5. Funktionaler Zugang zur Turbulenz [9]

5.1. Erzeugende Funktionale
5.2. Kontinuitätsgleichung
5.3. Navier-Stokes Gleichung
5.4. Turbulenz als Anfangswertproblem
5.5. Hopf Gleichung
5.6. Anhang

5.1. Erzeugende Funktionale

Idee: betrachte alle Momente gleichzeitig

5.1.1. Raum-Zeit-Funktional

Charakteristisches Funktional der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\Phi[\theta] = \left\langle \exp\left(i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} \sum_{i=1}^{3} \theta_i(\mathbf{x},t)\; u_i(\mathbf{x},t) \right) \right\rangle \tag{121}$$

als Fkt. einer äußeren Quelle θ

[9] Monin und Yaglom, Bd. 2, Kap. 10

Bestimme daraus die Momente durch Funktionalableitung

$$\left\langle u_{i_1}(x_1) \cdots u_{i_n}(x_n) \right\rangle = \frac{\delta^n}{\delta\theta_{i_1}(x_1) \cdots \delta\theta_{i_n}(x_n)} \, \Phi[\theta] \bigg|_{\theta=0} \tag{122}$$

wobei $x_i = (\mathbf{x}_i, t_i)$

5.1.2. Raum-Funktional

Spezielle Quelle der Form

$$\theta(x,t) = \delta(t-T) \, \theta(x) \tag{123}$$

ergibt charakteristisches Funktional

$$\Phi_T[\theta] = \left\langle \exp\left(i \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} \sum_{i=1}^{3} \theta_i(\mathbf{x}) \, u_i(\mathbf{x}, T) \right) \right\rangle \tag{124}$$

und beschreibt Fluktuationen zum Zeitpunkt T

Noch speziellere Quelle

$$\theta_i(x) = \sum_{a=1}^{n} \theta_a \, \delta_{i,i_a} \, \delta(x - x_a) \tag{125}$$

beschreibt gemeinsame Verteilung von

$$u_{i_1}(x_1, T), \cdots, u_{i_n}(x_n, T)$$

$$\boxed{\text{Problemstellung: Gleichungen für } \Phi_T(\theta)}$$

5.2. Kontinuitätsgleichung

Inkompressibles Medium genügt der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_i u_i = 0 \tag{126}$$

Dichte ρ eine Integrationskonstante

5.2.1. Differenzielle Form

Alle Lsg. des Ensembles sollen (126) erfüllen, daher

$$\partial_i \frac{\delta}{\delta\theta_i(x)}\, \Phi_T(\theta) = i\ \left\langle \partial_i u_i(x,T)\, e^{i\,(\theta,u)} \right\rangle = 0$$

Kontinuitätsgleichung I

$$\partial_i \frac{\delta}{\delta\theta_i(x)}\, \Phi_T(\theta) = 0 \qquad (127)$$

5.2.2. Integrale Form

Gegeben eine Fkt. ϕ mit

- supp$(\phi) \subset V$
- $\phi =$ const. auf $\Gamma = \partial V$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\ \partial_i\phi(x)\ u_i(x,T) &= \oint_\Gamma dF_i\ \phi(x)\ u_i(x,T) \\ &= \text{const.}\ \oint_\Gamma dF_i\ u_i(x,T) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{128}$$

Daraus folgt analog zu (127)

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\ \partial_i\phi(x)\ \frac{\delta}{\delta\theta_i(x)}\ \Phi_T[\theta] = 0 \tag{129}$$

und daraus wiederum

$$\begin{aligned}\Phi_T[\theta + \nabla\phi] &= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\ \partial_i\phi(x)\ \frac{\delta}{\delta\theta_i(x)}\right)\ \Phi_T[\theta] \\ &= \Phi_T[\theta]\end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung II

$$\Phi_T[\theta + \nabla\phi] = \Phi_T[\theta] \tag{130}$$

5.2.3. Hopfs Formulierung

Betrachte Quelle θ mit Träger

- supp$(\theta) \subset V$ Gebiet
- $\partial V = \Gamma$ Rand von V

Existiert eindeutige Zerlegung (Beweis im Anhang)

$$\theta(x) = \widetilde{\theta}(x) + \nabla\phi(x) \tag{131}$$

mit

$$\partial_i \widetilde{\theta}_i(x) = 0 \tag{132}$$

und für $x \in \Gamma$

$$\widetilde{\theta}(x) \cdot \widehat{n}(x) = 0 \tag{133}$$

Definiere auf diese Weise einen Operator $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\theta = \widetilde{\theta} \tag{134}$$

Dann gilt

Kontinuitätsgleichung III

$$\Phi_T[\theta] = \Phi_T[\mathcal{L}\theta] \tag{135}$$

5.3. Navier-Stokes Gleichung

Ensemblefkt. sollen die Navier-Stokes Gleichung

$$\partial_t u_i = -\partial_j (u_i\, u_j) + f_i - \frac{1}{\rho}\partial_i p + \nu \bigtriangleup u_i \tag{136}$$

erfüllen mit

$$p = \rho \ \bigtriangleup^{-1} \ \Big(\partial_i f_i - \partial_i \partial_j (u_i\, u_j)\Big) \tag{137}$$

wobei $\rho = \text{const.}$

5.3.1. Gleichung für Φ_T

Ableitung der charakteristischen Fkt. nach T gibt

$$\partial_T \Phi_T[\theta]$$

$$= i \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \sum_i \; \theta_i(x) \; \left\langle \partial_T u_i(x,T) \; \exp\Big(i\,(\theta, u_T)\Big) \right\rangle \tag{138}$$

wobei $u_T(x) = u(x,T)$ und

$$(\theta, u_T) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \sum_{i=1}^{3} \; \theta_i(x)\, u_i(x,T) \tag{139}$$

Substituiere die Navier-Stokes Gleichung und ersetze

$$u_i(x,T) \to -i \frac{\delta}{\delta\theta_i(x)} \tag{140}$$

unter dem Erwartungswert

Charakteristische Funktion mit p-Einfügung

$$\Pi_T[\theta] = \frac{1}{\rho} \; \left\langle p \; \exp\Big(i\,(\theta, u_T)\Big) \right\rangle \tag{141}$$

Erhalten Funktionaldifferentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial T}\Phi_T[\theta] = i \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \sum_{j=1}^{3} \theta_j(x)$$

$$\Bigg[\Bigg(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\delta^2}{\delta\theta_j(x)\,\delta\theta_k(x)} + f_j(x,T) - i\,\nu\,\triangle_x\;\frac{\delta}{\delta\theta_j(x)}\Bigg)$$

$$\Phi_T[\theta] - \nabla_x \Pi_T[\theta]\Bigg] \qquad (142)$$

bzw. in Kurzschreibweise

Navier-Stokes Gleichung Ia

$$\partial_T\Phi_T[\theta] = \Bigg(\theta, \Big(i\,\partial_j\delta_{\theta_j}\delta_\theta + i\,f_T + \nu\,\triangle\,\delta_\theta\Big)\Phi_T[\theta]$$

$$- i\nabla\Pi_T[\theta]\Bigg) \qquad (143)$$

5.3.2. Gleichung für $\Pi_T[\theta]$

Die integrierte Poissongleichung (137) für p bedingt

$$\Pi_T[\phi] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \;\; \triangle^{-1}(x,y)$$
$$\left(\partial_j f_j(y,T) + \partial_j \partial_k \frac{\delta^2}{\delta\theta_j(y)\theta_k(y)}\right) \; \Phi_T[\theta] \qquad (144)$$

bzw. kurz und knapp

Navier-Stokes Gleichung Ib

$$\boxed{\Pi_T[\theta] = \triangle^{-1}\Big(\partial \cdot f_T + \partial \otimes \partial \cdot \delta_\theta \otimes \delta_\theta\Big)\Phi_T[\theta]} \qquad (145)$$

5.4. Turbulenz als Anfangwertproblem

(142) und (145) ergeben zusammen eine lineare Funktionaldifferentialgleichung

$$\partial_T \Phi_T[\theta] = \mathcal{G}_T \phi_T[\theta] \tag{146}$$

Zeitabhängigkeit des Generators $\mathcal{G}_T$ durch zeitabhängige äußere Kräfte und Randbedingungen

Statistischer Zugang zur Turbulenz entspricht der Integration dieser Evolutionsgleichung mit Anfangsbedingung

$$\Phi_{T_0}[\theta] = \mathsf{AW} \tag{147}$$

Statistische Beschreibung der Turbulenz ist ein **lineares** Problem

5.5. Hopf Gleichung

Eliminiere $\Pi_T[\theta]$ mit der Kontinuitätsgleichung und dem Cousin $(\mathcal{L}\theta, \nabla\Pi_T[\theta]) = 0$ derselben

Erhalte für den Fall verschwindender äußerer Kräfte [10]

Navier-Stokes Gleichung II

$$\partial_T \Phi_T[\theta] = i \left(\mathcal{L}\theta, \partial_j \delta_{\theta_j} \delta_\theta\right) \Phi_T[\theta] + \nu \left(\mathcal{L}\theta, \triangle \delta_\theta\right) \Phi_T[\theta] \qquad (148)$$

[10] Monin und Yaglom, Bd. 2, Formel (28.19)

5.6. Anhang

Satz aus [A. Chorin und J. Marsden, A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer Verlag 1979]:

Sei D ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ∂D. Jedes Vektorfeld w auf D hat eine eindeutige Zerlegung

$$w = u + \mathrm{grad} p \tag{149}$$

mit $\mathrm{div} u = 0$ und $u \cdot \widehat{n} = 0$ auf ∂D. p ist bis auf eine Konstante bestimmt.

5.6.1. Eindeutigkeit

Wir nehmen an, es gäbe eine Zerlegung (149). Dann gilt

$$\mathrm{div}(p\, u) = \mathrm{div}(u)\, p + u \cdot \mathrm{grad}(p) = u \cdot \mathrm{grad}(p) \tag{150}$$

und daher die Orthogonalitätsrelation

$$\int_D u \cdot \mathrm{grad}(p)\, dV = \int_D \mathrm{div}(p\, u) dV = \int_{\partial D} p\, u \cdot \widehat{n}\, dA = 0 \tag{151}$$

Angenommen, es gibt zwei Zerlegungen (149). Dann folgt aus

$$u_1 - u_2 + \mathsf{grad}(p_1 - p_2) = 0 \tag{152}$$

bezüglich des obigen Skalarproduktes

$$0 = (u_1 - u_2, u_1 - u_2 + \mathsf{grad}(p_1 - p_2)) = \|u_1 - u_2\|^2 \tag{153}$$

daß $u_1 = u_2$ und somit $p_1 = p_2 + \text{const.}$.

5.6.2. Existenz

Die Poissongleichung

$$\triangle p = \mathsf{div}(w) \tag{154}$$

auf D mit Neumann Randbedingung

$$\Big(\mathsf{grad}(p) - w\Big) \cdot \widehat{n} = 0 \tag{155}$$

auf ∂D hat eine Lösung.

Siehe z. B. I. Bronstein und A. Semendjajew, Kap. 3.3.2.3.4, Randwertaufgaben für die Laplace- und die Poisson-Gleichung.