k] \tag{218}$$

Energiespektrum = zentraler Begriff der hom. isotr. Turbulenz

8.5. Nicht-Stationarität

Homogene isotrope Turbulenz ist nicht stationär

$$\frac{d}{dt} q(t) = -\frac{\nu}{2} \sum_{i,j} \left\langle \left(\partial_i u_j + \partial_j u_i \right)^2 \right\rangle = -\epsilon \tag{219}$$

sondern dissipativ mit Rate ϵ

Dissipationsrate:

Spektrale Rate für das Intervall $[k, k + \triangle k]$

$$2\,\nu \int_k^{k+\triangle k} dk'\,(k')^2\,E(k') \qquad (220)$$

Energiebilanz:

Energiezufuhr durch nicht-linearen Term T:

$$\partial_t E(k,t) = T(k,t) - 2\nu\,k^2\,E(k,t) \qquad (221)$$

Experiment:

Windtunnel mit Verwirbelung durch Gitter:

- stationäre Strömung
- Dissipationsrate bestimmt durch die benötigte Leistung
- homogen und isotrop im mitbewegten Koordinatensystem

$$\frac{\partial}{\partial t} = \bar{U}\,\frac{\partial}{\partial x} \qquad (222)$$

8.6. Dimensionelle Analyse

Einzigen Dimensionsbehafteten Größen sind [15]

$$[\nu] = \frac{m^2}{s} \tag{223}$$

$$[\epsilon] = \frac{m^2}{s^3} \tag{224}$$

Bilde daraus die Kolmogorovlänge

$$l_K = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{225}$$

die Kolmogorovzeit

$$t_K = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{226}$$

und die Kolmogorovgeschwindigkeit

$$v_K = (\nu\,\epsilon)^{\frac{1}{4}} \tag{227}$$

[15] [Energie]/[Zeit]/[Masse] $= \frac{kg\,m^2}{s^2}\,\frac{1}{s}\,\frac{1}{kg} = \frac{m^2}{s^3}$

8.7. Kolmogorovs Hypothesen

8.7.1. Erste Hypothese

Für grosse Reynoldszahlen gibt es eine Region großer Impulse, bei denen (approximativ) ein statistisches Gleichgewicht herrscht. Das Gleichgewicht

- ist bestimmt durch ϵ und ν,
- und es ist universell.

Folgerung:

$$E(k) = \epsilon^{\frac{2}{3}}\, k^{-\frac{5}{3}}\, \bar{E}\,(l_K\, k) \tag{228}$$

aufgrund der Dimensionsanalyse

$$[\epsilon]^{\frac{2}{3}}\, [k]^{-\frac{5}{3}} = \left(\frac{m^2}{s^3}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{m}\right)^{-\frac{5}{3}} = \frac{m^3}{s^2}$$

8.7.2. Zweite Hypothese

Sei $k_K = \frac{1}{l_K}$ die Kolmogorovsche Wellenzahl.

> Für $\nu \gg 1$ gibt es eine Region (engl. *inertial subrange*) $k_e \ll k \ll k_K$ von Wellenzahlen, in der das Gleichgewicht unabhängig von ν ist.

Dabei erweist sich k_e als die Wellenzahl, bei der $E(k)$ maximal ist. [16]

Folgerung:

> Kolmogorovs $\frac{5}{3}$-Gesetz
>
> $$E(k) = \alpha\, \epsilon^{\frac{2}{3}}\, k^{-\frac{5}{3}} \qquad (229)$$

mit universeller Konstante

$$\alpha = \bar{E}(0) \qquad (230)$$

[16] Auf der Wirbelskala k_e hält das System die größte Enrgiedichte bereit.

8.8. Längenskalen

8.8.1. Integrale Längenskala

Bilde aus transversalem Korrelator die Skala

$$\Lambda_\perp = \int_0^\infty dr\; g(r) \tag{231}$$

als Maß für die **größten** Wirbel

Zugehörige Reynoldszahl

$$Re_\Lambda = \frac{\bar{U}\,\Lambda_g}{\nu} \tag{232}$$

8.8.2. Mikroskala

Entwickle den transversalen Korrelator in

$$g(r) = 1 - \frac{r^2}{\lambda_g^2} + O(r^3) \tag{233}$$

als Maß für die **kleinsten** Wirbel

Zugehörige Reynoldszahl

$$Re_\lambda = \frac{\bar{U}\,\lambda_g}{\nu} \tag{234}$$