3. Landaus Theorie der Turbulenz [4]

3.1. Linearisierte Zeitentwicklung

- u_0 stationäre Strömung
- u_1 zeitabhängige Störung

Betrachte einzelne Fouriermode

$$u_1 = A(t)\, f(x, y, z) \tag{63}$$

mit komplexer Winkelfrequenz

$$\omega = \omega_1 + i\,\gamma_1 \tag{64}$$

[4] Landau, Lifschitz, Bd. 6, Hydrodynamik

und zeitabhängiger Amplitude

$$A(t) = C\, e^{\gamma_1\, t}\, e^{-i\,\omega_1\, t} \tag{65}$$

Linearisierte Evolution des Amplitudenquadrats

$$\frac{d}{dt}|A(t)|^2 = 2\,\gamma_1\,|A(t)|^2 \tag{66}$$

3.2. Landaus Idee

Gl. (66) gilt nur für infinitesimale Störungen. Verallgemeinere die rechte Seite von (66) in $F\Big(|A(t)|^2\Big)$ und entwickle in eine Taylorreihe.

Modifikation für kleine endliche Störungen

$$\frac{d}{dt}|A(t)|^2 = 2\,\gamma_1\,|A(t)|^2 - \alpha\,|A(t)|^4 \tag{67}$$

mit Landau-Konstante α (positiv oder negativ)

Mittelung über Zeitintervall der Länge

$$\frac{1}{\gamma_1} \gg T \gg \frac{1}{\omega_1} \tag{68}$$

3.3. Positive Landau-Konstante

Betrachte zunächst den Fall $\alpha > 0$

Lösung der Landau-Gleichung (67)

$$\frac{1}{|A(t)|^2} = \frac{\alpha}{2\,\gamma_1} + \text{const. } e^{-2\,\gamma_1\,t} \tag{69}$$

strebt asymptotisch gegen

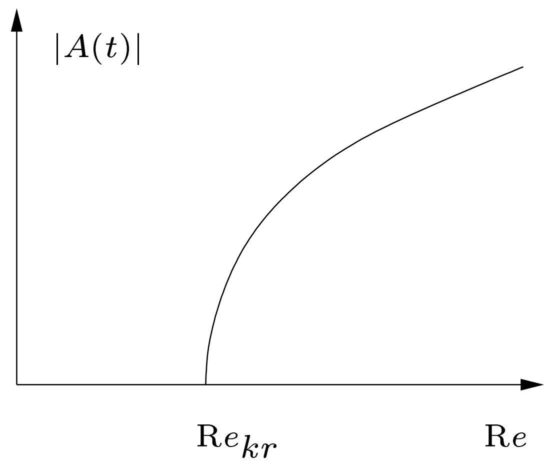
$$|A(\infty)|^2 = \frac{2\,\gamma_1}{\alpha} \tag{70}$$

Knapp oberhalb von $\mathrm{R}e_{kr}$ gilt approximativ

$$\gamma_1 = \text{const. } (\mathrm{R}e - \mathrm{R}e_{kr}) \tag{71}$$

Der Landau-Term stabilisiert die Störung für $\mathrm{R}e > \mathrm{R}e_{kr}$ auf

$$|A(\infty)| = \text{const. } \sqrt{\mathrm{R}e - \mathrm{R}e_{kr}} \tag{72}$$



3.4. Negative Landau-Konstante

Füge stabilisierenden Term hinzu

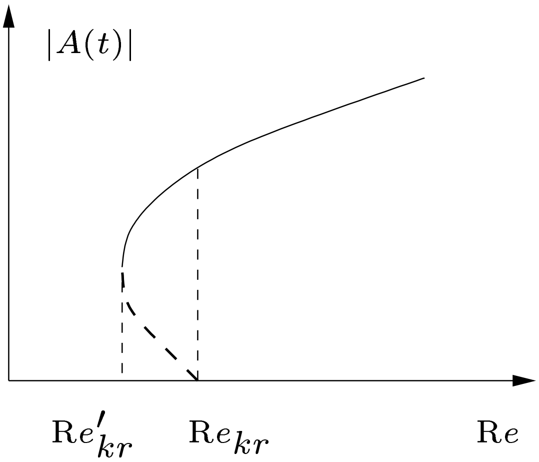
$$\frac{d}{dt}|A(t)|^2 = 2\,\gamma_1\,|A(t)|^2 - \alpha\,|A(t)|^4 - \beta\,|A(t)|^6 \tag{73}$$

mit $\beta > 0$ und erhalte

$$|A(\infty)|^2 = \frac{|\alpha|}{2\,\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\,\beta^2} + \frac{2\,|\alpha|}{\beta}\,\gamma_1} \tag{74}$$

Neuer Lösungszweig beschreibt metastabile Strömung: Instabilität gegen **endliche** Störungen in einem Bereich

$$\mathrm{Re}'_{kr} < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{kr} \tag{75}$$



3.5. Bifurkationsfreiheitsgrad

Betrachte $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{cr}\,(1+\epsilon)$ mit $0 < \epsilon \ll 1$

Landau-Gleichung $\Rightarrow$ Amplitudenbetrag $|A(\infty)|$ Lösung nach Einschwingzeit

$$u_0(x,y,z) + f(x,y,z)\,|A(\infty)|\,e^{-i(\omega_1\,t+\beta_1)} \tag{76}$$

Phasenwinkel β_1 ein neuer Freiheitsgrad; nicht bestimmt durch die Landau-Gleichung sondern durch die zufälligen Anfangsbedingungen

Ergebnis ist eine periodische Fkt. mit Periode

$$T_1 = \frac{2\,\pi}{\omega_1} \tag{77}$$

3.6. Turbulenz nach Landau und Hopf

Turbulenz ist das Ergebnis einer unendlichen Folge von Bifurkationen nach obigem Muster mit inkommensurablen Winkelfrequenzen

Allerdings Tendenz der paarweisen Synchronisation von Winkelfrequenzen [Landau, Lifschitz, Bd. 6, Hydrodynamik]; generisch bildet sich nach einer Bifurkation stets eine neue periodische Lösung heraus