4. Reynolds mittlere Gleichungen

4.1. Reynolds Zerlegung

$u = \overline{u} + u'$ mit

- u Geschwindigkeitsfeld
- $\overline{u}$ mittleres Geschwindigkeitsfeld
- u' Fluktuationsfeld

4.2. Mittelwert der Navier-Stokes Gleichungen

Rekapitulation:

- Navier-Stokes Gleichungen

$$\rho \left(\partial_t + u_j \partial_j\right) u_i = \rho\, f_i - \partial_i p + \mu \triangle u_i$$

- Kontinuitätsgleichung im inkompressiblen Fall

$$\partial_j u_j = 0$$

Kombiniere beide zur Bewegungsgleichung

$$\rho\, \partial_t u_i = \rho\, f_i - \partial_j \left(p\, \delta_{i,j} - \mu\, \partial_j u_j + \rho\, u_i\, u_j\right)$$

Eigenschaften von Mittelungsoperationen

- $\overline{\alpha\, A + B} = \alpha \overline{A} + \overline{B}$

- $\overline{\partial A} = \partial \overline{A}$

- $\overline{A\, B} = \overline{A}\, \overline{B} + \overline{A'\, B'}$

Mittelwert des nichtlinearen Terms ist daher

$$\langle \rho\, \partial_j (u_i\, u_j) \rangle = \rho \;\langle \partial_j (u_i\, u_j) \rangle = \rho\; \partial_j \langle u_i\, u_j \rangle$$

Reynolds Gleichungen

Mittlere Kontinuitätsgleichung $\partial_j \, \overline{u_j} = 0$ und mittlere Navier-Stokes Gleichungen

$$\boxed{\partial_t \overline{u_i} + \overline{u_j} \, \partial_j \, \overline{u_i} = \overline{f_i} - \frac{1}{\rho} \partial_i \, \overline{p} + \partial_j \left(\nu \, \partial_j \, \overline{u_i} - \overline{u'_i \, u'_j} \right) \qquad (78)}$$

Intuition

- Molekularbewegungen ergeben im Mittel viskosen Spannungstensor
- Turbulente Fluktuationen liefern im Mittel zusätzlichen Beitrag, den Reynoldschen Spannungstensor

$$\rho \, \langle u'_i \, u'_j \rangle \qquad (79)$$

4.3. Impulsstromdichtetensor

Zeitliche Ableitung der Impulsdichte

$$
\begin{aligned}
\partial_t(\rho\, u_i) &= \partial_t\rho\, u_i + \rho\, \partial_t u_i \\
&= -\partial_j(\rho\, u_j)\, u_i \\
&\quad + \rho\, \Big(- u_j \partial_j u_i + f_i + \partial_j \sigma_{i,j} \Big) \\
&= \rho\, f_i - \partial_j\, \Big(\rho\, u_i\, u_j - \sigma_{i,j} \Big)
\end{aligned}
$$

gegeben durch Körperkraft plus Oberflächenkraft

Oberflächenkraft=Divergenz des Impulsstromtensors

$$\Pi_{i,j} = \rho\, u_i\, u_j - \sigma_{i,j} \tag{80}$$

$\Pi_{i,j}\, dF_j =$ i'te Komponente der Impulsstromdiche
durch das Flächenelement dF_j

4.4. Reynolds Wirbelviskosität

Mittlere Reibungskraft in 1-Richtung pro Flächeneinheit an einer Berandung in der $(1,2)$-Ebene (normal zur 3-Richtung)

$$\tau_0 = \mu\ \partial_3 \overline{u_1}|_{x_3=0} \tag{81}$$

Für $x_3 > 0$ gibt es einen zusätzlichen Fluktuationsbeitrag

$$\tau = \rho\ \nu\ \partial_3 \overline{u_1}|_{x_3=0} - \rho\ \overline{u_1'\, u_3'} \tag{82}$$

Wirbelviskosität K von Boussinesq

$$-\rho\ \overline{u_1'\, u_3'} = \rho\ K\ \partial_3 \overline{u_1} \tag{83}$$

im allgemeinen eine Variable; fern von Rändern

$$K \gg \nu \tag{84}$$

4.5. Geschwindigkeitsprofil an Berandungen

Mittlere Navier-Stokes Gleichung für ebene Strömungen

$$\nu\, \partial_3^2 \overline{u_1} - \partial_3 \overline{u_1'\, u_3'} = 0 \tag{85}$$

Konstante der Strömung τ_0

$$\tau = \rho \left(\nu\, \partial_3 \overline{u_1} - \overline{u_1'\, u_3'} \right) = \tau_0 = \text{const.} \tag{86}$$

DGL erster Ordung für Geschwindigkeitsprofil

4.5.1. Dimensionsanalyse

Randgesetz von Prandtl

$$\overline{u_+} = f(z_+) \tag{87}$$

mit dimensionslosen Größen

- $u_+ = \frac{u_3}{u_\star}$ in Einheiten der Reibungsgeschwindigkeit $u_\star = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$
- $z_+ = \frac{x_3}{z_\star}$ in Einheiten der Reibungslänge $z_\star = \frac{\nu}{u_\star}$

4.5.2. Nahfeld

Fluktuationsbeitrag verschwindet am Rand $x_3 = 0$

$$\overline{u_1' \, u_3'} = O(x_3) \tag{88}$$

Leite aus DGL (86) Taylorreihen her [5]

$$\overline{u}(z) = \frac{u_*^2}{\nu} \, z - c_4 \, \frac{u_\star^5}{\nu^4} \, z^4 + O(z^5) \tag{89}$$

$$f(z_+) = z_+ - c_4 \, z_+^4 + O(z_+^5) \tag{90}$$

wobei

$$c_4 = -\frac{\nu^3}{8 \, u^5} \left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial z} \, \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}} \right)_{z=0} \tag{91}$$

[5] Notation $u = u_1$, $w = u_3$ und $z = x_3$

4.5.3. Fernfeld

Turbulente Viskosität dominant und daher approximativ

$$\tau_0 = -\rho\, \overline{u'\, w'} \tag{92}$$

unabhängig von der kin. Viskosität ν

Dimensionsanalyse suggeriert die DGL [6]

$$\frac{d\overline{u}}{dz} = A\, \frac{u_\star}{z} \tag{93}$$

und folglich das Gesetz von Kármán und Prandtl

$$\overline{u}(z) = A\, u_\star\, \left(\ln\left(\frac{z}{z_\star}\right) + B \right) \tag{94}$$

mit zwei dimensionslosen Konstanten A und B

Konstanten werden empirisch bestimmt, typische Werte

$$A = 2,4 \tag{95}$$

$$B = 5,8 \tag{96}$$

[6] Monin und Yaglom, Bd. 1, Kap. 5.3

4.6. Statistischer Werkzeugkasten [7]

Ensemble von N Meßwerten $u^{(j)}(x,t)$ mit $j \in \{1,2,3,\ldots,N\}$ ergibt Mittelwert im Limes $N \to \infty$

$$\langle u(x,t)\rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} u^{(j)}(x,t) \tag{97}$$

und allgemein Momente

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{O}_1(u(x_1,t_1)) \cdots \mathcal{O}_n(u(x_1,t_n))\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathcal{O}_1(u^{(j)}(x_1,t_1)) \cdots \mathcal{O}_n(u^{(j)}(x_1,t_n))\end{aligned} \tag{98}$$

Zugehörige Kumulanten sind wie üblich definiert

[7] Landahl und Mollo-Christensen

4.6.1. Invarianz unter Zeittranslationen

Kovarianz eines solchen Ensembles Fkt. der Zeitdifferenz

$$R_{a,b}(\tau) = \langle a(t)\, b(t+\tau) \rangle = R_{b,a}(-\tau) \tag{99}$$

Betrachten nur Ensembles mit der Differenzierbarkeit

$$R_{a,\dot{b}}(\tau) = \langle a(t)\, \partial_\tau b(t+\tau) \rangle = \partial_\tau R_{a,b}(\tau) \tag{100}$$

4.6.2. Spektren

Spektralfunktion = Fouriertransformierte

$$S_{a,b}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} đ\tau\; e^{i\omega\tau}\; R_{a,b}(\tau) \tag{101}$$

Cospektrum und Quadraturspektrum

$$S_{a,b}(\omega) = Co_{a,b}(\omega) + i\; Qu_{a,b}(\omega) \tag{102}$$

4.6.3. Antwortfunktionen

Betrachte lineare DGL [8]

$$L_t u(t) = \sum_n L_n \frac{d^n}{dt^n} u(t) = v(t) \tag{103}$$

mit

- Eingabe $v(t)$
- Ausgabe $u(t)$

Greensche Funktion def. als Antwortfunktion

$$L_t w(t-t') = \delta(t-t') \tag{104}$$

Allgemeine Antwortfkt. gegeben durch Faltung

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\; w(t-t')\; v(t') \tag{105}$$

[8] Hausaufgabe: finden Sie Beispiele

4.6.4. Zufallsantworten

Eingabe einer zeitabhängigen Zufallsfunktion ergibt

$$\begin{aligned} L_\tau \langle a(t)\, u(t+\tau)\rangle &= \langle a(t)\, L_\tau u(t+\tau)\rangle \\ &= \langle a(t)\, v(t+\tau)\rangle \end{aligned}$$

bzw.

$$L_\tau R_{a,u}(\tau) = R_{a,v}(\tau) \tag{106}$$

und daher die Wiener-Khinchin Gleichung

$$R_{a,u}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\; w(\tau - t)\; R_{a,v}(t) \tag{107}$$

und nach Fouriertransformation

$$S_{a,u}(\omega) = W(\omega)\; S_{a,v}(\omega) \tag{108}$$

4.6.5. Verteilungsfunktion und -dichte

Die Verteilungsfunktion ist definiert durch

$$P(U) = \langle \Theta(U - u) \rangle \tag{109}$$

wobei $\Theta(x) = 1$ für $x > 0$ und Null sonst

Die Verteilungsdichte hierzu ist

$$p(U) = P'(U) \tag{110}$$

$$P(U) = \int_{-\infty}^{U} dU' \, p(U') \tag{111}$$

Die Kenntnis der Verteilungsdichte erlaubt die Berechnung allgemeiner Mittelwerte

$$\langle F(u) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dU \; p(U) \; F(U) \tag{112}$$

4.6.6. Charakteristische Funktion

Die wichtigste Größe, die einer Zufallsverteilung zugeordnet wird, ist ihre charakteristische Funktion

$$\phi(k) = \langle e^{i\,k\,u} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dU \; p(U) \; e^{i\,k\,U} \qquad (113)$$

Aus dieser folgen durch Ableitung nach k die Momente der Verteilung

Bsp.: Gauß-Verteilung

$$p(U) = \left(\frac{1}{2\,\pi\,\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \; e^{-\frac{U^2}{2\,\sigma}} \qquad (114)$$

Anwendung in der statistischen Kontinuumsmechanik: charakteristische Fkt. der Verteilung der lokalen Geschwindigkeit

$$\phi(k) = \langle e^{i\,k\,u(x,t)} \rangle \qquad (115)$$

4.6.7. Zentraler Grenzwertsatz

Betrachte Produktensemble von N unabhängigen Ensembles mit Mittelwert Null und endlicher Kovarianz σ

Verteilung des Mittelwertes über diese Ensembles

$$X = N^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{116}$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\langle e^{i\,K\,X} \rangle &= \prod_{i=1}^{N} \langle e^{i\,N^{-\frac{1}{2}}\,K\,x_i} \rangle \\
&= \left(1 - \frac{K^2\,\sigma}{2\,N} + O(N^{-\frac{3}{2}})\right)^N \\
&= e^{-\frac{K^2\,\sigma}{2}} \left(1 + O(N^{-\frac{1}{2}})\right)
\end{aligned}$$

und wird im Grenzfall $N \to \infty$ eine Gauß-Verteilung

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle e^{\frac{i\,K}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} x_i} \right\rangle = e^{-\frac{K^2\,\sigma}{2}} \tag{117}$$

4.6.8. Lognormalverteilung

Transformation der Gauß-Verteilung

$$\langle f(y) \rangle = \sqrt{\frac{1}{2\,\pi\,\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\frac{y^2}{2\,\sigma}}\, f(y) \tag{118}$$

mit

$$y = \ln(a\,x - b) \tag{119}$$

gibt

$$\frac{a}{\sqrt{2\,\pi\sigma}} \int_{\frac{b}{a}}^{\infty} dx\, \frac{1}{a\,x - b}\, e^{-\frac{\ln(a\,x-b)^2}{2\,\sigma}}\, f\Big(\ln(a\,x - b)\Big) \tag{120}$$