6. Funktionalintegralformulierung

Idee: Pfadintegraldarstellung für das Greensche Funktional des charakteristischen Funktionals analog zur Quantenmechanik

6.1. Funktionales Anfangswertproblem
6.2. Greensfunktional
6.3. Infinitesimales Greensfunktional
6.4. Funktionale Fouriertransformation
6.5. Zeitgitter und Pfadintegral
6.6. Pfadintegrallösung des AW-Problems
6.7. Pfadintegraldarstellung der Momente
6.8. Ausintegration von θ
6.9. Navier-Stokes Wirkung

6.1. Funktionales Anfangswertproblem

Funktionale Evolutionsgleichung

$$\partial_t \Phi[\theta, t] = \mathcal{G}\Phi[\theta, t] \tag{156}$$

hat eindeutige Lösung $\Phi[\theta, t]$ zu Anfangswert [11]

$$\Phi_0[\theta] = \Phi[\theta, t_0] \tag{157}$$

[11] Jedenfalls in einem formalen Sinne.

6.2. Greensfunktional

Sei $t \geq t_0$. Superpositionsprinzip bedingt Integraldarstellung

$$\Phi[\theta_1, t_1] = \int G[\theta_1, t_1; \theta_0, t_0]\ \Phi[\theta_0, t_0]\ [d\theta_0] \quad (158)$$

mit Greensfunktional $G[\theta_1, t_1; \theta_0, t_0]$.

Allgemeine Eigenschaften sind Anfangsbedingung

$$G[\theta_1, t_0; \theta_0, t_0] = \delta[\theta_1 - \theta_0] \quad (159)$$

und Kompositionsregel für $t_2 \geq t_1 \geq t_0$

$$G[\theta_2, t_2; \theta_0, t_0]$$
$$= \int G[\theta_2, t_2; \theta_1, t_1]\ G[\theta_1, t_1; \theta_0, t_0]\ [d\theta_1] \quad (160)$$

6.3. Infinitesimales Greensfunktional

Evolutionsgleichung bedingt für $0 < \triangle t \ll 1$ die infinitesimale Form

$$\begin{aligned} & G[\theta_1, t_0 + \triangle t; \theta_0, t_0] \\ &= [1 + \triangle t\, \mathcal{G}_{\theta_1}]\ \delta[\theta_1 - \theta_0] + O(\triangle t^2) \\ &= \exp[\triangle t\, \mathcal{G}_{\theta_1}]\ \delta[\theta_1 - \theta_0] + O(\triangle t^2) \end{aligned} \qquad (161)$$

Der infintesimale Generator ist dabei gegeben durch einen Ausdruck der Form

$$\mathcal{G}_\theta = i\ \left(\theta, A\left[-i\,\frac{\delta}{\delta\theta}\right]\right) \qquad (162)$$

Dabei ist A durch die rechte Seite der Navier-Stokes Gleichung definiert, geschrieben als

$$\partial_t u(x,t) = A[u(x,t)] \qquad (163)$$

6.4. Funktionale Fouriertransformation

Idee: mache aus der Funktionalableitung einen Multiplikationsoperator

δ-Funktional darstellbar als Funktionalintegral

$$\delta[\theta] = \int e^{i\,(\theta,\phi)}\,[d\phi] \tag{164}$$

Schreibe damit das infinitesimale Greensfunktional als

$$\begin{aligned} & G[\theta_1, t_0 + \triangle t; \theta_0, t_0] \\ = \; & e^{\triangle t\, \mathcal{G}_{\theta_1}} \int [\phi_1]\, e^{i(\theta_1 - \theta_0, \phi_1)} + O(\triangle t^2) \end{aligned} \tag{165}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & G[\theta_1, t_0 + \triangle t; \theta_0, t_0] \\ = \; & \int [\phi_1]\, e^{i\,\triangle t\,(\theta_1, A[\phi_1]) + i\,(\theta_1 - \theta_0, \phi_1)} + O(\triangle t^2) \end{aligned} \tag{166}$$

6.5. Zeitgitter und Pfadintegral

Führe ein äquidistantes Zeitgitter von $N+1$ Punkten ein

$$t_{N+1} > t_N > t_{N-1} > \cdots > t_1 > t_0 \tag{167}$$

Iteration der Kompositionsregel ergibt

$$G[\theta_{N+1}, t_{N+1}; \theta_0, t_0] = \int [d\theta_N] \cdots \int [d\theta_1]$$
$$G[\theta_{N+1}, t_{N+1}; \theta_N, t_N] \cdots G[\theta_1, t_1; \theta_0, t_0] \tag{168}$$

Setze nun das infinitesimale Greensfunktional ein

$$G[\theta_{N+1}, t_{N+1}; \theta_0, t_0] = \int \prod_{i=1}^{N} [d\theta_i] \int \prod_{j=1}^{N+1} [d\phi_i]$$
$$e^{i \sum_{k=1}^{N+1} \triangle t \left\{ (\theta_k, A[\phi_k]) + \left(\frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{\triangle t}, \phi_k \right) \right\}}$$
$$+ O\left(\frac{(t_{N+1} - t_0)^2}{N+1} \right) \tag{169}$$

Definiere anschließend interpolierte Felder durch

$$\theta_k(x) = \theta(x, t_0 + k \ \triangle \, t) \tag{170}$$

und

$$\phi_k(x) = \phi(x, t_0 + k \ \triangle \, t) \tag{171}$$

Im Limes $N \to \infty$ bekommen wir das Pfadintegral

$$\boxed{G[\theta_1, t_1; \theta_0, t_0] = \int_{\theta(t_0)=\theta_0}^{\theta(t_1)=\theta_1} [d\theta] \int [d\phi] \ e^{i\,S[\theta,\phi]} \qquad (172)}$$

mit der Wirkung

$$S[\theta,\phi] = \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3x \sum_{i=1}^{3}$$
$$\Big\{\theta_i(x,t)\, A_i[\phi(x,t)] + \partial_t\theta_i(x,t)\, \phi_i(x,t)\Big\} \quad (173)$$

6.6. Pfadintegrallösung des AW-Problems

Erinnern wir uns an (158). Einsetzen von (172) gibt die Pfadintegralformel

$$\Phi[\theta_1, t_1] = \int^{\theta(t_1)=\theta_1} [d\theta] \int [d\phi]\; e^{i\,S[\theta,\phi]}\; \Phi[\theta(t_0), t_0] \quad (174)$$

in vollständiger Analogie zum Pfadintegral in der Quantenmechanik

6.7. Pfadintegraldarstellung der Momente

Die Momente bekommen wir bekanntlich durch Funktionalableitung aus der charakteristischen Funktion gemäß

$$\mathcal{M}_{j_1,\ldots,j_n}(x_1,\ldots,x_n;T) = (-i)^n \frac{\delta^n}{\delta\theta_{j_1}(x_1)\cdots\delta\theta_{j_n}(x_n)}\,\Phi_T[\theta] \tag{175}$$

Um sie auszurechnen, müssen wir die Wirkung ableiten. Eine partielle Integration liefert

$$S[\theta,\phi] = \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3x \sum_{i=1}^{3} \theta_i(x,t)\,\Big\{A_i[\phi(x,t)] - \partial_t\phi_i(x,t)\Big\} + \int d^3x \sum_{i=1}^{3} \left[\theta_i(x,t)\,\phi_i(x,t)\right]_{t_0}^{t_1} \tag{176}$$

liefert umgehend [12]

$$\frac{\delta}{\delta\theta_i(x)} S[\theta,\phi] = \phi_i(x,t_1) \tag{177}$$

bezüglich

$$\theta_i(x) = \theta_i(x,t_1) \tag{178}$$

Daraus folgt die Pfadintegralformel

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{M}_{j_1,\dots,j_n}(x_1,\dots,x_n;t_1) \\ &= \int^{\theta(t_1)=0} [d\theta] \int [d\phi]\; e^{i\,S[\theta,\phi]}\; \Phi[\theta(t_0),t_0] \\ &\quad \phi_{j_1}(x_1,t_1)\cdots\phi_{j_n}(x_n,t_1) \qquad (179) \end{aligned}}$$

[12] Monin und Yaglom diskutieren das verschwinden des ersten Terms. Homebrew: schreibe das t-Integral als Riemannsumme. Dann gibt die Ableitung einen Term der Ordnung $\triangle t$.

Beachten Sie die Randbedingung $\theta(t_1) = 0$.

6.8. Ausintegration von θ

Kehren wir zu (172) zurück und setzen (176) ein. Dann ist die Wirkung linear in θ. Das Feld θ übernimmt den Part eines Lagrange-Multiplikators.

Ausintegration liefert sofort das Pfadintegral

$$\boxed{G[\theta_1, t_1; \theta_0, t_0] = \int [d\phi]\, \delta\Big[A[\phi] - \partial_t \phi\Big] \; e^{i \int d^3x \,\left\{\theta_1(x)\, \phi(x,t_1) + \theta_0(x)\, \phi(x,t_0)\right\}} \qquad (180)}$$

wobei formal

$$\delta\Big[A[\phi]-\partial_t\phi\Big]$$

$$= \prod_{t\in(t_0,t_1)}\prod_{x\in\mathbb{R}^3}\prod_{i=1}^{3}\delta\Big(A_i[\phi(x,t)]-\partial_t u_i(x,t)\Big) \tag{181}$$

mit einem gewissen Unbehagen über die Behandlung der Ränder aber Freude über die Erkenntnis

Pfadintegral = Mittelwert über die Lösungsschar der Navier-Stokes Gleichung

6.9. Navier-Stokes Wirkung

Abschließend schauen wir uns die explizite Gestalt der Wirkung bei verschwindenden Körperkräften an

$$A_i[\phi(x,t)] \\ = -\phi_j(x,t)\partial_j\phi_i(x,t) - \partial_i p(x,t) + \nu\partial_j\partial_j\phi_i(x,t) \tag{182}$$

wobei

$$p(x,t) = -\rho \ \triangle^{-1}\left\{\partial_i\partial_j\Big(\phi_i(t)\,\phi_j(t)\Big)\right\}(x) \tag{183}$$

Die Wirkung (173) ist somit quadratisch im Feld ϕ.

Aufgabe: Integrieren Sie das ϕ-Feld aus und berechnen damit die effektive θ-Wirkung.

Forschungsaufgabe: verstehe Turbulenz im Pfadintegralformalismus