1. Einführung in die Turbulenz

Chr. Wieczerkowski

Universität Münster, 8.4.99

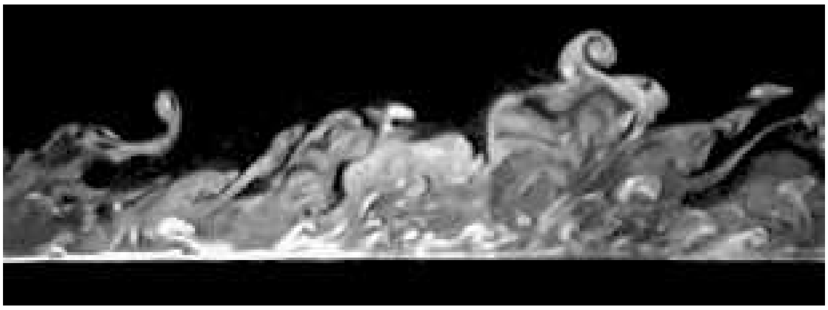

Abbildung 1: Turbulente Grenzschicht

1.1. Einleitung

1.2. Statistische Theorie

1.3. Geschichte der Turbulenz

1.4. Gleichungen der Kontinuumsmechanik

1.5. Couette Strömung

1.6. Literaturauswahl

1.1. Einleitung

Strömungsformen von Flüssigkeiten und Gasen:

- laminar
- turbulent

Turbulenz: ungeordnete Fluktuationen von

- Geschwindigkeit
- Druck
- Temperatur

Beispiele: Turbulenz ist für uns allgegenwärtig

- Atmosphäre
- Meere, Flüsse, Kaffeetasse
- Pipelines, Autos, Flugzeuge

1.2. Statistische Theorie

Zahl der effektiven Freiheitsgrade:

- laminare Strömung: klein
- turbulente Strömung: riesig

Statistische Beschreibung unumgänglich

- **Statistische Mechanik:** Energieerhaltung
- **Turbulenz:** Dissipation der Energie

Fundamentale Theorie der Turbulenz = statistische Kontinuumsmechanik

- effektive semi-empirische Theorien
- Auswertung der Fundamentaltheorie mit QFT Methoden (z. B. Renormierungsgruppe)
- Stand der statistischen Theorie: unvollkommen

1.3. Geschichte der Turbulenz

O. Reynolds (1893,1894)

- dynamische Ähnlichkeit charakterisiert durch die Reynoldszahl

$$\mathrm{R}e = \frac{U\,L}{\nu} = \frac{\text{Geschwindigkeit} \times \text{Länge}}{\text{Viskosität}} \tag{1}$$

- $\mathrm{R}e < \mathrm{R}e_{kr} \Rightarrow$ laminar; $\mathrm{R}e > \mathrm{R}e_{kr} \Rightarrow$ turbulent

- Zerlegung in mittlere und fluktuierende Anteile

Kinematische Viskosität:

Wasser	$\nu = 1.00 \cdot 10^{-8}\, m^2\, s^{-1}$
Luft	$\nu = 1.51 \cdot 10^{-5}\, m^2\, s^{-1}$

$$\text{Schwimmer:} \quad \mathrm{Re} = \frac{1\frac{m}{s} \cdot 1\,m}{10^{-8}\frac{m^2}{s}} = 10^8 \tag{2}$$

$$\text{Fahrrad:} \quad \mathrm{Re} = \frac{10\frac{m}{s} \cdot 1.5\,m}{1.5 \cdot 10^{-5}\frac{m^2}{s}} = 10^6 \tag{3}$$

Reynolds Mittelung: Raum oder Zeitintervalle.

Moderne Sichtweise: Mittelung über Ensembles

- von Lösungen $u(t,x)$ der Navier-Stokes Gleichung
- oder Zeitscheiben (Blitzlichtaufnahmen) $u(t,x)|_{t=T}$

Wahrscheinlichkeitsmaße $P(u)$ bzw. $P_T(u)$ auf Funktionenräumen (Pfadintegrale)

G. Taylor (1921), A. Friedmann und L. Keller (1924)

- Korrelationsfunktionen

G. Taylor (1915,1932), L. Prandtl (1925), T. v. Karman (1930)

- Semi-empirische Theorien für große Skalen

L. Richardson (1922,1926)

- Wirbelkaskade

Big whorls have little whorls, Which feed on their velocity, And little whorls have lesser whorls, And so on to viscosity (in the molecular sense).

G. Taylor (1935)

- Homogene isotrope Turbulenz

A. Kolmogorov (1941), A. Obukhov (1941), R. Kraychnan (1959)

- Universalität und Potenzgesetze bei kleinen Skalen

E. Hopf (1952)

- „Schwinger-Dyson-Gleichung“ für die Turbulenz

1.4. Gleichungen der Kontinuumsmechanik

Zustandsgrößen: 5 Funktionen

- Dichte $\rho(t, x)$
- Geschwindigkeit $u_i(t, x)$, $i = 1, 2, 3$
- Druck $p(t, x)$ (oder Temperatur $T(t, x)$)

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho u_i) = 0 \tag{4}$$

bzw.

$$d_t \rho = \partial_t \rho + u_i \partial_i \rho = -\rho \partial_i u_i \tag{5}$$

Totale Zeitableitung: (materielle Zeitableitung)

$$d_t f(t, x) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(t + \tau, x + \tau u) - f(t, x)}{\tau} \tag{6}$$

Impulsgleichung:

$$\rho\, d_t u_i = \rho f_i + \partial_j \sigma_{i,j} \tag{7}$$

- f_i äußeres Kraftfeld
- $\sigma_{i,j}$ Spannungstensor

Newtonscher Spannungstensor:

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j} = &-p\,\delta_{i,j} \\ &+ \mu\,\left(e_{i,j} - \frac{e_{k,k}}{3}\,\delta_{i,j}\right) + \zeta\,\frac{e_{k,k}}{3}\,\delta_{i,j} \end{aligned} \tag{8}$$

- p Druck
- μ erster Viskositätskoeffizient
- ζ zweiter Viskositätskoeffizient
- $e_{i,j} = \partial_i u_j + \partial_j u_i$ Deformationstensor
  - Keine Richtung ausgezeichnet
  - Erste Ableitungen der Geschwindigkeit

Spannung = Oberflächenkraft:

$$\int \partial_j \sigma_{i,j}\, dV = \oint \sigma_{i,j}\, dF_j \tag{9}$$

$$= -\oint p\, dF_i + \text{Scherkräfte} \tag{10}$$

Oberflächenintegrale:

- $\phi : \mathbb{R}^2 \supset I \times J \to \mathbb{R}^3$ eine parametrizierte Fläche
- $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld

$$\oint v \cdot dF = \int_{I\times J} v(\phi) \cdot (\partial_\alpha \phi \times \partial_\beta \phi)\, d\alpha\, d\beta \tag{11}$$

bzw.

$$\oint v_i\, dF_i = \int\int \epsilon_{i,j,k}\, v_i\, \partial_a \phi_j\, \partial_b \phi_k\, ds_a\, ds_b \tag{12}$$

Zurück zur Impulsgleichung:

$$\rho\left(\partial_t + u_j \partial_j\right) u_i = \rho f_i - \partial_i p + \mu \triangle u_i$$
$$+ \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right) \partial_i \partial_j u_j \qquad (13)$$

4 Gleichungen für 5 unbekannte Funktionen

Inkompressibles Medium:

Geschwindigkeiten $<<$ Schallgeschwindigkeit

$\rho =$ const. $\quad \Rightarrow \quad \partial_j u_j = 0$

Navier-Stokes Gleichungen

$$\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = f_i - \frac{1}{\rho} \partial_i p + \nu \triangle u_i \qquad (14)$$

- $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ kinematische Viskosität

Navier-Stokes Gleichungen:

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = f - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \bigtriangleup u \tag{15}$$

umformen mit

$$u \cdot \nabla u = \nabla \frac{u^2}{2} - u \times (\nabla \times u) \tag{16}$$

zu

$$\partial_t u - u \times (\nabla \times u) = f - \nabla \left(p + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \bigtriangleup u \tag{17}$$

Rotation von (17):

$\omega = \nabla \times u$ Vortizität

$$\partial_t \omega - \nabla \times (u \times \omega) = \nabla \times f + \nu \bigtriangleup \omega \tag{18}$$

3 Gleichungen für 3 Geschwindigkeitskomponenten

Divergenz von (15):

Poisson-Gleichung für p

$$\triangle p = \rho \, \nabla \cdot \Big(f - u \cdot \nabla u \Big) \tag{19}$$

Greensche Funktion

$$\triangle^{-1}(x, y) = \frac{1}{4\pi \, |x - y|} \tag{20}$$

Randbedingung:

$u = 0$ auf dem Rand (no slip)

Problemstellung:

Verstehe das Phänomen Turbulenz ausgehend von den Navier-Stokes Gleichungen

1.5 Couette Strömung

- Stationarität $\partial_t u = 0$
- Keine Körperkräfte $f = 0$

$$u \cdot \nabla\ u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\ \triangle u \tag{21}$$

- Symmetrie $u_1 = u_1(x_3)$, $u_2 = u_3 = 0$, $\nabla p = 0$

$$u_1''(x_3) = 0 \tag{22}$$

$$u_1 = U\ \frac{x_3}{H} \tag{23}$$

Spannungstensor:

$$\sigma_{1,3} = \sigma_{3,1} = \mu\ \frac{U}{H} \tag{24}$$

Reibungskraft pro Fläche:

$$\sigma_{i,3}\ \triangle F_3 = \delta_{i,1}\ \mu\ \frac{U}{H} \tag{25}$$

1.6. Literaturauswahl

L. Landau und E. Lifschitz, Hydrodynamik, Verlag Harri Deutsch 1991

A. Monin and A. Yaglom, Statistical Fluid Dynamics, Mechanics of Turbulence, MIT Press, Vol. 1 1971, Vol. 2 1975

M. Landahl and E. Mollo-Christensen, Turbulence and Random Processes in Fluid Mechanics, Cambridge University Press 1986

D. J. Tritton, Physical Fluid Dynamics, Van Nostrand Reinhold 1982

G. Batchelor, An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press 1967

M. Stanišić, The Mathematical Theory of Turbulence, Springer Verlag 1984

T. Bohr, M. Jensen, G. Paladin, A. Vulpiani, Dynamical Systems Approach to Turbulence, Cambridge University Press 1998

http://pauli.uni-muenster.de/∼wieczer