2. Hydrodynamische Stabilität [1]

2.1. Dynamische Ähnlichkeit
2.2. Hagen-Poiseuille Strömung
2.3. Zylindrische Couette Strömung
2.4. Hydrodynamische Stabilität
2.5. Rayleighs Argument für rotierende Flüssigkeiten
2.6. Stabilitätsanalyse der Couette Strömung

Einheiten:

$$[u] = \frac{m}{s} \qquad [e_{i,j}] = \frac{1}{s}$$

$$[\sigma_{i,j}] = \frac{kg}{m\,s^2} \qquad [\mu] = \frac{kg}{m\,s}$$

$$[\nu] = \frac{m^2}{s} \qquad \left[\frac{p}{\rho}\right] = \frac{m^2}{s^2}$$

$$[f] = \frac{m}{s^2}$$

[1] S. Chandrasekhar, Hydrodynamik Stability, Clarendon Press, Oxford (1961)

2.1. Dynamische Ähnlichkeit

Dimensionslose Funktionen:

$$u(x,t) = U\ \phi\left(\frac{x}{L}, \frac{U\,t}{L}\right) \tag{26}$$

$$\frac{1}{\rho}\,p(x,t) = U^2\ \pi\left(\frac{x}{L}, \frac{U\,t}{L}\right) \tag{27}$$

$$f(x,t) = \frac{U^2}{L}\,\xi\left(\frac{x}{L}, \frac{U\,t}{L}\right) \tag{28}$$

Skalierungsverhalten:

$$u \cdot \nabla\ u = \frac{U^2}{L}\,\phi \cdot \nabla\phi \tag{29}$$

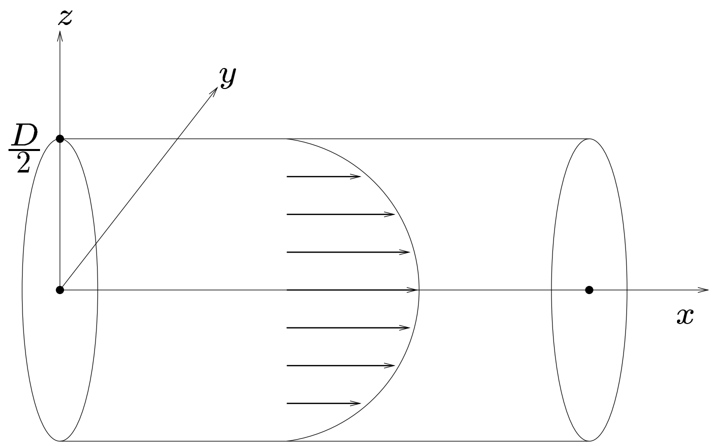
$$\triangle u = \frac{U}{L^2}\ \triangle\,\phi \tag{30}$$

$$\partial_t u = \frac{U^2}{L}\,\partial_0\phi \tag{31}$$

Dimensionslose Navier-Stokes Gleichung

$$\partial_0\phi + \phi \cdot \nabla\,\phi = \xi - \nabla\pi + \frac{1}{\mathrm{Re}}\ \triangle\,\phi \tag{32}$$

2.2. Hagen-Poiseuille Strömung



Navier-Stokes Gleichung

- Stationarität $\partial_t u = 0$
- Keine Körperkräfte $f = 0$
- Symmetrie $u_1 = u_1(x_2, x_3)$, $u_2 = u_3 = 0$, $p = p(x_1)$

$$\partial_1 p = \mu \left(\partial_2^2 + \partial_3^2\right) u_1 \tag{33}$$

- Konstanter Druckgradient $\partial_1 p = \frac{\triangle p}{\triangle l} = P$

- Zylindersymmetrie $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$, $u_1 = u(r)$

$$P = \mu \, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) \tag{34}$$

Geschwindigkeitsprofil

$$u(r) = \frac{P}{4\,\mu} \, \left(R^2 - r^2 \right) \tag{35}$$

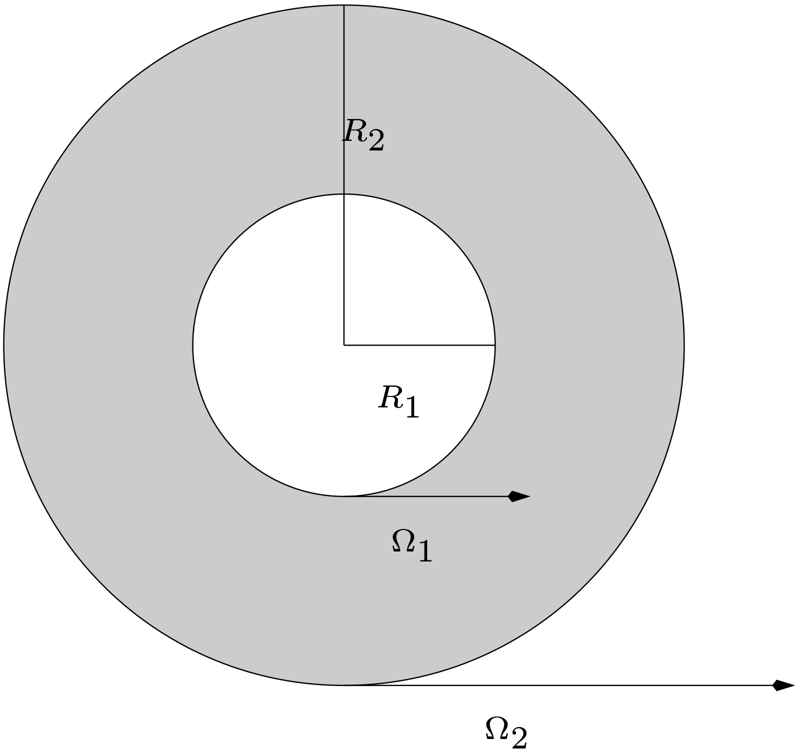
Mittlere Geschwindigkeit

$$U = \frac{1}{\pi\, R^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dr\, r\, u(r) = \frac{P\, R^2}{8\,\mu} \tag{36}$$

Mittlerer Fluß

$$\pi\, R^2\, U = \frac{\pi}{8\,\mu}\, R^4\, P \tag{37}$$

2.3. Zylindrische Couette Strömung [2]



$$u(r) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\, r + \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)\; R_1^2\, R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\, \frac{1}{r} \tag{38}$$

[2] [Landau,Lifschitz, Hydrodynamik]

2.4. Hydrodynamische Stabilität

Idee: [3]

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Linearisierte Navier-Stokesgleichung}\\ \Rightarrow \\ \text{Kritische Reynoldszahl}\end{array}}$$

- Stabilitätsgrenze laminarer Strömungen bestimmt Re_{cr}

- Differenzielle Stabilitätsanalyse

$$u = u_0 + \epsilon\, u_1 \tag{39}$$

  - u_0 ungestörter stationärer Fluß
  - $\epsilon\, u_1$ infinitesimale Störung
  - Zeitenwicklung der Störung (relevant oder irrelevant)

[3] Vorsicht: subtile Punkte.

Linearisierte Navier-Stokes Gleichung

$$\partial_t u_1 + u_0 \cdot \nabla\, u_1 + u_1 \cdot \nabla\, u_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_1 + \nu\, \triangle\, u_1 \tag{40}$$

$$\nabla \cdot u_1 = 0 \tag{41}$$

Fourier-Transformation

$$u_1(x,t) = \int đ\omega\; e^{-i\omega t}\, \widehat{u}_1(x,\omega) \tag{42}$$

Eigenwertproblem

$$i\omega \widehat{u}_1 = -u_0 \cdot \nabla\, \widehat{u}_1 - \widehat{u}_1 \cdot \nabla\, u_0 - \frac{1}{\rho} \nabla \widehat{p}_1 + \nu\, \triangle\, \widehat{u}_1 \tag{43}$$

- p_1 durch u_1 ausdrücken (s. o.)
- nicht selbstadjungierter Operator
- Stabilitätskriterium ($\omega \in$ Spektrum)
  - $\Im\omega < 0$ stabil
  - $\Im\omega > 0$ instabil
  - $\Im\omega = 0$ Stabilitätsgrenze $\Rightarrow \mathrm{R}e_{cr}$

2.5. Rayleighs Argument für rotierende ideale Flüssigkeiten

Viskosität $\nu = 0$ bzw. $\mathrm{R}e \gg 1$

- Drehimpuls eines Flüssigkeitsteilchens

$$L(r) = m\ r\ u(r) \tag{44}$$

- Druckgradient im Gleichgewicht gleich Zentrifugalkraft

$$\frac{L(r)^2}{m\ r^3} \tag{45}$$

- Verschiebe das Teilchen radial, Drehimpuls bleibt konstant

- Neue Zentrifugalkraft

$$\frac{L(r)^2}{m\ (r + \triangle r)^3} \tag{46}$$

- Stabilitätsbedingung

$$\frac{L(r)^2}{m\ (r+\triangle r)^3} < \frac{L(r+\triangle r)^2}{m\ (r+\triangle r)^3} \tag{47}$$

Rayleigh Bedingung für Instabilität

$$\frac{d}{dr}\Big(r\ u(r)\Big)^2 < 0 \tag{48}$$

Bsp.: Couette Strömung

$$u(r) = A\ r + \frac{B}{r} \tag{49}$$

mit

$$A = \frac{\Omega_2\, R_2^2 - \Omega_1\, R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \tag{50}$$

$$B = -\frac{\Big(\Omega_2 - \Omega_1\Big)\ R_1^2\, R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \tag{51}$$

Rayleigh Bedingung für Instabilität

$$\left(\Omega_2\, R_2^2 - \Omega_1\, R_1^2\right)\, u(r) < 0 \tag{52}$$

- Entgegengesetzt rotierende Zylinder: instabil
- Gleichsinnig rotierende Zylinder: instabil falls

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \tag{53}$$

Kriterium kann durch differenzielle Stabilitätsanalyse der Euler-Gleichung (Navier-Stokes mit $\nu = 0$) begründet werden

2.6. Differenzielle Stabilitätsanalyse der Couette Strömung

Notationsänderung: u_0 wie u in (49) und $u_1 = u'$

Zylinderkoordinaten plus Fouriertransformation

$$u'_r(\mathbf{x}, t) = e^{i(k\,z + n\,\phi - \omega\,t)}\ f_r(r) \tag{54}$$

$$u'_\phi(\mathbf{x}, t) = e^{i(k\,z + n\,\phi - \omega\,t)}\ f_\phi(r) \tag{55}$$

$$u'_z(\mathbf{x}, t) = e^{i(k\,z + n\,\phi - \omega\,t)}\ f_z(r) \tag{56}$$

$$p'(\mathbf{x}, t) = e^{i(k\,z + n\,\phi - \omega\,t)}\ g(r) \tag{57}$$

Einsetzen in (40) $\Rightarrow$ Differentialgleichung sechster Ordnung für (f_r, f_ϕ)

- Eigenwertproblem sehr kompliziert
- aber traktabel
- Spektrum diskret

Axialsymmetrische Störungen ($n = 0$)

$$\left(L - k^2 + \frac{i\omega}{\nu}\right)\left(L - k^2\right) f_r(r) = \frac{2\,k^2}{\nu}\ \left(A + \frac{B}{r^2}\right) f_\phi(r) \qquad (58)$$

$$\left(L - k^2 + \frac{i\omega}{\nu}\right) f_\phi(r) = \frac{2}{\nu}\, A\ f_r(r) \qquad (59)$$

wobei

$$L = \frac{d}{dr}\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) \qquad (60)$$

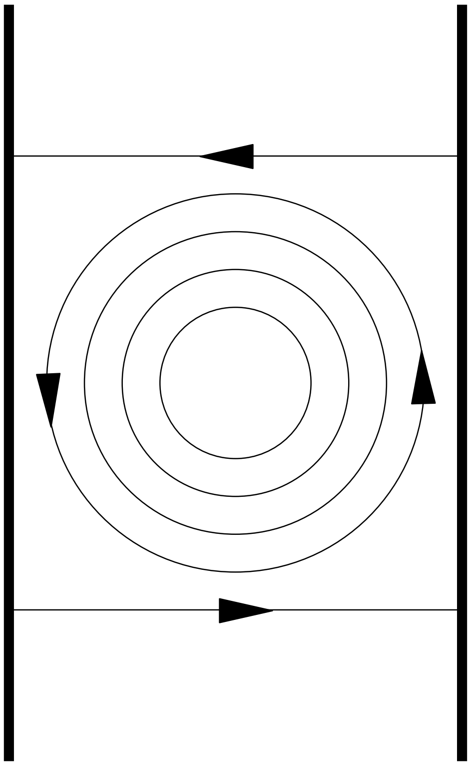
- Kein vollständiges Funktionensystem
- Unvollständige Stabilitätsanalyse
- Störungsrechnung für $h \ll R$ mit $h = R_2 - R_1$ und $R = \frac{R_1+R_2}{2}$
- Spezialfall $\Omega_2 = 0$: Reynoldszahl $\mathrm{R}e = h\Omega_1 R_1/\nu$

$$\mathrm{R}e_{cr} = 41,3\ \sqrt{\frac{R}{h}} \qquad (61)$$

Taylor Walzen

$\Im\omega = 0$ **und** $\Re\omega = 0 \Rightarrow$ Instabilität durch stationäre Störung (Stabilitätswechsel)

$$u'(\mathbf{x}, t) = e^{i\,k\,z}\;f(r) \tag{62}$$



Stabilitätsdiagramm