# 7. Homogene isotrope Turbulenz

## Idee:

Auf Längenskalen $L_{mikro} \ll L \ll L_{makro}$, wobei $L_{mikro}$ die Skala der kleinsten Wirbel ist, d. h. die Skala, auf der die Energie dissipiert wird, und wobei $L_{makro}$ die Skala der größten Wirbel ist, d. h. die Skala, auf der die Randbedingungen vorgegeben sind, ist Turbulenz ein <u>homogenes</u> und <u>isotropes</u> Phänomen.

## Dogma:

Suche eine Theorie der Korrelatoren, die sich experimentell bestätigen läßt.

7.0. Filmvorführung
7.1. Druck-Geschwindigkeit-Korrelator
7.2. Trivialität von 7.1.
7.3. Geschwindigkeit-Geschwindigkeit-Korrelator
7.4. Karman-Howarth-Gleichung
7.5. $u$-$u$-$u$-Korrelator
7.6. Zusammenfassung

## 7.1. Druck-Geschwindigkeit-Korrelator

Betrachte den Druck $p$ und die Geschwindigkeit $u$ zu einer beliebigen aber festen Zeit $t$.

Homogenität und Isotropie bedingen Einschränkungen an die Form von Skalar-Vektor-Korrelatoren.

$O(3)$-Transformationen wirken auf $x$, $u$ und $p$ wie folgt

$$x \mapsto R\,x \tag{184}$$

$$u(x) \mapsto R\,u\big(R^{-1}\,x\big) \tag{185}$$

$$p(x) \mapsto p\big(R^{-1}\,x\big) \tag{186}$$

Die inverse (innere) Koordinatentransformation in der Gruppenwirkung auf vektorielle Funktionen

$$\Big(x \mapsto u(x)\Big) \mapsto \Big(x \mapsto r(u)(x) = R\,u\big(R^{-1}(x)\big)\Big) \tag{187}$$

dient zur Erfüllung des Gruppenaxioms gemäß

$$\begin{aligned} r_1\big(r_2(u)\big)(x) &= R_1\,\big(r_2(u)\big)\big(R_1^{-1}\,x\big) \\ &= R_1\,R_2\,u\big(R_2^{-1}\,R_1^{-1}\,x\big) \\ &= \big(r_1 r_2\big)(u)(x) \end{aligned}$$

Wende nun diesen Formalismus auf den Druck-Geschwindigkeits-Korrelator an. Translationsinvarianz bedingt

$$A_i(\xi) = \langle p(x)\,u_i(x+\xi)\rangle \qquad (188)$$

OBdA können wir daher $x = 0$ setzen.

$O(3)$-Invarianz von (188) bedeutet ferner, daß

$$\boxed{A(\xi) = R\,A\big(R^{-1}\xi\big) \qquad (189)}$$

**7.1.1. Richtung:** Sei $\hat{e} = \frac{\xi}{|\xi|}$ der Einheitsvektor in $\xi$-Richtung. Zerlege

$$A = A_{\|} + A_{\perp} \tag{190}$$

in eine parallele und eine senkrechte Komponente

$$A_{\|} = (A \cdot \hat{e})\,\hat{e}, \qquad A_{\perp} = A - A_{\|}$$

Wähle $R$ als Spiegelung der senkrechten Komponente [13]

$$R\,v = R\,(v_{\|} + v_{\perp}) = v_{\|} - v_{\perp} \tag{191}$$

Aus (189) folgt sofort $A_{\perp} = 0$.

**7.1.2. Betrag:** Die Fkt. $A(\xi) \cdot \hat{e}$ ist ein Skalar. Wegen der $O(3)$-Invarianz hängt sie nur vom Betrag $|\xi|$ ab.

Folglich gilt

$$A(\xi) = a(|\xi|)\,\hat{e} \tag{192}$$

wobei $a$ eine skalare Funktion des Abstands ist.

[13] Preisfrage: Warum ist $R$ in $O(3)$?

In Komponentenform und ausgeschrieben lautet dieses Zwischenergebnis

$$\boxed{\langle p(x)\, u_i(x+\xi)\rangle = a(|\xi|)\, \frac{\xi_i}{|\xi|} \qquad (193)}$$

## 7.2. Trivialität des Druck-Geschwindigkeit-Korrelators

Wir mitteln über divergenzfreie Geschwindigkeitsfelder:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_i} A_i(\xi) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \langle p(x)\, u_i(x+\xi)\rangle = 0 \quad (194)$$

Setze $b(r) = \frac{a(r)}{r}$. Dann folgt aus (194) die DGL

$$\left( r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + 3 \right) b(r) = 0 \qquad (195)$$

und $b(r)$ ist eine homogene Funktion vom Grade $-3$

$$b(r) = \frac{\text{const.}}{r^3} \tag{196}$$

Die einzige im Ursprung reguläre Lsg. ist die Nullfunktion. [14]

Homogenität und Isotropie bedingt

$$\langle p(x)\, u_i(x+\xi)\rangle = 0 \tag{197}$$

## 7.3. Geschwindigkeit-Geschwindigkeit-Korrelator

Die Suche nach nichttrivialen Korrelatoren geht weiter.

Verdächtige den komplizierteren Fall

$$B_{i,j}(\xi) = \langle u_i(x)\, u_j(x+\xi)\rangle \tag{198}$$

Homogenität und Isotropie schränken (198) auf die allgemeine Form ein

[14] Wir haben somit einen Korrelator exakt bestimmt!

$$B_{i,j}(\xi) = U^2 \left\{ \Big( f(r) - g(r) \Big) \frac{\xi_i \, \xi_j}{r^2} + g(r) \, \delta_{i,j} \right\} \tag{199}$$

wobei $r = |\xi|$ und $U^2 = \langle u(x)^2 \rangle$

### 7.3.1. Longitudinaler Anteil

Der longitudinale Korrelator berechnet sich gemäß

$$\begin{aligned}
\langle u_{\|}(x) \, u_{\|}(x+\xi) \rangle &= \langle u_i(x) \frac{\xi_i}{r} \, u_j(x+\xi) \frac{\xi_j}{r} \rangle \, \hat{e} \otimes \hat{e} \\
&= B_{i,j}(\xi) \, \frac{\xi_i \, \xi_j}{r^2} \, \hat{e} \otimes \hat{e} \\
&= U^2 \, f(r) \, \hat{e} \otimes \hat{e}
\end{aligned}$$

und liefert die Bedeutung der Fkt. $f(r)$

### 7.3.2. Transversaler Anteil

Der transversale Korrelator hingegen ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
&\langle u_i^{\perp}(x)\, u_j^{\perp}(x+\xi)\rangle \\
&= \left\langle \left(u_i - u_{i'}\,\frac{\xi_i\xi_{i'}}{r^2}\right)(x)\ \left(u_j - u_{j'}\,\frac{\xi_j\xi_{j'}}{r^2}\right)(x+\xi)\right\rangle \\
&= B_{i,j}(\xi) - B_{i',j}(\xi)\,\frac{\xi_i\xi_{i'}}{r^2} - B_{i,j'}(\xi)\,\frac{\xi_j\xi_{j'}}{r^2} \\
&\quad + B_{i',j'}(\xi)\,\frac{\xi_i\xi_{i'}\xi_j\xi_{j'}}{r^4}
\end{aligned}
$$

Eine kleine Nebenrechnung liefert

$$
\begin{aligned}
&B_{i,j}(\xi)\,\frac{\xi_j\xi_k}{r^2} \\
&= U^2\ \left\{\Big(f(r) - g(r)\Big)\,\frac{\xi_i\,\xi_j}{r^2} + g(r)\ \delta_{i,j}\right\}\ \frac{\xi_j\xi_k}{r^2} \\
&= U^2\ f(r)\,\frac{\xi_i\xi_k}{r^2}
\end{aligned}
$$

sowie gleichfalls

$$
\begin{aligned}
& B_{i,j}(\xi)\,\frac{\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l}{r^4} \\
&= U^2\,\left\{\Big(f(r)-g(r)\Big)\,\frac{\xi_i\,\xi_j}{r^2}+g(r)\,\delta_{i,j}\right\}\,\frac{\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l}{r^4} \\
&= U^2\,f(r)\,\frac{\xi_k\xi_l}{r^2}
\end{aligned}
$$

Übrig bleibt als transversaler Korrelator

$$
\langle u_i^{\perp}(x)\,u_j^{\perp}(x+\xi)\rangle = U^2\,g(r)\,\left(\delta_{i,j}-\frac{\xi_i\xi_j}{r^2}\right) \tag{200}
$$

### 7.3.3. Illustration

Lasse $\xi_i = r\,\delta_{1,i} = r\,\hat{e}_{1,i}$ in 1-Richtung zeigen. Dann gilt

$$
B_{1,1}(r\,\hat{e}_1) = U^2\,f(r) \tag{201}
$$

und

$$
B_{2,2}(r\,\hat{e}_1) = B_{3,3}(r\,\hat{e}_1) = U^2\,g(r) \tag{202}
$$

## 7.4. Karman-Howarth Gleichung

Die Kontinuitätsgleichung liefert eine Bedingung zwischen dem longitudinalen und dem transversalen Korrelator.

Die Kontinuitätsgleichung liefert

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_j} B_{i,j}(\xi) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \langle u_i(x)\, u_j(x+\xi) \rangle = 0 \tag{203}$$

Einsetzung der Gleichung (199) ergibt die DGL

$$\boxed{g(r) = \frac{r}{2}\, f'(r) + f(r) \qquad (204)}$$

Karman und Howardt konnten (204) durch Experimente bestätigen.

## 7.5. Dreifachkorrelator

Um das Faß voll zu machen, schauen wir uns noch den folgenden Korrelator an

$$T_{i,j;k}(\xi) = \langle u_i(x)\, u_j(x)\, u_k(x+\xi)\rangle \tag{205}$$

mit etwas unsymmetrischer Indexstruktur

Symmetrieüberlegungen führen früher oder später zu der Einsicht, daß

$$T_{i,j;k}(\xi) = U^3 \left\{ \Big(k(r) - h(r) - 2\,q(r)\Big) \frac{\xi_i \xi_j \xi_k}{r^3} \right.$$
$$\left. + h(r)\; \delta_{i,j}\, \frac{\xi_k}{r} + q(r)\; \left(\delta_{i,k}\, \frac{\xi_j}{r} + \delta_{j,k}\, \frac{\xi_i}{r}\right) \right\} \tag{206}$$

von drei Funktionen des Abstands abhängt.

Die Kontinuitätsgleichung liefert als Bedingungen die Karman-Howarth Relationen

$$k(r) = -2\,h(r) \tag{207}$$

und

$$q(r) = -\frac{r}{2}\, h'(r) - h(r) \tag{208}$$

## 7.6. Zusammenfassung

- Homogenität und Isotropie reduziert die Form von Korrelatoren auf eine einfache Form
- Kontinuitätsgleichung stellt Bedingungen an die auftretenden Koeffizientenfunktionen
- Mehr davon in der nächsten Vorlesung

**Literatur:**

- Landahl, Mollo-Christensen: Quelle der Vorlesung
- Landau,Lifschitz: Kap. 33 und 34
- Monin, Yaglom: viele Seiten in Bd. 2
- Stanišiċ: viele Rechnungen, wenig Text