Quantenelektrodynamik und das Euklidische Pfadintegral

Christian Wieczerkowski

Institut für Theoretische Physik I
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Wilhelm-Klemm-Str. 9
D-48149 Münster

Vorlesung im Sommersemester 1998
Do 11–13 ct im HS404 (ITP1)

Dieses Manuskript umfaßt das Material der ersten zehn Vorlesungen. Zwei weitere Vorlesungen über die Berechnung von Strahlungskorrekturen wurden noch nicht in LaTeX gesetzt. Für Kommentare, Verbesserungsvorschläge und Berichtigungen bin ich sehr dankbar.

Münster, den 15. Oktober 1998

http://planck.uni-muenster.de:8080/~wieczer/QED/QED.html

1 Einleitung

Die *Quantenelektrodynamik* ist die Quantentheorie von Elektronen, Positronen und Photonen, als terminus technicus die Quantenfeldtheorie eines Dirac Fermions, das minimal eichinvariant an ein $U(1)$-Eichfeld gekoppelt wird.

1.1 Pfadintegralquantisierung

Die Quantentheorie begegnet uns in zwei verschiedenen Verkleidungen: zum einen in der traditionellen Operatorformulierung und zum anderen in der Pfadintegralformulierung. Das Pfadintegral wurde in einer bahnbrechenden Arbeit von Feynman erdacht [20]. Die traditionelle Sprache der Quantentheoretiker allerdings ist, oder blieb wenigstens für lange Zeit, die Operatorformulierung. Vorlesungen über die Quantenmechanik beginnen daher üblicherweise mit dem Hilbertraumformalismus.

Mit der Entdeckung der Bedeutung der nicht-abelschen Eichtheorien kehrte sich die Situation um. Für diese Theorien erweist sich die Pfadintegralformulierung als geeigneter. Das heutige Verständnis von Eichtheorien beruht daher weitgehend auf ihrer Quantisierung mit dem Feynmanschen Pfadintegral. Siehe [16], [17], [1] und [61], sowie die darin genannte Originalliteratur.

- Das Pfadintegral ermöglicht eine manifest Lorentz-kovariante Quantisierung von Eichtheorien.
- Es erlaubt die flexible Verwendung verschiedener Regularisierungen (Gittereichtheorie, Kontinuumsregularisierungen etc.).
- Es führt in natürlicher Weise zur semi-klassischen Analyse von Eichtheorien.
- Es liefert elegant die Feynmanregeln der Störungstheorie.
- Es ist bei imaginärer Zeit der Ausgangspunkt von nicht-störungstheoretischen Untersuchungen (Monte Carlo Simulationen, mathematisch rigorose Konstruktionen). Es eröffnet einen tiefen Zusammenhang zwischen der Quantentheorie und der klassischen Statistischen Mechanik.

Der letzte Punkt ist dabei besonders wichtig, da das derzeitige Forschungsprogramm der Quantenfeldtheoretiker weitgehend auf Computersimulationen gestützt ist. Um Pfadintegrale in mathematischer Strenge aufzustellen, bedarf es zusätzlicher Vorschriften, etwa der Gitterregularisierung. Formale Manipulationen mit Pfadintegralen können leicht zu falschen Ergebnissen führen, wenn man diese Vorschriften nicht beachtet. In mathematischer Hinsicht ist zu Pfadintegralen noch viel zu tun. Diese Fragestellungen würden jedoch den Rahmen einer Vorlesung über die Quantenelektrodynamik sprengen.

Die QED ist ebenfalls eine Eichtheorie, nämlich eine Eichtheorie mit der abelschen Eichgruppe $U(1)$. Tatsächlich ist sie *der Prototyp* einer Eichtheorie schlechthin. Die Pfadintegralformulierung der QED geht auf Feynman zurück, die Operatorformulierung der QED auf Schwinger und Tomonaga, der Beweis ihrer Gleichwertigkeit auf Dyson. Die Originalartikel dazu findet man im Sammelband [54]. Die Geschichte der QED und ihrer Entdecker steht in [53]. Obwohl das Pfadintegral nach heutiger Sicht die elegantere Formulierung ist, war seine Sternstunde damals noch nicht gekommen. Die QED wurde im Operatorformalismus entwickelt. Es ist daher nicht verwunderlich, daß sie traditionell auch im Operatorformalismus unterrichtet wird, etwa nach den Klassikern von Björken und Drell [6, 7]. Siehe aber auch neuere Lehrbüchter, wie [34], [8], [31], [39], einschließlich der deutschsprachigen Literatur [27] und [36]. Aus den genannten Gründen werden wir in dieser Vorlesung von Anfang an den Zugang über das Pfadintegral beschreiten. Das geplante Programm ist ungefähr der QED-Inhalt des Klassikers von Faddeev und Slavnov [16]. Weitere Vorbilder sind [17] und [1]. Wir werden allerdings auf viele Quellen zurückgreifen, insbesonders auf die traditionellen Lehrbücher. Sie werden an den jeweiligen Stellen genannt werden. Eine umfassende moderne Darstellung beider Standpunkte liefert das zweibändige Werk von Weinberg [61]. Als Appetitanreger empfiehlt der Doktor die unnachahmlichen Vorlesungen [23] von Feynman über die QED. Ein sehr empfehlenswertes Buch ist [37].

1.2 Idee des Pfadintegrals

Um einen Vorgeschmack zu bekommen, betrachten wir ein System der Klassischen Mechanik im Lagrange-Formalismus. Das System sei gegeben durch eine Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) \;=\; \frac{1}{2}\sum_a m_a\,\dot{q}_a^2 - V(q), \tag{1.1}$$

mit verallgemeinerten Koordinaten $q = (q_a)$ und verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q} = (\dot{q}_a)$. Die klassische Trajektorie zwischen zwei vorgegebenen Punkten q_i zur Zeit t_i und q_f zur Zeit t_f (die Subskripte i und f sind nicht mit a zu verwechseln) erhalten wir in der Menge aller Trajektorien mit den gegebenen Randbedingungen als stationären Punkt der Wirkung

$$S[q] \;=\; \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}s\;\mathcal{L}(q(s),\dot{q}(s)). \tag{1.2}$$

Dieser Sachverhalt wird *das Prinzip der kleinsten Wirkung* genannt. Durch Funktionalableitung von (1.2) folgen für die klassische Trajektorie die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\delta}{\delta q_a(t)}\,S[q] \;=\; \left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_a(t)} + \frac{\partial}{\partial q_a(t)}\right\}\mathcal{L}(q(t),\dot{q}(t)) \;=\; 0. \tag{1.3}$$

Speziell für die Lagrange-Funktion (1.1) bekommen wir daraus die Newton-Gleichungen

$$m_a \ddot{q}_a \;=\; -\frac{\partial}{\partial q_a} V(q). \tag{1.4}$$

Siehe [26], falls Nachholbedarf zu diesen Gleichungen besteht.

Die phantastische Idee von Feynman besteht nun darin, daß in der Quantenmechanik, im Unterschied zur Klassischen Mechanik, nicht nur der eine Pfad betrachtet werden muß, für den die Wirkung (1.2) stationär wird, sondern *alle* stetigen Pfade zwischen q_i und q_f. Die Pfade kommen jedoch nicht gleichberechtigt vor, sondern jeder mit einer eigenen komplexen Amplitude, nämlich $\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S[q]\right\}$, wobei $S[q]$ wiederum die klassische Wirkung ist. Matrixelemente lassen sich als gewichtete Summen über alle Pfade darstellen. Ein Prototyp ist das Matrixelement

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \;=\; \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \left[\mathrm{d}^D q\right] \; \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\, S[q] \right\}. \tag{1.5}$$

Dabei ist formal $\left[\mathrm{d}^D q\right] \;=\; \text{const.} \prod_{t_i<t<t_f} \mathrm{d}^D q(t)$. (Tatsächlich muß ein Teil des Exponentials zum Maß gefügt werden.) Bemerkenswert ist, daß wir es im Pfadintegralformalismus ausschließlich mit kommutierenden *klassischen* Größen zu tun haben. Wir werden eine analoge Formel zu (1.5) als Ausgangspunkt für die Quantenelektrodynamik nehmen. Bereits das Erreichen dieser Startlinie erfordert allerdings einen gewissen Lernaufwand, da die Quantenelektrodynamik als eine spezielle Quantenfeldtheorie bereits eine Reihe von Besonderheiten aufweist, die es zunächst zu verstehen gilt.

1.3 Arbeitsprogramm

In den ersten Vorlesungen soll en detail das Pfadintegral, ausgehend von der Pfadintegralformulierung der Quantenmechanik, entwickelt werden. Wir werden von Anfang an die Zeit als komplexe Variable betrachten, um zwischen dem Minkowskischen und dem Euklidischen Raume zu interpolieren. Anschliessend werden wir per Analogie die Quantenfeldtheorie des reellen skalaren Feldes in Angriff nehmen. Danach kommt das Pfadintegral für Fermionen an die Reihe und anschließend das Pfadintegral für Eichfelder. Wir werden dann aus dem Pfadintegral der QED die Feynman-Regeln herleiten und uns dann der Berechnung von Prozessen zuwenden. Eine Reihe von Bemerkungen über strukturelle Aspekte der Theorie stützt die Ränder unseres Themas QED ab.

2 Das Pfadintegral in der Quantenmechanik

Betrachten wir ein quantenmechanisches System, das durch Hermitesche Operatoren Q_a und P_a gegeben sei, wobei $a \in \{1, 2, \ldots, D\}$, die den kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[Q_a, Q_b] \;=\; 0, \quad [P_a, P_b] \;=\; 0, \quad [Q_a, P_b] \;=\; \mathrm{i}\,\hbar\,\delta_{a,b} \tag{2.1}$$

genügen. Man nennt D die Dimension des Systems. Im Moment sei die Dimension endlich. Später werden wir ausschließlich den unendlich dimensionalen Fall betrachten. Die dazugehörigen Eigenvektoren seien $|q\rangle$ und $|p\rangle$, wobei $p, q \in \mathbb{R}^D$. Die Eigenvektoren seien definiert durch die Eigenschaften

$$Q|q\rangle \;=\; q|q\rangle, \quad \langle q|q'\rangle \;=\; \delta(q - q'), \quad \int \mathrm{d}^D q\; |q\rangle\langle q| \;=\; 1, \tag{2.2}$$

und analog

$$P|p\rangle \;=\; p|p\rangle, \quad \langle p|p'\rangle \;=\; (2\pi\hbar)^D\,\delta(p - p'), \quad \int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi\hbar)^D}\; |p\rangle\langle p| \;=\; 1. \tag{2.3}$$

Mit den so gewählten Normierungsfaktoren gilt die Transformationsformel

$$\langle q|p\rangle \;=\; \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\, p\, q\right). \tag{2.4}$$

Die Zeitentwicklung des Systems sei bestimmt durch einen Hamilton-Operator der allgemeinen Form

$$H(Q, P) \;=\; V(Q) + T(P), \quad T(P) \;=\; \sum_{a=1}^{D} \frac{P_a^2}{2\, m_a}. \tag{2.5}$$

Das Ziel dieser Vorlesung ist eine Pfadintegralformel für den quantenmechanischen Zeitentwicklungsoperator

$$U(\mathrm{i}\,\mathrm{t}) \;=\; \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{t}}{\hbar} H(Q, P)\right\} \tag{2.6}$$

in der Ortsraumdarstellung. Dazu betrachten wir die Zeitvariable sogleich als komplexe Variable und definieren $t \;=\; \mathrm{i}\,\mathrm{t}$. Aus mathematischen Gründen wollen wir t zunächst als reellwertig betrachten. Später werden wir die quantenmechanischen Formeln durch analytische Fortsetzung zu imaginären t-Werten, d. h. zu reellen t-Werten, zurückgewinnen. Diesen Trick nennt man Wick-Rotation.

2.1 Die freie Zeitentwicklung

Betrachten wir zunächst das freie System, das durch $V(Q) = 0$ definiert ist. Die Ortsraumdarstellung für den freien Zeitenwicklungsoperator läßt sich durch Fourier-Transformation berechnen. Er ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\left\langle q \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}T(P)} \right| q' \right\rangle &= \int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi\hbar)^D} \left\langle q \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}T(P)} \right| p \right\rangle \langle p|q'\rangle \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi\hbar)^D} \, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}T(p)} \langle q|p\rangle \langle p|q'\rangle \\ &= \prod_{a=1}^{D} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p_a}{2\pi\hbar} \exp\left\{ -\frac{t\,p_a^2}{2\hbar m_a} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\, p_a (q_a - q_a') \right\} \\ &= \prod_{a=1}^{D} \sqrt{\frac{m_a}{2\pi\hbar\, t}} \exp\left\{ -\frac{m_a (q_a - q_a')^2}{2\,\hbar\, t} \right\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dies ist nämlich ein Produkt eindimensionaler Gaußscher Integrale. (Es steht einschließlich der Normierungskonstanten auf dem Zehnmarkschein.)

Übungsaufgabe 1) Sei $m > 0$. Beweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\, \mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2m} + \mathrm{i}p\,x} = \sqrt{2\pi m}\, \mathrm{e}^{-\frac{m\,x^2}{2}}. \tag{2.8}$$

2) Sei M eine positiv definite, symmetrische, reelle $D \times D$-Matrix. Beweise

$$\int_{\mathbb{R}^D} \mathrm{d}^D p\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}p^T M^{-1} p + \mathrm{i}p^T q} = \sqrt{\det(2\pi M)}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}q^T M\, q}. \tag{2.9}$$

2.1.1 Matrixnotation und Gaußsche Faltung

Die Rechnung (2.7) läßt sich unmittelbar auf den etwas allgemeineren Fall einer kinetischen Energie der Gestalt

$$T(P) = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{D} P^a \, (M^{-1})_{a,b}\, P^b \tag{2.10}$$

übertragen, bei dem M eine $D \times D$-Matrix ist. Gl. (2.9) ist hierin als diagonaler Spezialfall $M_{a,b} = \delta_{a,b}\, m_b$ enthalten. Das Ergebnis der analogen Rechnung lautet

$$\left\langle q \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}T(P)} \right| q' \right\rangle = \det\left(\frac{M}{2\pi\hbar\, t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\hbar t}(q - q')^T M\, (q - q') \right\}. \tag{2.11}$$

Die zu Gl. (2.11) zugeordnete differentielle Größe

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\mu_{q,\,\hbar t\, M^{-1}}(q') \;= \\
&\det\left(\frac{M}{2\pi\hbar\, t}\right)^{\frac{1}{2}} \;\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar\, t}(q-q')^T\, M\,(q-q')\right\}\; \mathrm{d}^D q'
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

nennt man das Gaußsche Maß auf dem $\mathbb{R}^D$ mit dem Mittelwert q und der Kovarianz $\hbar t\, M^{-1}$. Beim zentrierten Maß, das durch $q = 0$ definiert ist, läßt man üblicherweise den ersten Index q fort. Die freie Euklidische Zeitentwicklung einer Wellenfunktion ist folglich gegeben durch eine Gaußsche Faltung:

$$
\begin{aligned}
\left\langle q \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}T(P)} \right| \psi \right\rangle &= \int \mathrm{d}^D q' \;\left\langle q \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}T(P)} \right| q' \right\rangle\; \langle q' | \psi \rangle \\
&= \int \mathrm{d}\mu_{q,\,\hbar t\, M^{-1}}(q')\; \psi(q') \\
&= \int \mathrm{d}\mu_{\hbar t\, M^{-1}}(q')\; \psi(q+q').
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Schließlich prüft man nach, daß (2.13) die Diffusionsgleichung

$$
\frac{\partial}{\partial t} \left\langle q \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}T(P)} \right| \psi \right\rangle \;=\; \frac{\hbar}{2} \sum_{a,b=1}^{D} \frac{\partial}{\partial q_a}\,(M^{-1})_{a,b}\,\frac{\partial}{\partial q_b}\; \left\langle q \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}T(P)} \right| \psi \right\rangle \tag{2.14}
$$

erfüllt. Durch die Substitution $t \to \mathrm{i}\,t$ erhält man daraus die freie Schrödinger-Gleichung.

Übungsaufgabe 1) Zeige, daß (2.11) die beiden Gleichungen

$$
\int \mathrm{d}^D q \;\left\langle q \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}T(P)} \right| q' \right\rangle \;=\; 1 \tag{2.15}
$$

und

$$
\int \mathrm{d}^D q' \;\left\langle q \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}T(P)} \right| q' \right\rangle \;\left\langle q' \left| \mathrm{e}^{-\frac{t'}{\hbar}T(P)} \right| q'' \right\rangle \;=\; \left\langle q \left| \mathrm{e}^{-\frac{t+t'}{\hbar}T(P)} \right| q'' \right\rangle \tag{2.16}
$$

erfüllt. 2) Zeige, daß Gl. (2.14) gilt.

2.1.2 Pfadintegraldarstellung

Zerlegen wir t in n Summanden $t = \frac{t}{n} + \cdots + \frac{t}{n}$ und iterieren GL. (2.16). Dann erhalten wir mit den Abkürzungen $q = q_n$ und $q' = q_0$ die Gleichung

$$
\begin{aligned}
\left\langle q \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}T(P)} \right| q' \right\rangle &= \left\langle q \left| \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar\, n}T(P)}\right)^n \right| q' \right\rangle \\
&= \int \left(\prod_{m=1}^{n-1} \mathrm{d}^D q_m\right) \left(\prod_{m=1}^{n} \left\langle q_m \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar\, n}T(P)} \right| q_{m-1} \right\rangle\right) \\
&= \det\left(\frac{n\,M}{2\pi\hbar\, t}\right)^{\frac{n}{2}} \int \prod_{m=1}^{n-1} \mathrm{d}^D q_m \;\exp\left\{-\frac{1}{\hbar} S_0[q]\right\},
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

wobei $S_0[q]$ die diskretisierte freie Wirkung des Systems, nämlich die quadratische Form

$$\begin{aligned} S_0[q] &= \frac{n}{2\,t} \sum_{m=1}^{n} (q_m - q_{m-1})^T \; M \; (q_m - q_{m-1}) \\ &= \frac{t}{2\,n} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{q_m - q_{m-1}}{\frac{t}{n}} \right)^T \; M \; \left(\frac{q_m - q_{m-1}}{\frac{t}{n}} \right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

ist. Somit ist (2.17) seinerseits ein $(n-1)D$-dimensionales Gaußsches Integral. In (2.18) erkennen wir eine diskretisierte Zeitableitung. Im Limes $n \to \infty$ wird dieser Ausdruck unser erstes Pfadintegral

$$\left\langle q \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar} T(P)} \right| q' \right\rangle \;=\; \int_{q(0)=q'}^{q(t)=q} [d^D q] \;\exp\left\{ -\frac{1}{2\hbar} \int_0^t \mathrm{d}s \; \dot{q}(s)^T \; M \; \dot{q}(s) \right\}. \tag{2.19}$$

Bildlich entspricht dabei (2.17) einer Summation (bzw. Integration) über Polygone mit $n-1$ Stützstellen. Das Integrationsmaß in (2.19) ist ein sogenanntes bedingtes Wiener-Maß . Man kann zeigen, daß es auf Hölder-stetige Wege $q : [0,t] \to \mathbb{R}^D$ von der Ordnung $1/2$ konzentriert ist, die den Randbedingungen $q(0) = q'$ und $q(t) = q$ gehorchen. Solche Pfade sind stetig, jedoch nicht differenzierbar. Siehe [49] und Referenzen darin.

2.1.3 Berechnung des Pfadintegrals

Bevor wir die Formel (2.19) auf den wechselwirkenden Fall übertragen, wollen wir (2.17) explizit ausrechnen. Das Vorhaben mag überflüssig erscheinen, da die Herleitung von (2.17) bereits eine Rechenvorschrift darstellt. Die Absicht hiervon ist pädagogischer Natur, nämlich Vertrautheit mit (2.17) und (2.19) zu gewinnen.

Verschiebe in (2.17) zunächst die Integrationsvariablen um den geraden Polygonzug gemäß

$$q_m \;=\; q_0 + \frac{m}{n}(q_n - q_0) + x_m. \tag{2.20}$$

In den neuen Variablen gelten dann die Randbedingungen $x_0 = x_n = 0$. Weiterhin gilt $q_m - q_{m-1} = \frac{1}{n}(q_n - q_0) + x_m - x_{m-1}$. Ausgedrückt in den neuen Variablen ist die diskretisierte Wirkung (2.18) gegeben durch die beiden Terme

$$S_0[q] \;=\; \frac{1}{2\,t}(q - q')^T \; M \; (q - q') + S_0[x], \tag{2.21}$$

da der Mischterm

$$\frac{1}{t}(q - q')^T \; M \; \sum_{m=1}^{n} (x_m - x_{m-1}) = 0 \tag{2.22}$$

wegen den neuen Randbedingungen $x_n = x_0 = 0$ verschwindet. Damit erhalten wir den Ausdruck

$$\left\langle q \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar} T(P)} \right| q' \right\rangle = \exp\left\{ -\frac{1}{2\hbar\, t} \, (q-q')^T \, M \, (q-q') \right\}$$
$$\det\left(\frac{n\, M}{2\pi\hbar\, t} \right)^{\frac{n}{2}} \int \prod_{m=1}^{n-1} \mathrm{d}^D x \, \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} S_0[x] \right\}. \tag{2.23}$$

Um die Rundreise zu (2.11) zu beenden, müssen wir den Normierungsfaktor ausrechnen und als Resultat

$$\det\left(\frac{n\, M}{2\pi\hbar\, t} \right)^{\frac{n}{2}} \int \prod_{m=1}^{n-1} \mathrm{d}^D x \, \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} S_0[x] \right\} = \det\left(\frac{M}{2\pi\hbar\, t} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.24}$$

erhalten. Es gibt mindestens zwei Weisen, (2.24) zu bestätigen. Die eine besteht in der iterativen Ausintegration der Variablen x_1, x_2 usw. Dieser Weg ist die Umkehrung der bisherigen Argumentation. Die andere Weise ist die Diagonalisierung der quadratischen Form $S_0[x]$ mittels Fourier-Transformation. Dieser zweite Weg geht wie folgt. Betrachte die Sinus-Transformation

$$x_m = \sum_{l=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi\, m\, l}{n} \right) \, \widetilde{x}_l, \qquad \widetilde{x}_l = \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi\, m\, l}{n} \right) \, x_m. \tag{2.25}$$

Zum Beweis von (2.25) notieren wir die Orthogonalitätsbeziehung

$$\sum_{m=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi\, l\, m}{n} \right) \, \sin\left(\frac{\pi\, l'\, m}{n} \right) = \frac{n}{2} \, \delta_{l,l'}. \tag{2.26}$$

Gl. (2.26) besagt, daß das Quadrat der Sinus-Transformation $\frac{n}{2}$ mal der eins-Matrix ist. Daraus folgt unmittelbar, daß

$$\det\left(\frac{\partial x_m}{\partial \widetilde{x}_l} \right) = \left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{(n-1)D}{2}}. \tag{2.27}$$

Die Sinus-Transformation diagonalisiert die quadratische Form (2.18). Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} S_0[x] &= \frac{n}{2\, t} \sum_{m=1}^{n} (x_m - x_{m-1})^T \, M \, (x_m - x_{m-1}) \\ &= \frac{1}{2\, t} \sum_{m=1}^{n-1} \lambda_m \, \widetilde{x}_m^T \, M \, \widetilde{x}_m, \end{aligned} \tag{2.28}$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_m = 2\, n^2 \, \sin^2\left(\frac{\pi\, m}{2\, n} \right) = \frac{\pi^2\, m^2}{2} \prod_{l=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left(\frac{\pi\, m}{2\, l\, n} \right)^2 \right\}^2. \tag{2.29}$$

Nach der Sinus-Transformation faktorisiert das Integral (2.24) und kann somit als Produkt D-dimensionaler Gauß-Integrale sofort berechnet werden. Wir notieren

$$
\begin{aligned}
&\det\left(\frac{n\,M}{2\pi\hbar\,t}\right)^{\frac{n}{2}} \int \prod_{m=1}^{n-1} \mathrm{d}^D x\ \exp\left\{-\frac{1}{\hbar} S[x]\right\} = \\
&= \det\left(\frac{n\,M}{2\pi\hbar\,t}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{(n-1)D}{2}} \prod_{m=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}^D} \mathrm{d}^D \widetilde{x}_m\ \exp\left\{-\frac{\lambda_m}{2\hbar\,t}\,\widetilde{x}_m^T\,M\,\widetilde{x}_m\right\} \\
&= \det\left(\frac{n\,M}{2\pi\hbar\,t}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{(n-1)D}{2}} \prod_{m=1}^{n-1} \det\left(\frac{\lambda_m\,M}{2\pi\hbar\,t}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \det\left(\frac{M}{2\pi\hbar\,t}\right)^{\frac{1}{2}} \left(n\prod_{m=1}^{n-1}\frac{n^2}{2\,\lambda_m}\right)^{\frac{D}{2}}. \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

Wir haben die direkte Berechnung von (2.17) somit auf die folgende schöne Identität

$$
\prod_{m=1}^{n-1}\frac{2\lambda_m}{n^2} \;=\; 4^{n-1}\prod_{m=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\pi\,m}{2\,n}\right) \;=\; \frac{1}{n} \qquad (2.31)
$$

zurückgeführt. Damit ist unsere Berechnung von (2.17) vermöge der Fourier-Transformation (2.25) fertig. Eine analoge Rechnung kann auch direkt für das richtige Pfadintegral (2.19) gemacht werden. Man kann argumentieren, daß der Normierungsfaktor (2.24) unwichtig ist, da er nicht von den Randbedingungen abhängt. Die Berechnung von (2.19) wird dann sehr einfach, und sei dem Leser überlassen.

Übungsaufgabe Zeige die Formeln (2.26), (2.28) und (2.31).

2.2 Feynman-Kac-Formel

Nach dieser Vorbetrachtung kommen wir zum wechselwirkenden Fall. Ausgangspunkt ist die Trotter-Formel

$$
U(t) \;=\; \lim_{n\to\infty}\left\{U_0\left(\frac{t}{n}\right)\,U_1\left(\frac{t}{n}\right)\right\}^n, \qquad (2.32)
$$

wobei

$$
U_0(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}T(P)}, \qquad U_1(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}V(Q)}. \qquad (2.33)
$$

Ein knapper Beweis aus [51] wird in [50] wiedergegeben. Unter Verwendung der Pfadintegraldarstellung des freien Zeitentwicklungsoperators erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\langle q\,|U(t)|\,q'\rangle &= \lim_{n\to\infty}\int\prod_{m=1}^{n-1}\mathrm{d}^D q_m\prod_{m=1}^{n}\left\langle q_m\left|U_0\left(\frac{t}{n}\right)\,U_1\left(\frac{t}{n}\right)\right|q_{m-1}\right\rangle\\
&= \lim_{n\to\infty}\int\prod_{m=1}^{n-1}\mathrm{d}^D q_m\prod_{m=1}^{n}\left[\left\langle q_m\left|U_0\left(\frac{t}{n}\right)\right|q_{m-1}\right\rangle\,\exp\left\{-\frac{t}{\hbar n}V(q_{m-1})\right\}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\int\prod_{m=1}^{n-1}\mathrm{d}^D q_m\prod_{m=1}^{n}\left[\int_{q(\frac{m-1}{n}t)=q_{m-1}}^{q(\frac{m}{n}t=q_m)}[\mathrm{d}^D q]\right.\\
&\qquad\left.\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int_{\frac{m-1}{n}t}^{\frac{m}{n}t}\mathrm{d}s\,\dot{q}^T(s)M\dot{q}(s)\right\}\,\exp\left\{-\frac{t}{\hbar n}V(q_{m-1})\right\}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{q(0)=q'}^{q(t)=q}[\mathrm{d}^D q]\,\exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int_0^t\mathrm{d}s\,\dot{q}^T(s)M\dot{q}(s)\right\}\\
&\qquad\exp\left\{-\frac{t}{\hbar n}\sum_{m=1}^{n}V(q(t_{m-1}))\right\}. \end{aligned}\tag{2.34}$$

Wir vertauschen anschließend den Grenzwert mit der Pfadintegration. Da das Wiener-Maß auf stetige Pfade konzentriert ist, können wir anschließend den Grenzwert ausführen. Das Resultat dieser Prozedur ist die Feynman-Kac-Formel

$$\langle q\,|U(t)|\,q'\rangle = \int_{q(0)=q'}^{q(t)=q}[\mathrm{d}^D q]\,\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}S[q]\right\}\tag{2.35}$$

mit

$$S[q] = \int_0^t\mathrm{d}s\,\left\{\frac{1}{2}\dot{q}^T(s)M\dot{q}(s)+V(q(s))\right\}.\tag{2.36}$$

Diese Formel ist außerordentlich nützlich für analytische Studien von quantenmechanischen Systemen. Die mathematische Schreibform von (2.35) ist

$$\langle q\,|U(t)|\,q'\rangle = \int\mathrm{d}\mu_{q,q'}(q)\,\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_0^t\mathrm{d}s\,V(q(s))\right\}.\tag{2.37}$$

Ich verweise wiederum auf [49] in diesem Zusammenhang. Feynmans Originalformel ist genau (2.35) bei imaginärem t. Man erhält sie durch Wick-Rotation, die wir jetzt erklären wollen.

2.3 Wick-Rotation

Sei $0\le\Theta\le\frac{\pi}{2}$ ein Rotationswinkel. Wir definieren dann

$$t_\Theta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}t,\qquad q_\Theta(t_\Theta) = q(t),\tag{2.38}$$

so daß $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\,\mathrm{d}t_\Theta$ und $\dot{q}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}\,\dot{q}_\Theta(t_\Theta)$. Es folgt sofort, daß die Wirkung in der rotierten Zeit gegeben ist durch

$$\begin{aligned} S[q] &= \int_0^t \mathrm{d}s\,\left\{\frac{1}{2}\dot{q}^T(s)M\dot{q}(s) + V(q(s))\right\} \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}\int_0^{t_\Theta} \mathrm{d}s\,\left\{\frac{1}{2}\dot{q}_\Theta^T(s)M\dot{q}_\Theta(s) + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\Theta}\,V(q_\Theta(s))\right\} \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}\,S_\Theta[q_\Theta]. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Diese Substitution führen wir im Pfadintegral (2.35) durch. Das Ergebnis ist nach Umbenennung der Integrationsvariablen

$$\left\langle q\left|U\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}t\right)\right|q'\right\rangle = \int_{q(0)=q'}^{q(t)=q} \left[\mathrm{d}^D q\right]\,\exp\left\{-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}}{\hbar}S_\Theta[q]\right\}. \tag{2.40}$$

Bei $\Theta = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir das Feynmansche Pfadintegral, bei $\Theta = 0$ hingegen das sogenannte Euklidische Pfadintegral.

Das Euklidische Pfadintegral hat nicht nur den Vorteil, mathematisch wohldefiniert zu sein, es erlaubt beispielsweise auch die Berechnung per Monte Carlo Simulation, da $\mathrm{d}\mu_{q,q'}[q]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Im folgenden werden wir beide Formulierungen verwenden, die Euklidische Landmasse aber nur dann verlassen, wenn es aus Interpretationsgründen zweckmäßig erscheint.

2.4 Allgemeine Matrixelemente

Eine allgemeine Fragestellung der Quantenmechanik ist die Berechnung der Übergangsamplitude $\langle\psi\,|U(t-t')|\,\psi'\rangle$ von einem zum Zeitpunkt t' präparierten Zustand $|\psi'\rangle$ zu einem zum Zeitpunkt t gemessenen Zustand $|\psi\rangle$. (Die Zustände sind hier Schrödinger-Zustände.) In der Ortsraumdarstellung berechnet sie sich gemäß

$$\begin{aligned} \left\langle\psi\left|U(t-t')\right|\psi'\right\rangle &= \int \mathrm{d}^D q \int \mathrm{d}^D q'\,\langle\psi|q\rangle\,\left\langle q\left|U(t-t')\right|q'\right\rangle\,\langle q'|\psi'\rangle \\ &= \int \mathrm{d}^D q \int \mathrm{d}^D q'\,\overline{\psi(q)}\,\psi'(q') \\ &\qquad \int_{q(t')=q'}^{q(t)=q} \left[d^D q\right]\,\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}S[q]\right\}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Dabei ist die Wirkung nun gegeben durch ein Zeitintegral von t' bis t. Es treten also zusätzliche Randterme auf, wenn man solche Matrixelemente berechnen möchte.

2.5 Grundzustandsenergie

Nehmen wir an, daß H einen normierten Grundzustand $|\Omega\rangle$ besitzt mit isoliertem Eigenwert E_0 und Wellenfunktion $\langle q|\Omega\rangle$. In der Euklidischen Zeitevolution überlebt im Erwartungswert

$$\begin{aligned} \left\langle 0 \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}H} \right| 0 \right\rangle &= \left\langle 0 \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}H} \left(\mathbb{P}_\Omega + \mathbb{P}_\Omega^\perp \right) \right| 0 \right\rangle \\ &= |\langle 0|\Omega\rangle|^2 \exp\left\{ -\frac{t\,E_0}{\hbar} \right\} \left\{ 1 + \frac{\left\langle 0 \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}(H-E_0)} \mathbb{P}_\Omega^\perp \right| 0 \right\rangle}{|\langle 0|\Omega\rangle|^2} \right\} \end{aligned} \tag{2.42}$$

im Limes $t \to \infty$ nur der Grundzustand. Es gilt daher

$$-\hbar \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \left\langle 0 \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}H} \right| 0 \right\rangle = E_0. \tag{2.43}$$

Diese Formel liefert uns die Grundzustandsenergie ausgedrückt durch den Euklidischen Zeitentwicklungsoperator in der Ortsraumdarstellung. In der Pfadintegraldarstellung lautet (2.43) folglich

$$E_0 = -\frac{\hbar}{2} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \int_{q(-t)=0}^{q(t)=0} \left[\mathrm{d}^D q\right] \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_{-t}^{t} \mathrm{d}s\, L\big(q(s), \dot{q}(s)\big) \right\}. \tag{2.44}$$

Die Euklidische Lagrange-Funktion unterscheidet sich dabei von der üblichen Lagrange-Funktion um ein Vorzeichen. Sie ist gegeben durch

$$L\big(q(s), \dot{q}(s)\big) = \frac{1}{2} \dot{q}^T(s) M \dot{q}(s) + V(q(s)). \tag{2.45}$$

Da unser Hamilton-Operator zeitunabhängig ist, können wir bequemerweise das Zeitintervall legen, wie es uns beliebt.

Gl.(2.44) hat große Ähnlichkeit mit einer bekannten Formel aus der Statistischen Mechanik, nämlich der Freien Energie eines kanonischen Ensembles im Limes eines unendlichen Volumens in einer Raumdimension. Die Wirkung übernimmt dabei den Part der klassischen Hamilton-Funktion. Die Plancksche Konstante spielt die Rolle der Temperatur.

2.6 Grundzustandserwartungswerte

Die Grundzustandsenergie ist nicht die einzige Größe von physikalischer Bedeutung. In der Quantenfeldtheorie beschreibt man den physikalischen Gehalt einer Theorie allgemein durch Grundzustandserwartungswerte. Für diese kann man eine analoge Formel zu (2.42) herleiten. Dazu verallgemeinern wir zunächst (2.42) zu der folgenden Identität

$$\begin{aligned}
&\left\langle 0 \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}H}\, A\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}H} \right| 0 \right\rangle \\
&= \left\langle 0 \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}H} (\mathbb{P}_\Omega + \mathbb{P}_\Omega^\perp)\, A\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}H}\, (\mathbb{P}_\Omega + \mathbb{P}_\Omega^\perp) \right| 0 \right\rangle \\
&= |\langle 0|\Omega\rangle|^2\ \mathrm{e}^{-\frac{2t}{\hbar}E_0}\ \langle \Omega\,|A|\,\Omega\rangle\ \Bigg\{ 1 + \\
&\quad \frac{\left\langle \Omega \left| A\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}(H-E_0)} \mathbb{P}_\Omega^\perp \right| 0 \right\rangle}{\langle\Omega|0\rangle\ \langle \Omega\,|A|\,\Omega\rangle} + \frac{\left\langle 0 \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}(H-E_0)} \mathbb{P}_\Omega^\perp\, A \right| \Omega \right\rangle}{\langle \Omega\,|A|\,\Omega\rangle\ \langle 0|\Omega\rangle} \\
&\quad + \frac{\left\langle 0 \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}(H-E_0)} \mathbb{P}_\Omega^\perp\, A\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}(H-E_0)} \mathbb{P}_\Omega^\perp \right| 0 \right\rangle}{\langle 0|\Omega\rangle\ \langle \Omega\,|A|\,\Omega\rangle\ \langle\Omega|0\rangle} \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Wenn der Grundzustand wie gefordert ein isolierter Eigenzustand ist, bzw. die angeregten Zustände vom Grundzustand durch eine Energielücke getrennt sind, so kontrahiert der Operator

$$\exp\left\{ -\frac{t}{\hbar}(H - E_0) \right\}\ \Big(1 - |\Omega\rangle\langle\Omega| \Big). \tag{2.47}$$

Im Limes $t \to \infty$ verbleibt nur die 1 in der geschweiften Klammer in (2.46). Man bemerke, daß der Projektor auf den Grundzustand mit dem Hamilton-Operator und daher natürlich auch mit dem Zeitentwicklungsoperator vertauscht. In Kombination mit (2.42) erhalten wir die wunderbare Formel

$$\langle \Omega\,|A|\,\Omega\rangle\ =\ \lim_{t\to\infty} \frac{\left\langle 0 \left| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}H}\, A\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}H} \right| 0 \right\rangle}{\left\langle 0 \left| \mathrm{e}^{-\frac{2t}{\hbar}H} \right| 0 \right\rangle} \tag{2.48}$$

für allgemeine Grundzustandserwartungswerte. Tatsächlich kann man den Zustand $|0\rangle$ durch einen beliebigen anderen Zustand ersetzen, vorausgesetzt, daß dieser einen nicht verschwindenden Überlapp mit dem Grundzustand hat. Die Formel ist trivialerweise erfüllt, wenn man den Grundzustand selbst wählt.

In der dargestellten Form muß die Zeitvariable t einen nicht verschwindenden Realteil besitzen. Bei rein imaginären Werten von t gibt es nämlich ein Problem: der Operator (2.47) kontrahiert dann nicht mehr, sondern er oszilliert. (Formalerweise wird dieses prekäre Problem ignoriert.) Ein anderer Zugang findet sich in [61]. Dort wird die Grundzustandswellenfunktion für den freien Fall explizit bestimmt und als Randterm in das Feynmansche Pfadintegral eingesetzt.

2.7 Greensche Funktionen

Wir kommen nun zu einer Pfadintegralformel, die im weiteren Gang der Handlung eine zentrale Rolle spielen wird, der Darstellung der sogenannten

Greenschen Funktionen. Wir betrachten dazu den zeitabhängigen Heisenberg-Operator

$$Q(t) \;=\; \exp\left\{\frac{t}{\hbar}H(Q,P)\right\}\; Q\; \exp\left\{-\frac{t}{\hbar}H(Q,P)\right\}. \qquad (2.49)$$

Der besorgte Leser wird die Zeit hier bestimmt imaginär machen wollen. Betrachten wir nun eine aufsteigend geordnete Folge von Zeitpunkten

$$t_n > t_{n-1} > \cdots > t_1. \qquad (2.50)$$

Die Greensche n-Punkt-Funktion zu dieser Zeitfolge ist definiert als Grundzustandserwartungswert

$$G_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) \;=\; \left\langle \Omega \middle| \mathbb{T}\Big(Q(t_1)\, Q(t_2) \cdots Q(t_n)\Big) \middle| \Omega \right\rangle, \qquad (2.51)$$

wobei $\mathbb{T}$ der sogenannte Zeitordnungsoperator ist. Er ordnet die Zeiten chronologisch aufsteigend. Für (2.50) ist er durch

$$\mathbb{T}\Big(Q(t_1)\, Q(t_2) \cdots Q(t_n)\Big) \;=\; Q(t_n)\, Q(t_{n-1}) \cdots Q(t_1) \qquad (2.52)$$

definiert. Die Greensche Funktion (2.51) ist per Definition symmetrisch in den Zeitargumenten. Erinnern wir uns nun an die Formel (2.48). Die Greensche Funktion ist gegeben durch

$$G_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{\left\langle 0 \middle| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}H}\, \mathbb{T}\Big(Q(t_1)\, Q(t_2) \cdots Q(t_n)\Big)\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}H} \middle| 0 \right\rangle}{\left\langle 0 \middle| \mathrm{e}^{-\frac{2t}{\hbar}}H \middle| 0 \right\rangle}. \qquad (2.53)$$

Für Zähler und Nenner von (2.53) setzen wir Pfadintegraldarstellungen ein. Den Nenner kennen wir bereits. Der Zähler ist gegeben durch

$$\left\langle 0 \middle| \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}H}\, \mathbb{T}\Big(Q(t_1)\, Q(t_2) \cdots Q(t_n)\Big)\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{\hbar}H} \middle| 0 \right\rangle \;=\;$$
$$\int_{q(-t)=0}^{q(t)=0} [d^D q]\; \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_{-t}^{t} \mathrm{d}s\; L(q(s), \dot{q}(s))\right\}\; q(t_n)\, q(t_{n-1}) \cdots q(t_1). \qquad (2.54)$$

Damit erhalten wir die wunderschöne Pfadintegraldarstellung der Greenschen n-Punkt-Funktion

$$G_n(t_1, \ldots, t_n) \;=\;$$
$$\frac{\int_{q(-\infty)=0}^{q(\infty)=0} [d^D q]\; \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\; L(q(s), \dot{q}(s))\right\}\; q(t_n)\, q(t_{n-1}) \cdots q(t_1)}{\int_{q(-\infty)=0}^{q(\infty)=0} [d^D q]\; \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\; L(q(s), \dot{q}(s))\right\}}. \qquad (2.55)$$

Man erkennt sofort wieder, daß die Greensche Funktion tatsächlich symmetrisch in den Zeitargumenten ist. Bemerkenswert ist wiederum, daß die Pfadintegraldarstellung nur kommutierende klassische Größen involviert.

Übungsaufgabe Zeige Formel (2.54).

2.8 Erzeugende Funktion

In der Quantenfeldtheorie betrachtet man gleich die gesamte Kollektion von Greenschen Funktionen. Ein bequemes Hilfsmittel ist dabei die sogenannte erzeugende Funktion

$$Z[j] \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^{-n}}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_n \; j(t_1) \cdots j(t_n) \; G_n(t_1, \ldots, t_n). \tag{2.56}$$

Die Greenschen Funktionen bekommt man aus der erzeugenden Funktion durch Funktionalableitungen

$$G_n(t_1, \ldots, t_n) \;=\; \hbar^n \frac{\delta^n}{\delta j(t_1) \cdots \delta j(t_n)} \; Z[j] \,\Bigg|_{j=0}. \tag{2.57}$$

Die erzeugende Funktion der Greenschen Funktionen besitzt ihrerseits eine Pfadintegraldarstellung. Diese Formel ist von fundamentaler Bedeutung. Sie lautet

$$Z[j] \;=\; \frac{\int_{q(-\infty)=0}^{q(\infty)=0} [d^D q] \;\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s \; L(q(s), \dot{q}(s)) + \frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s \; j(s)\, q(s)\right\}}{\int_{q(-\infty)=0}^{q(\infty)=0} [d^D q] \;\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s \; L(q(s), \dot{q}(s))\right\}}. \tag{2.58}$$

Diese Formel folgt unmittelbar aus (2.55) und (2.57) unter Beachtung der Identität

$$\begin{aligned} \hbar^n \frac{\delta^n}{\delta j(t_1) \cdots \delta j(t_n)} \; \exp\left\{\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s \, j(s)\, q(s)\right\} \;=& \\ \exp\left\{\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s \, j(s)\, q(s)\right\} \; q(t_1) \cdots q(t_n).& \end{aligned} \tag{2.59}$$

Wir sind nun der Startlinie ein gutes Stück näher gekommen, von der aus wir die Quantenelektrodynamik aus untersuchen wollen. Wir werden eine analoge erzeugende Funktion wie (2.58) für Quantenfelder aufstellen. Wie gesagt, gibt es noch einige Besonderheiten zu beachten, die speziell für Eichtheorien gelten. Außerdem werden wir zuerst verstehen müssen, wie man Fermionen mit Pfadintegralen beschreibt. (Das Pfadintegral (2.58) ist adäquat für Bosonen, mit gewissen Veränderungen beispielsweise für Photonen.)

Übungsaufgabe Schreibe die erzeugende Funktion (2.56) mit Hilfe des Zeitordnungsoperators in Operatorform als Grundzustandserwartungswert.

2.9 Literaturhinweise

Eine umfassende Darstellung der Quantenmechanik im Pfadintegralformalismus vom Erfinder selbst liefert das Buch [22] von Feynman und Hibbs. Eine konzise neuere Quelle ist das Buch von Schulmann [52]. Das hier präsentierte Material findet sich in vielen Lehrbüchern, jeweils mit etwas unterschiedlichen Betrachtungswinkeln. Mit Hintergedanken an die weiteren Vorlesungen möchte ich insbesonders [61, Kap. 9] und [16, Chap. 2] erwähnen. Die Beschreibung physikalischer Größen über Greensche Funktionen und deren erzeugender Funktion ist in der Quantenmechanik unüblich, in der Quantenfeldtheorie unabdingbar. Daher findet man die entsprechenden Formeln in allen Lehrbüchern über Quantenfelder. Eine umfassende Referenz ist wie gesagt [61]. Der Euklidische Zugang wird in dem Werk [64] aus allen Blickwinkeln beleuchtet. Last not least möchte ich doch auf das hervorragende Buch [8] hinweisen als Standardreferenz zur QED im Operatorformalismus.

3 Das reelle skalare Feld

In dieser Vorlesung wollen wir das Pfadintegral von der Quantenmechanik auf die Quantenfeldtheorie verallgemeinern. Dazu betrachten wir das einfachste Modell der Quantenfeldtheorie, das reelle skalare Feld.

Wir beginnen mit einer diskretisierten Version des Modells, das einer Quantenmechanik mit (endlich) vielen Freiheitsgrade entspricht. Auf das diskretisierte Modell können wir das quantenmechanische Pfadintegral direkt anwenden.

Im diskretisierten Modell begegnen wir zugleich einem wichtigen Theorietyp, einer Gitterfeldtheorie mit kontinuierlicher Zeit. In der Literatur wird dieser Zugang die *Hamiltonsche Formulierung* einer Gitterfeldtheorie genannt. Die Gitterfeldtheorie ist selbst ein weites Tätigkeitsfeld, das wir hier nur tangieren wollen. Interessierte Leser verweise ich auf das Lehrbuch von Prof. Münster [45].

Wir wählen ab jetzt die Einheiten so, daß $\hbar = 1$ und $c = 1$ ist, um Schreibarbeit zu sparen.

3.1 Minkowskische Formulierung

Wir beginnen mit der Minkowskischen Formulierung der skalaren Feldtheorie. Später werden wir wiederum die Zeit Wick-rotieren.

3.1.1 Lagrange-Funktion

Betrachten wir das folgende klassische System mit einer endlichen aber sehr großen Anzahl von Freiheitsgraden. Wir ersetzen

$$\{1, \dots, D\} \ni a, \quad q_a(t) \to \phi(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Lambda = a\{0, 1, \dots, L-1\}^{D-1}. \tag{3.1}$$

Beachte die Bedeutungsverschiebung von D. Das neue System hat L^{D-1} (statt D) Freiheitsgrade. Die neue Größe D ist die Dimension des Raumes, der die Freiheitsgrade indiziert.

Dieser Raum ist hier ein kubisches Gitter $\Lambda = a\{0, \dots, L-1\}^{D-1}$. Es ist bequem, periodische Randbedingungen zu postulieren. In diesem Fall ist der Raum ein Gittertorus $\Lambda = a(\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^D$. Über die Frage der Randbedingungen werden wir ansonsten großzügig hinwegsehen.

Üblicherweise ist $D = 4$, da unser Raum erfahrungsgemäß dreidimensional ist. In der Quantenfeldtheorie ist es aber von großem Vorteil, auch diese Dimension als veränderliche Größe zu betrachten, über deren Wert erst bei konkreten Anwendungen verfügt wird. Wenn Ihnen dies Unbehagen bereitet, lesen Sie D i.f. als Synonym für vier.

Analog zur Punkt-Mechanik wird in Klassischen Feldtheorie ein Modell durch die Wahl einer Lagrange-Funktion definiert. Die Lagrange-Funktion wiederum bestimmt man aus einer Lagrange-Dichte.

Wir definieren das reelle skalare Feld durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_M(\phi(\mathbf{x}),\dot\phi(\mathbf{x})) \;=\; \frac{1}{2}\dot\phi(\mathbf{x})^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{D-1}\nabla_i\phi(\mathbf{x})^2 - V(\phi(\mathbf{x})), \qquad (3.2)$$

wobei

$$\nabla_i\phi(\mathbf{x}) \;=\; \frac{\phi(\mathbf{x}+a\mathbf{e}_i)-\phi(\mathbf{x})}{a}, \qquad (3.3)$$

und beispielsweise

$$V(\phi(\mathbf{x})) \;=\; \frac{m^2}{2}\,\phi(\mathbf{x})^2 + \frac{\lambda}{4!}\,\phi(\mathbf{x})^4. \qquad (3.4)$$

Aus der Lagrange-Dichte erhalten wir durch Summation über den Index $\mathbf{x}$ die Lagrange-Funktion

$$L_M(\phi,\dot\phi) \;=\; a^{D-1}\sum_{x\in\Lambda}\mathcal{L}_M(\phi(\mathbf{x}),\dot\phi(\mathbf{x})) \;=\; \int_\Lambda \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}\,\mathcal{L}_M(\phi(\mathbf{x}),\dot\phi(\mathbf{x})). \qquad (3.5)$$

Die Reskalierungsfaktoren haben wir mit der kühnen Absicht, später den Infrarotlimes $L\to\infty$ und den Ultraviolettlimes $a\to 0$ auszuführen, gewählt. Dieser Grenzfall soll in der Notation (3.5) angedeutet werden.

Aus der Lagrange-Funktion wiederum bekommen wir sofort die Wirkung. In der Quantenfeldtheorie erstreckt sich das betrachtete Zeitintervall typischerweise von minus bis plus Unendlich.

Sie fragen sich bestimmt, warum wir in der unendlichen Menge aller Möglichkeiten gerade die Lagrange-Dichte (3.2) gewählt haben. Zwei Leitmotive führen auf diese Wahl:

- die relativistische Invarianz (im Kontinuumslimes) und
- die Lokalität der Theorie.

Lokalität bedeutet hier, daß die Lagrange-Dichte nur vom Feld $\phi(x)$ und seinen Ableitungen an einem Raum-Zeit-Punkt $x=(t,\mathrm{x})$ abhängt, und daß nur Ableitungen höchstens zweiter Ordnung vorkommen.

Übungsaufgabe Berechne die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für das Feld ϕ aus (3.2).

3.1.2 Hamilton-Funktion

Die Hamilton-Funktion bestimmt man wie folgt. Ein kurzer Abriß der klassischen Mechanik kontinuierlicher Systeme findet man in [26]. Wir wollen hier zügig voranschreiten.

$$\pi(\mathbf{x}) \;=\; a^{-(D-1)}\frac{\partial}{\partial\dot\phi(\mathbf{x})}L_M(\phi,\dot\phi) \;=\; \frac{\partial}{\partial\dot\phi(\mathbf{x})}\mathcal{L}_M(\phi(\mathbf{x}),\dot\phi(\mathbf{x})) \;=\; \dot\phi(\mathbf{x}) \qquad (3.6)$$

liefert uns eine Hamilton-Dichte

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_M(\phi(\mathbf{x}),\pi(\mathbf{x})) &= \pi(\mathbf{x})\dot{\phi}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}_M(\phi(\mathbf{x}),\dot{\phi}(\mathbf{x})) \\ &= \frac{1}{2}\pi(\mathbf{x})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{D-1}\nabla_i\phi(\mathbf{x})^2 + V(\phi(\mathbf{x})), \qquad (3.7)\end{aligned}$$

und eine Hamilton-Funktion

$$H_M(\phi,\pi) = a^{D-1}\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda}\mathcal{H}_M(\phi(\mathbf{x}),\pi(\mathbf{x})). \qquad (3.8)$$

Da diese Wirkung quadratisch in den Impulsen ist, können wir direkt das Quantisierungsschema der vorigen Vorlesung anwenden.

Um die Analogie zu verdeutlichen: die kanonischen Vertauschungsrelationen (2.1) werden nun

$$[\Phi(\mathbf{x}),\Pi(\mathbf{y})] = \mathrm{i}\,\hbar\,a^{-(D-1)}\delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}. \qquad (3.9)$$

Das Ergebnis der Quantisierung schreiben wir gleich als Pfadintegral.

Übungsaufgabe Diskutiere die Faktoren a^{D-1}.

3.2 Euklidische Formulierung

In der Feynman-Kac-Formel tritt die Euklidische Wirkung des Systems auf. Wir wählen sogleich ein unendliches Zeitintervall.

3.2.1 Euklidische Wirkung

Für unser spezielles Modell ist die Euklidische Wirkung gegeben durch

$$\begin{aligned}S_E[\phi] &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\; L_E(\phi(t),\dot{\phi}(t)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{\Lambda}\mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}\;\mathcal{L}_E(\phi(t,\mathbf{x}),\dot{\phi}(t,\mathbf{x})), \qquad (3.10)\end{aligned}$$

wobei die Euklidische Lagrange-Dichte wiederum gegeben ist durch

$$\mathcal{L}_E(\phi(\mathbf{x}),\dot{\phi}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2}\dot{\phi}(\mathbf{x})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{D-1}\nabla_i\phi(\mathbf{x})^2 + V(\phi(\mathbf{x})). \qquad (3.11)$$

Im Unterschied zur Minkowskischen Lagrange-Dichte (3.2) ist die Euklidische Lagrange-Dichte (3.11) positiv definit.

3.2.2 Wick-Rotation

Die Minkowskische Wirkung und die Euklidische Wirkung gehen auseinander durch eine Wick-Rotation hervor. Wir starten wiederum von der Euklidischen Wirkung. Definiere analog zu (2.38)

$$t_\Theta \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}\, t, \qquad \phi_\Theta(t_\Theta, \mathbf{x}) \;=\; \phi(t, \mathbf{x}). \tag{3.12}$$

Dann gilt

$$\mathrm{d}t \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\, \mathrm{d}t_\Theta, \qquad \dot{\phi}(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}\, \dot{\phi}_\Theta(t_\Theta). \tag{3.13}$$

Die Euklidische Wirkung läßt sich leicht in den rotierten Feldgrößen darstellen. Sie ist gegeben durch

$$S_E[\phi] \;=\; -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_\Theta \int_\Lambda \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}\; \mathcal{L}_\Theta(\phi_\Theta(t_\Theta, \mathbf{x}), \dot{\phi}_\Theta(t_\Theta, \mathbf{x})), \tag{3.14}$$

wobei

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\Theta(\phi_\Theta(t_\Theta, \mathbf{x}), \dot{\phi}_\Theta(t_\Theta, \mathbf{x})) \;= \\ &-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\Theta} \frac{1}{2} \dot{\phi}_\Theta(t_\Theta, \mathbf{x})^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-1} \nabla_i \phi_\Theta(t_\Theta, \mathbf{x})^2 - V(\phi_\Theta(\mathbf{x})). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Bei $\Theta = 0$ finden wir die Euklidische Wirkung, bei $\Theta = \frac{\pi}{2}$ (bis auf einen Proportionalitätsfaktor) die Minkowskische Wirkung. Im Vergleich zu (2.39) haben wir eine etwas andere Konvention gewählt, die in der Quantenfeldtheorie üblich ist.

3.3 Greensche Funktionen

Die Greenschen Funktionen sind ganz analog zu (2.51) definiert, nämlich als Grundzustandserwartungswerte von zeitgeordneten Feldoperatoren,

$$G_n((t_1, \mathbf{x}_1), \ldots, (t_n, \mathbf{x}_n)) \;=\; \left\langle \Omega \,\middle|\, \mathbb{T}\big(\Phi(t_1, \mathbf{x}_1) \cdots \Phi(t_n, \mathbf{x}_n)\big) \,\middle|\, \Omega \right\rangle. \tag{3.16}$$

Im Unterschied zur Quantenmechanik hängen diese Größen noch von den Ortsvariablen ab, die die Feldoperatoren indizieren. Tatsächlich haben wir in (2.51) ebenfalls eine Indexabhängigkeit. Mit $Q(t_i)$ ist eigentlich $Q_{a_i}(t_i)$ gemeint, womit (2.51) als von $a_1, \ldots, a_n$ abhängig zu verstehen ist.

Wir betrachten sogleich ihre erzeugende Funktion. Die folgende Notation erweist sich hier als zweckmäßig:

$$\int_\Lambda \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}\, (\cdot) \;=\; a^{D-1} \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} (\cdot). \tag{3.17}$$

Die erzeugende Funktion der Greenschen Funktionen ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} Z[j] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_1 \int_\Lambda \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_n \int_\Lambda \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}_n \\ &\qquad j(t_1,\mathbf{x}_1)\cdots j(t_n,\mathbf{x}_n)\; G_n\big((t_1,\mathbf{x}_1),\ldots,(t_n,\mathbf{x}_n)\big) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Wir können sofort die Pfadintegraldarstellung für die erzeugende Funktion (3.18) niederschreiben. Bis auf eine Vervielfachung der Freiheitsgrade ist schließlich noch nichts neues passiert. Sie lautet

$$Z[j] = \frac{\int \mathcal{D}\phi\; \exp\{-S_E[\phi] + (j,\phi)\}}{\int \mathcal{D}\phi\; \exp\{-S_E[\phi]\}}, \tag{3.19}$$

wobei $S_E[\phi]$ die Euklidische klassische Wirkung des Systems ist, und wobei der Quellenterm gegeben ist durch

$$(j,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_\Lambda \mathrm{d}^D\mathbf{x}\; j(t,\mathbf{x})\; \phi(t,\mathbf{x}). \tag{3.20}$$

Das Integrationsmaß in (3.19) ist formal ein unendliches Produkt von Lebesgue-Maßen

$$\mathcal{D}\phi = \text{const.} \prod_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\Lambda} \mathrm{d}\phi(t,\mathbf{x}). \tag{3.21}$$

Wiederum muß ein Teil des Exponentials dazugedacht werden, um ein (hochdimensionales) Wiener-Maß zu bekommen.

Der Leser wird in (3.19) die Zustandssumme eines Systems der Statistischen Mechanik wiedererkennen. Dieser Zusammenhang ermöglicht die Untersuchung von Quantenfeldern mit Methoden der Statistischen Mechanik, eine Erkenntnis, die auf Symanzik zurückgeht. Interessierte Leser seien hier auf das Lehrbuch [19] verwiesen.

3.4 Kontinuumslimes

Bislang haben wir den Raum ($D-1$ Dimensionen) durch ein endliches Gitter ersetzt. Erfahrungsgemäß ist der Raum jedoch ein Kontinuum, wenigstens bis zu den kleinsten Abständen, die unserer Erfahrung zugänglich sind. Fernerhin ist der Raum unbeschränkt. Wir tragen diesem Faktum Rechnung, indem wir den Grenzwert

$$L \to \infty, \qquad a \to 0. \tag{3.22}$$

betrachten. Die beiden Limiten werden auch Infrarotlimes (∞-Volumenlimes) und Ultraviolettlimes genannt.

3.4.1 Kontinuumslimes der Wirkung

Die zeitlich rotierte Lagrange-Dichte (3.15) wird in diesem Limes der Ausdruck

$$\mathcal{L}_\Theta(\phi(x), \partial\phi(x)) \;=\; \frac{1}{2} g_\Theta^{\mu,\nu}\, \partial_\mu\phi(x)\, \partial_\nu\phi(x) - V(\phi(x)) \tag{3.23}$$

mit

$$g_\Theta^{\mu,\nu} \;=\; \operatorname{diag}\left(-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\Theta}, -1, \dots, -1\right). \tag{3.24}$$

Es passiert nichts, außer daß die Gittergradienten partielle Ableitungen werden. Bemerkenswert ist jedoch, daß im Kontinuumslimes eine Raum-Zeit-Symmetrie restauriert wird. Zeit und Raum werden gewissermaßen gleichberechtigt.

Wir erkennen an (3.24), daß die Wick-Rotation zwischen einer Minkowskischen und einer Euklidischen Metrik interpoliert. (Die Minuszeichen sind Konventionssache.)

Die Euklidische Wirkung ($\Theta = 0$) erhält im Kontinuumslimes damit die Gestalt

$$S_E[\phi] \;=\; \int \mathrm{d}^D x\; \mathcal{L}_E(\phi(x), \partial\phi(x)) \tag{3.25}$$

mit

$$\mathcal{L}_E(\phi(x), \partial\phi(x)) \;=\; \frac{1}{2}\partial\phi(x)\partial\phi(x) + V(\phi(x)). \tag{3.26}$$

3.4.2 Kontinuumslimes des Pfadintegrals

Wir können diesen Limes formal im Pfadintegral (3.12) durchführen. Das so erhaltene Pfadintegral ist der übliche Startpunkt für die Quantenfeldtheorie in der Pfadintegralsprache. Die Formel ist exakt von der Form (3.19). Die formalen Ersetzungen sind

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \int_\Lambda \mathrm{d}^D\mathbf{x}\; (\cdot) \to \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^D x\; (\cdot), \qquad \prod_{(t,\mathbf{x})\in\mathbb{R}\times\Lambda} \mathrm{d}\phi(t,\mathbf{x}) \to \prod_{x\in\mathbb{R}^D} \mathrm{d}\phi(x). \tag{3.27}$$

Später werden wir sehen, daß der formale Limes falsch ist. Er führt auf singuläre Größen, denen man durch eine sogenannte Renormierungsprozedur Sinn verleihen muß. Dahinter verbirgt sich nichts anderes, als daß der Kontinuumslimes nur durchgeführt werden kann, wenn man simultan die Parameter der Wirkung geeignet adjustiert. Davon wird in einem späteren Kapitel ausführlich zu sprechen sein. Momentan werden wir (unvorsichtig) den formalen Kontinuumsformalismus weiterentwickeln, weil es sich mit Integralen leichter rechnen läßt als mit Summen. Der skeptische Leser sei aber ausdrücklich ermutigt, alle folgenden Rechnungen für unser diskretisiertes Modell durchzuführen, das in der obigen Fassung wohldefiniert ist.

3.5 Die freie Feldtheorie

Die freie Feldtheorie ist in der Euklidischen Formulierung definiert durch die Lagrange-Dichte (3.26) mit $V(\phi(x)) = \frac{m^2}{2}\phi(x)^2$. Die Wirkung ist dann gegeben durch eine quadratische Form

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \frac{1}{2}(\phi, [-\triangle + m^2]\,\phi) \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^D x\; \phi(x)\,[-\triangle + m^2]\,\phi(x) \end{aligned} \tag{3.28}$$

auf dem Feldraum $\{\phi : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}\}$. Die erzeugende Funktion der Greenschen Funktionen ist ein Gaußsches Integral auf dem Feldraum, nämlich

$$Z[j] = \frac{\int \mathcal{D}\phi\; \exp\left\{-\frac{1}{2}(\phi, [-\triangle + m^2]\phi) + (\phi, j)\right\}}{\int \mathcal{D}\phi\; \exp\left\{-\frac{1}{2}(\phi, [-\triangle + m^2]\phi)\right\}}. \tag{3.29}$$

In Analogie zu (2.9) ist es gegeben durch

$$Z[j] = \exp\left\{\frac{1}{2}(j, [-\triangle + m^2]^{-1} j)\right\}. \tag{3.30}$$

Der Exponent ist hier ein Ausdruck der Gestalt

$$\frac{1}{2}(j, C\,j) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^D x \int \mathrm{d}^D y\; j(x)\; C(x,y)\; j(y), \tag{3.31}$$

wobei $C(x,y)$ der sogenannte Euklidische freie Propagator ist. Er ist gegeben durch das Fourier-Integral

$$C(x,y) = \int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D}\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}}{p^2 + m^2}. \tag{3.32}$$

Tatsächlich ist $C = [-\triangle + m^2]^{-1}$, wie in (3.30) gefordert, denn es gilt

$$[-\sum_{\mu=1}^{D} \frac{\partial^2}{(\partial x^\mu)^2} + m^2] C(x,y) = \delta(x-y). \tag{3.33}$$

Dabei wirkt C als Operator durch Faltung im Ortsraum. Damit ist die folgende Operation gemeint.

$$C(f)(x) = \int \mathrm{d}^D y\; C(x,y)\; f(y). \tag{3.34}$$

Das Fourier-Integral (3.32) kann man dank der eingebauten Rotationsinvarianz sofort auf das eindimensionales Integral

$$C(x,y) = \frac{\Omega(D)}{(2\pi)^D}\, m^{D-2} \int_0^\infty \mathrm{d}p\; \frac{p^{D-1}}{p^2+1}\; \exp\{\mathrm{i}\,p\,m\,|x-y|\} \tag{3.35}$$

reduzieren, wobei $\Omega(D)$ die Oberfläche der Einheitskugel in D Dimensionen ist, explizit

$$\Omega(D) = \frac{2\,\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}. \tag{3.36}$$

Übungsaufgabe 1) Zeige die Gültigkeit der Formel (3.30) durch quadratische Ergänzung im Feldraum. 2) Verifiziere (3.33). 3) Übersetze (3.34) durch Fourier-Transformation in den Impulsraum. 4) Berechne (3.35).

3.6 Das Wicksche Theorem

Da wir über eine explizite Formel für die erzeugende Funktion der Greenschen Funktionen der freien Feldtheorie verfügen, ist es nicht erstaunlich, daß wir explizite Ausdrücke für dieselben hinschreiben können. Diese Formel wird auch Wicksches Theorem genannt. Die Greenschen Funktionen mit einer ungeradzahligen Anzahl von Argumenten verschwinden. Die anderen sind gegeben durch

$$G_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \frac{1}{2^n\, n!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{2n}} C\left(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}\right) \cdots C\left(x_{\pi(2n-1)}, x_{\pi(2n)}\right), \tag{3.37}$$

wobei über alle Permutationen der $2n$ Argumente summiert wird. Da der Propagator symmetrisch ist, und rechts in (3.37) ein symmetrisches Produkt steht, gilt

$$G_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{\{1,\ldots,2n\} = \{i_1,j_1\} \cup \cdots \cup \{i_n,j_n\}} C(x_{i_1}, x_{j_1}) \cdots C(x_{i_n}, x_{j_n}), \tag{3.38}$$

wobei wir diesmal über alle Zerlegungen der Indexmenge $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ in n paarweise disjunkte zweielementige Mengen $\{i_\alpha, j_\alpha\}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ summieren. Solche Zerlegungen nennt man Paarungen. Es ist wirklich amüsant festzustellen, daß man genau dieselbe Formel im kanonischen Zugang zur Quantenfeldtheorie bekommt, d. h. in der Operatorformulierung.

Für das freie Feld ist das Wicksche Theorem die logische Verbindung zwischen Operator- und Pfadintegralformalismus. Das Wicksche Theorem *beweist* ihre Äquivalenz. Um den Beweis hier zu führen, müßten wir an dieser Stelle die Greenschen Funktionen im Operatorformalismus ausrechnen. Das wollen wir hier allerdings nicht tun. Das Wicksche Theorem findet man in wirklich allen Lehrbüchern über Quantenfelder, beispielsweise in [8].

Das Charakteristikum der freien Feldtheorie ist, daß alle höheren Greenschen Funktionen durch die Zweipunktfunktion festgelegt sind. Allgemeiner ist dies das Kennzeichen der Korrelationsfunktionen von Gaußschen Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Übungsaufgabe 1) Zeige (3.37) durch funktionales Ableiten von (3.30). 2) Schreibe (3.38) explizit hin für den Fall $n = 1$ und $n = 2$. 3) Wieviele Paarungen gibt es in (3.38) im allgemeinen Fall?

3.7 iε-Vorschrift

Der Propagator (3.32) wird auch der Euklidische Propagator genannt. Beim Studium der Literatur werden Sie häufig dem Minkowskischen Propagator begegnen, definiert mit einer sogenannten iε-Vorschrift. Sie resultiert aus der Wick-Rotation des Euklidischen Propagators. Um diese auszurechnen, kann man die Felder wie beschrieben rotieren. Noch einfacher ist es, direkt den Propagator zu rotieren. Ersetze $t \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\, t$ in (3.32), mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} C\big((\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}t, \mathbf{x}), (0, \mathbf{0})\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}^{D-1}\mathrm{p}}{(2\pi)^{D-1}}\, \frac{\exp\left\{\mathrm{i}\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta} t + \mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}\right\}}{\omega^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}^{D-1}\mathrm{p}}{(2\pi)^{D-1}}\, \frac{\exp\left\{\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}\right\}}{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\Theta}\omega^2 + \mathbf{p}^2 + m^2}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Dabei haben wir die ω-Integrationskontur mit Hilfe des Cauchy-Theorems gedreht. Die Wick-Rotation dreht die ω-Pole in der komplexen Ebene in

$$\omega \;=\; \pm \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\, \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \tag{3.40}$$

Bei $\Theta \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-}$ rücken die Pole gegen die reelle Achse. Die Richtung aus der sie kommen berücksichtigt man durch die iε-Vorschrift. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} C\big((\mathrm{i}t, \mathbf{x}), (0, \mathbf{0})\big) &= \mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}^{D-1}\mathrm{p}}{(2\pi)^{D-1}}\, \frac{\exp\left\{\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}\right\}}{\omega^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \\ &= \mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \int \frac{\mathrm{d}^{D-1}\mathrm{p}}{(2\pi)^{D-1}}\, \frac{\exp\left\{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}\right\}}{\omega^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \\ &= \mathrm{i} \int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D}\, \frac{\exp\left\{-\mathrm{i}px\right\}}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}. \\ &= \triangle_F(x-y). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Die Formel ist als Limes $\varepsilon \to 0^+$ zu lesen. Die letzte Schönheitsoperation dient hier der Schaustellung der Lorentz-Invarianz. Der Propagator (3.41) wird auch Feynman-Propagator genannt.

Übungsaufgabe 1) Leiten Sie den Feynman-Propagator (3.41) ein zweites Mal durch Wick-Rotation des Euklidischen Pfadintegrals her. 2) Führen Sie die ω-Integration in (3.41) mit dem Residuensatz aus. Diskutieren Sie die Eigenschaften des resultierenden Ausdrucks. 3) Durchsuchen Sie die Literatur nach Aussagen über den Feynman-Propagator.

3.8 Störungstheorie

Das Wick-Theorem liefert uns explizite Ausdrücke für die Greenschen Funktionen der freien Feldtheorie.

3.8.1 Störungsreihe für $Z_g[j]$

Dies machen wir uns in der Störungsrechnung zunutze. Sei $S[\phi] = S_0[\phi] + g\,S_1[\phi]$, wobei g ein kleiner Parameter sei,

$$S_0[\phi] \;=\; \frac{1}{2}\,\big(\phi, [-\bigtriangleup + m^2]\phi\big) \tag{3.42}$$

und beispielsweise

$$S_1[\phi] \;=\; \frac{1}{4!}\int \mathrm{d}^D x\ \phi(x)^4. \tag{3.43}$$

Die Idee der Störungsrechnung ist die Berechnung der erzeugenden Funktion der Greenschen Funktionen als Potenzreihe im Parameter g. Um Platz zu sparen, schreiben wir sie als Quotient

$$Z_g[j] \;=\; \frac{\mathcal{Z}_g[j]}{\mathcal{Z}_g[0]} \tag{3.44}$$

von unnormierten (divergenten) Pfadintegralen. (Die folgenden Formeln sind als Quotienten zu lesen.) Diese entwickeln wir in Potenzreihen gemäß

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_g[j] &= \int \mathcal{D}\phi\ \exp\left\{-S_0[\phi] - g\,S_1[\phi] + (\phi, j)\right\} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-g)^r}{r!} \int \mathcal{D}\phi\ \exp\left\{-S_0[\phi] + (\phi, j)\right\}\ S_1[\phi]^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-g)^r}{r!}\ S_1\left[\frac{\delta}{\delta j}\right]^r \int \mathcal{D}\phi\ \exp\left\{-S_0[\phi] + (\phi, j)\right\} \\
&= \exp\left\{-g\ S_1\left[\frac{\delta}{\delta j}\right]\right\} \int \mathcal{D}\phi\ \exp\left\{-S_0[\phi] + (\phi, j)\right\} \\
&= \exp\left\{-g\ S_1\left[\frac{\delta}{\delta j}\right]\right\}\ \mathcal{Z}_0[j].
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Die Formeln nach der zweiten Formel habe ich Ihnen nur der Vollständigkeit halber gezeigt, da diese häufig in Lehrbüchern Verwendung finden.

3.8.2 Normierungsfaktor $Z_g[0]$

Die Störungsreihe für die normierte erzeugende Funktion bekommt man durch Einsetzen von (3.45) in (3.44). Daraus ergibt sich

$$Z_g[j] \;=\; \sum_{r=0}^{\infty} \frac{g^r}{r!} \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s}\ \frac{\partial^s}{\partial g^s}\mathcal{Z}_g[j]\bigg|_{g=0}\ \frac{\partial^{r-s}}{\partial g^{r-s}} \frac{1}{\mathcal{Z}_g[0]}\bigg|_{g=0}. \tag{3.46}$$

Da diese Formel etwas unübersichtlich aussieht, schreiben wir das explizite Resultat nur zur zweiten Ordnung hin. Man kann es mit dem folgenden MapleV-Programm berechnen. Für die Zweipunktfunktion lautet es (hoffentlich selbsterklärend)

```
ordmax:=2;
Z:=(g,j)->sum(g^ord/ord!*Z[ord,j],ord=0..ordmax);
series(Z(g,j)/Z(g,0),g,ordmax+1);
diff(",j$2);
latex(");
```

Das Ergebnis sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{d^2}{dj^2} Z_{0,j}}{Z_{0,0}} + \frac{\left(\frac{d^2}{dj^2} Z_{1,j}\right) Z_{0,0} - \left(\frac{d^2}{dj^2} Z_{0,j}\right) Z_{1,0}}{{Z_{0,0}}^2} g + \\
&\frac{\left(\frac{d^2}{dj^2} Z_{2,j}\right) {Z_{0,0}}^2 - \left(\frac{d^2}{dj^2} Z_{0,j}\right) Z_{2,0} Z_{0,0} - 2\, Z_{1,0} \left(\frac{d^2}{dj^2} Z_{1,j}\right) Z_{0,0} + 2\, \left(\frac{d^2}{dj^2} Z_{0,j}\right) {Z_{1,0}}^2}{2\, {Z_{0,0}}^3} g^2 \\
&+ O\left(g^3\right) \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

Es sieht zwar so auch nicht viel übersichtlicher aus, ist aber explizit; und könnte die Leser dazu ermutigen, sich mit Computeralgebra auseinanderzusetzen. In der Praxis rechnen die Feldtheoretiker nicht auf diese Weise. Vielmehr lernt man, daß der Normierungsfaktor sogenannte *Vakuumbeiträge* aus der Störungsreihe herauskürzt. Ich verweise auf die Vorlesung über die Quantenfeldtheorie sowie auf Lehrbücher.

3.8.3 Alternative Formeln für die Störungsreihe

Es gibt noch eine weitere Formel für das Wicksche Theorem, die sehr praktisch ist. Sei $C^{-1} = -\triangle + m^2$. (In diesem Abschnitt werden wir verwenden, daß $C = C^T$.) Aus

$$\begin{aligned}
Z_0[j] &= \frac{\int \mathcal{D}\phi\ \exp\left\{-\frac{1}{2}(\phi, C^{-1}\phi) + (\phi, j)\right\}}{\int \mathcal{D}\phi\ \exp\left\{-\frac{1}{2}(\phi, C^{-1}\phi)\right\}} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta\phi}, C\,\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\right\}\ \exp\left\{(\phi, j)\right\}\Big|_{\phi=0} \qquad (3.48)
\end{aligned}$$

folgt durch Ableitung nach j für allgemeine (polynomiale) Funktionen, daß

$$\frac{\int \mathcal{D}\phi\ \exp\left\{-\frac{1}{2}(\phi, C^{-1}\phi)\right\}\ F[\phi]}{\int \mathcal{D}\phi\ \exp\left\{-\frac{1}{2}(\phi, C^{-1}\phi)\right\}} = \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta\phi}, C\,\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\right\}\ F[\phi]\Big|_{\phi=0}. \qquad (3.49)$$

Diese Identität ist vielleicht die schönste Form des Wickschen Theorems. Ein Blick auf (3.45) liefert uns nun die folgende alternative Formel für das erzeugende Funktional

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_g[j] &= \int \mathcal{D}\phi\ \exp\left\{-S_0[\phi] - g\, S_1[\phi] + (\phi, j)\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta\phi}, C\,\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\right\}\ \exp\left\{-g\, S_1[\phi] + (\phi, j)\right\}\Big|_{\phi=0}. \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

Diese Formel kann man noch weiter umformen mit dem folgenden Replika-Trick

$$F\left[\frac{\delta}{\delta\phi}\right]\ G[\phi]\ H[\phi] \;=\; F\left[\frac{\delta}{\delta\phi_1}+\frac{\delta}{\delta\phi_2}\right]\ G[\phi_1]\ H[\phi_2]\Big|_{\phi_1=\phi_2=\phi} \tag{3.51}$$

Angewandt auf (3.50) erhalten wir mit ihm

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_g[j] \;&=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta\phi_1},C\frac{\delta}{\delta\phi_1}\right)}\ \mathrm{e}^{\left(\frac{\delta}{\delta\phi_1},C\frac{\delta}{\delta\phi_2}\right)}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta\phi_2},C\frac{\delta}{\delta\phi_2}\right)} \\ &\quad\ \mathrm{e}^{-g\,S_1[\phi_1]}\ \mathrm{e}^{(\phi_2,j)}\Big|_{\phi_1=\phi_2=0} \\ &=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(j,C\,j)}\ \mathrm{e}^{\left(j,C\frac{\delta}{\delta\phi}\right)}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta\phi},C\frac{\delta}{\delta\phi}\right)}\ \mathrm{e}^{-g\,S_1[\phi]}\Big|_{\phi=0}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Die resultierende Darstellung gefällt mir persönlich sehr gut, da sie die verschiedenen Kontraktionsmöglichkeiten des Propagators aufzeigt. Man beachte, daß

$$\mathrm{e}^{\left(j,C\frac{\delta}{\delta\phi}\right)}\ F[\phi]\Big|_{\phi=0} \;=\; F[C\,j]. \tag{3.53}$$

Die Formel (3.52) impliziert die folgende Darstellung für die erzeugende Funktion der Greenschen Funktionen

$$Z_g[j] \;=\; Z_0[j]\ \frac{\mathrm{e}^{\left(j,C\frac{\delta}{\delta\phi}\right)}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta\phi},C\frac{\delta}{\delta\phi}\right)}\ \mathrm{e}^{-g\,S_1[\phi]}\Big|_{\phi=0}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta\phi},C\frac{\delta}{\delta\phi}\right)}\ \mathrm{e}^{-g\,S_1[\phi]}\Big|_{\phi=0}}. \tag{3.54}$$

Um den geneigten Leser davon zu überzeugen, daß die Anzahl Formeln für dasselbe Ding unendlich ist, wollen wir abschließend auch diese Darstellung noch weiter umschreiben. Bekanntlich gilt

$$\mathrm{e}^{A} \;=\; 1+\int_0^1 \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{e}^{\alpha\,A}\ A. \tag{3.55}$$

Daraus folgt

$$\frac{Z_g[j]}{Z_0[j]} \;=\; 1+\int_0^1 \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{e}^{\alpha\left(j,C\,\frac{\delta}{\delta\phi}\right)}\ \left(j,C\,\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\ \ln\left\{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta\phi},C\,\frac{\delta}{\delta\phi}\right)}\ \mathrm{e}^{-g\,S_1[\phi]}\right\}\Big|_{\phi=0} \tag{3.56}$$

Übungsaufgabe 1) Zeige (3.48) durch Ausrechnen der Greenschen Funktionen. 2) Wie lautet die analoge Formel für endlich dimensionale Gaußsche Maße?

3.8.4 Effektive Wechselwirkung

Es scheint mir natürlich zu sein, der in den obigen Formeln auftauchenden Größe in der Form

$$\mathrm{e}^{\left(j, C\frac{\delta}{\delta\phi}\right)}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta\phi}, C\frac{\delta}{\delta\phi}\right)}\ \mathrm{e}^{-g\,S_1[\phi]}\Big|_{\phi=0} \;=\; \mathrm{e}^{-U_g[C\,j]} \tag{3.57}$$

zu schreiben und $U_g[C\,j]$ die effektive Wechselwirkung zu nennen. Mit dem Terminus *effektiv* ist dabei die Einbeziehung aller Quantenkorrekturen gemeint. Solange wir diese nicht anderweitig ausrechnen können, handelt es sich hierbei allerdings nur um eine Umbenennung. Die erzeugende Funktion bekommt nun die finale Form

$$Z_g[j] \;=\; Z_0[j]\ \exp\left\{-U_g[C\,j] + U_g[0]\right\}. \tag{3.58}$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß die effektive Wechselwirkung ihrerseits eine erzeugende Funktion ist, nämlich für die sogenannten C-amputierten zusammenhängenden Greenschen Funktionen.

3.9 Störungsrechnung erster Ordnung

Diese vielen Formeln sind alle gleichwertig, wenn man zu konkreten Rechnungen ansetzt. Wir wollen exemplarisch die erste Ordnung Störungstheorie für eine n-Punktfunktion anschauen. Um den bisherigen Schreibweisen noch eine weitere Notation hinzuzufügen, schreiben wir die Greenschen Funktionen hier in der Form

$$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_g \;=\; \frac{\int\mathcal{D}\phi\ \mathrm{e}^{-S_0[\phi]-g\,S_g[\phi]}\ \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)}{\int\mathcal{D}\phi\ \mathrm{e}^{-S_0[\phi]-g\,S_1[\phi]}}. \tag{3.59}$$

Zur ersten Ordnung in g entwickelt man diesen Ausdruck wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_g \;= \\
&= \frac{\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_0 - \frac{g}{4!}\int\mathrm{d}^D y\ \left\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\phi(y)^4\right\rangle_0 + O(g^2)}{1-\frac{g}{4!}\int\mathrm{d}^D y\ \langle\phi(y)^4\rangle_0 + O(g^2)} \\
&= \langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_0 - \frac{g}{4!}\int\mathrm{d}^D y\ \Big\{\left\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\phi(y)^4\right\rangle_0 \\
&\quad - \langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_0\ \left\langle\phi(y)^4\right\rangle_0\Big\} + O(g^2) \\
&= \langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_0 - \frac{g}{4!}\int\mathrm{d}^D y\ \left\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n);\phi(y)^4\right\rangle_0^{\mathrm{t}} \\
&\quad + O(g^2).
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Der Inhalt der geschweiften Klammer definiert die nachfolgende *trunkierte* Korrelationsfunktion.

Übungsaufgabe Entwickeln Sie das Pendant zu (3.60) in der zweiten Ordnung g^2.

3.9.1 Pointsplitting

Um die Störungsreihe auszurechnen und keine Fehler zu machen, ist es vorteilhaft die ϕ^4-Wechselwirkung durch Pointsplitting in der folgenden Weise zu schreiben

$$\begin{aligned} &\left\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\phi(y)^4\right\rangle_0 = \\ \lim_{z_1,z_2,z_3,z_4\to y} &\left\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\phi(z_1)\phi(z_2)\phi(z_3)\phi(z_4)\right\rangle_0 . \end{aligned} \tag{3.61}$$

Spätestens hier wird man feststellen, daß Physik eine schweißtreibende Beschäftigung sein kann, wenn man mechanisch voranschreitet. Glücklicherweise hat Feynman für uns nachgedacht und eine geschickte Darstellung der auftretenden Terme in Diagrammform erfunden. Statt das Wicksche Theorem bis zum Exzess durchzukoffern, schreibt man in ihr die Gaußschen Erwartungswerte als Summe über Feynman-Graphen. Man sollte aber wenigstens einmal die niedrigste Ordnung von Hand durchgerechnet haben, bevor man für den Rest seines Lebens die Feynman-Graphen benutzt.

Pointsplitting hat auch noch eine weitere Funktion: die Regularisierung von UV-Divergenzen. Wir sind hier noch nicht soweit vorgedrungen, um dieses Problem anzugehen.

3.9.2 Zweipunktfunktion

Als einfachstes Beispiel schauen wir uns den Fall $n = 2$ an. Man nehme (3.61) und pointsplitte. Man drücke die Erwartungswerte durch das Wicksche Theorem aus. Man setze anschließend die zusammenfallenden Punkte wieder gleich. Dann ergibt sich

$$\left\langle \phi(x_1)\phi(x_2);\phi(y)^4\right\rangle_0^{\mathrm{t}} \;=\; 12\, C(x_1,y)\; C(x_2,y)\; C(y,y). \tag{3.62}$$

Die gesamte Anzahl Terme nach Pointsplitting muß nach dem Wickschen Theorem gleich

$$\frac{6!}{3!\,2^3} - \frac{4!}{2!\,2^2} \;=\; 15-3 \;=\; 12 \tag{3.63}$$

sein. Die Differenz ergibt sich durch die Trunkation. Da alle verbleibenden Terme am Ende dengleichen Beitrag geben, folgt die Gleichung (3.62). Eingesetzt in (3.60) erhalten wir nun unsere erste Störungsreihe

$$\left\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\right\rangle_g \;=\; C(x_1,x_2) - \frac{g}{2}\int \mathrm{d}^D y\; C(x_1,y)\; C(x_2,y)\; C(y,y) + O(g^2). \tag{3.64}$$

Übungsaufgabe Zeige (3.62) durch explizites Nachrechnen.

3.9.3 UV-Divergenz

Wir wollen nicht verheimlichen, daß der Ausdruck (3.64) ein Problem birgt, das den Vätern der Quantenfeldtheorie zwei Jahrzehnte Kopfschmerzen bereitet hat, und das eigentlich erst in den letzten zwanzig Jahren eine wirklich befriedigende Lösung erhalten hat (mit der Renormierungsgruppe von Wilson [63]). Gl. (3.32) liefert uns

$$C(y, y) \;=\; \int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D} \, \frac{1}{p^2 + m^2}. \tag{3.65}$$

Für große Impulse verhält sich der Integrand nach Impulszählung gemäß $|p|^{D-3}$. Das bedeutet

$$\int_{|p| \leq \Lambda} \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D} \, \frac{1}{p^2 + m^2} \sim \begin{cases} \Lambda^2 & D = 4 \\ \Lambda & D = 3 \\ \log(\Lambda) & D = 2 \end{cases} \tag{3.66}$$

Unser schöner Ausdruck erster Ordnung ist daher schlicht unendlich und somit unbrauchbar. Ein zweites Problem deutet sich auch schon am Horizont an. Für $m = 0$ ist der Integrand bei Null singulär. Diese Problem ist hier nicht so ernst, da die Singularität in drei und vier Dimensionen integrabel ist. In zwei Dimensionen gibt es ein ernstes Problem.

Die Vorstellung einer zweidimensionalen Theorie mag dem Leser zunächst absurd erscheinen. Tatsächlich spielen solche Theorien aber in der modernen Physik eine sehr wichtige Rolle. Die angedeutete Infrarotsingularität ist dort eines der Hindernisse für eine Pfadintegralbeschreibung.

3.10 Schwinger-Dyson-Gleichung

Es gibt noch eine weitere Weise, dieselbe Störungstheorie zu entwickeln, über die Schwinger-Dyson-Gleichung. Leider haben wir hier nicht die Raum-Zeit auf sie einzugehen. Ich möchte Sie daher auf die Literatur verweisen. Das Programm der Schwinger-Dyson-Gleichung ist, nicht-lineare Gleichungen für die ganze Hierarchie der Greenschen Funktionen, b.z.w. engen Verwandten, den sogenannten Vertexfunktionen, iterativ zu lösen. An unserem Institut arbeitet Prof. Stingl an selbstkonsistenten nicht-perturbativen Ansätzen für solche Gleichungssysteme [56].

Eine besonders interessante Idee ist es, solche Gleichungssysteme direkt für die renormierten Greenschen Funktionen aufzustellen. Dieses Programm hat Symanzik untersucht. Siehe [43] und die darin genannte Literatur.

3.11 Literatur- und Lesehinweise

Der Stoff dieser Vorlesung ist wiederum klassisch und findet sich praktisch überall, außer vielleicht die Extraformeln für die formale Störungsreihe. Eine gelungene Darstellung ist z. B. [1]. Ein ganz neues Buch, das mir sehr brauchbar erscheint, ist [37]. Zu den Divergenzen schlage man bei [8] nach, um sachkundige Hilfe zu bekommen. Bitte erschrecken Sie nicht angesichts der Tatsache, daß eine auftretende Größe sich als unendlich heraustellt. Wir werden sehen, daß der skizzierte Formalismus sich für die QED als sehr tragfähig erweisen wird. Um der Störungstheorie Sinn zu verleihen, muß man die Theorie *regularisieren*. Eine Möglichkeit ist, in Umkehrung unserer Argumentation die Raum-Zeit durch ein Gitter zu ersetzen. Siehe dazu [45].

4 Holomorphe Darstellung

In diesem Kapitel wollen wir eine weitere Form des Pfadintegrals besprechen, die holomorphe Darstellung genannt wird. Sie basiert auf der Darstellung quantenmechanischer Größen mit Hilfe von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und deren Eigenzuständen. Diese Eigenzustände heißen kohärente Zustände und werden ihrerseits aus dem Grundzustand durch sogenannte Vertexoperatoren erzeugt. Da die kanonische Quantisierung von Wellenfeldern auf Auf- und Absteigeoperatoren basiert, siehe [7], ist die holomorphe Darstellung in natürlicher Weise auf die Feldtheorie übertragbar. In der holomorphen Darstellung lassen sich z. B. die LSZ-Reduktionsformeln in eleganter Pfadintegral-Weise herleiten [16]. Unsere Motivation für dieses Kapitel ist, daß die holomorphe Darstellung für das Pfadintegral für Bosonen und Fermionen eine augenfällige Parallele aufweist, die es zu lernen lohnt.

4.1 Bosonische Oszillatoralgebra

Betrachten wir eine eindimensionale Quantenmechanik, um die Formeln möglichst einfach gestalten zu können. Definiere aus Q und P durch Linearkombination (Drehung) einen Aufsteigeoperator $A^\star$ und einen Absteigeoperator A durch

$$A \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(Q+\mathrm{i}P)\,, \qquad A^\star \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(Q-\mathrm{i}P)\,. \tag{4.1}$$

Aus der Vertauschungsrelation $[Q,P] \;=\; \mathrm{i}$ folgt die Kommutatorbeziehung

$$[A,A^\star] \;=\; 1, \qquad [A,A] \;=\; [A^\star,A^\star] \;=\; 0. \tag{4.2}$$

Diese Algebra nennt man auch die (eindimensionale) Heisenberg-Algebra. Sie ist uns vom harmonischen Oszillator wohlvertraut.

4.1.1 Fockraum

Für die Heisenberg-Algebra läßt sich die folgende ∞-dimensionale Darstellung konstruieren, ein Modul tiefsten Gewichts, die uns ebenfalls wohlvertraut ist. Man nennt sie auch Fockraum-Darstellung. Wir postulieren zunächst einen Grundzustand durch

$$A|0\rangle \;=\; 0, \qquad \langle 0|0\rangle \;=\; 1. \tag{4.3}$$

Aus dem Grundzustand erreichen wir durch Anwendung des Erzeugungsoperators $A^\star$ neue (angeregte) Zustände. Sie sind gegeben durch

$$|n\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{n!}}\,(A^\star)^n|0\rangle, \qquad \langle n|m\rangle \;=\; \delta_{n,m}. \tag{4.4}$$

Die Zustände sind per Konstruktion Eigenzustände des Anzahl- oder Gewichtsoperators $A^\star A$. Es gilt nämlich

$$A^\star A|n\rangle \;=\; n\,|n\rangle, \tag{4.5}$$

was leicht zu zeigen ist. Eine nützliche Vertauschungsrelationen dafür ist

$$[A,(A^\star)^n] \;=\; n\,(A^\star)^{n-1}. \tag{4.6}$$

Um die übliche Terminologie zu vervollständigen, führen wir hier noch normalgeordnete Produkte durch

$$:A^\sharp\cdots A^\sharp: \;=\; (A^\star)^n\;A^m \tag{4.7}$$

ein. Dabei bezeichnet n die Anzahl von Erzeugungsoperatoren zwischen den Doppelpunkten und m die Anzahl Vernichtungsoperatoren. Normalordnung sortiert mit anderen Worten die Vernichtungsoperatoren nach rechts und die Erzeugungsoperatoren nach links.

4.1.2 Kohärente Zustände

Die holomorphe Darstellung besteht aus Eigenzuständen des Vernichtungsoperators A. Sie lassen sich wie folgt konstruieren. Dazu definieren wir sogenannte Vertexoperatoren $V(\bar{z})$ und $V^\star(z)$, wobei $z = x + \mathrm{i}y$ eine komplexe Variable ist, und $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ ihre komplex konjugierte Größe ist, durch

$$V(\bar{z}) \;=\; \exp\left(\bar{z}\,A\right), \qquad V^\star(z) \;=\; \exp\left(z\,A^\star\right). \tag{4.8}$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß die Vertexoperatoren die folgende Vertauschungsrelation besitzen

$$V(\bar{z})\;V^\star(w) \;=\; V^\star(w)\;V(\bar{z})\;\exp\left(\bar{z}\,w\right). \tag{4.9}$$

Durch Anwendung von Vertexoperatoren erzeugt man aus dem Grundzustand die sogenannten kohärenten Zustände

$$|z\rangle \;=\; V^\star(z)\;|0\rangle. \tag{4.10}$$

Ihre wichtigste Eigenschaft besteht darin, die Eigenwertgleichung

$$A|z\rangle \;=\; [A,\exp\left(z\,A^\star\right)]\,|0\rangle \;=\; z\,|z\rangle. \tag{4.11}$$

zu erfüllen. Wenn man sich in Erinnerung ruft, daß die Bedeutung von A die ist, ein Quantum zu vernichten, sind die kohärenten Zustände bemerkenswerte Größen. Es ist klar, daß sie nicht Zustände mit einer definierten Anzahl von Quanten sein können. Aus der Vertauschungsrelation (4.9) folgt, daß kohärenten Zustände nicht aufeinander orthogonal sind. Ihr Skalarprodukt ist gegeben durch

$$\langle z|w\rangle \;=\; \exp\left(\bar z\, w\right). \tag{4.12}$$

Wohl aber bilden die kohärenten Zustände ein vollständiges System. Aufgrund der Matrixelemente

$$\langle n|z\rangle \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}\; \langle n\,|(A^\star)^m|\,0\rangle \;=\; \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \tag{4.13}$$

schließt man nämlich, daß [1]

$$\begin{aligned} \langle n|m\rangle \;&=\; \int \frac{\mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}}\; \exp\left(-\bar z\, z\right)\; \langle n|z\rangle\; \langle z|m\rangle \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{n!\,m!}} \int_0^\infty \mathrm{d}(r^2)\; \exp\left(-r^2\right)\; r^{n+m} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\; \exp\left(\mathrm{i}(n-m)\right) \\ &=\; \delta_{n,m}\, \frac{\Gamma(n+1)}{n!}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

wie es sich gehört. Der Einsoperator besitzt somit die folgende schöne Darstellung

$$\int \frac{\mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}}\; \exp\left(-\bar z\, z\right)\; |z\rangle\langle z| \;=\; 1, \tag{4.15}$$

ausgedrückt durch kohärente Zustände.

Die Bezeichnung holomorphe Darstellung bekommt ihre Berechtigung, sobald man realisiert, daß die Wellenfunktion

$$\langle z|\psi\rangle \;=\; \langle 0\,|\exp\left(\bar z\, A\right)|\,\psi\rangle \;=\; \psi(\bar z) \tag{4.16}$$

die beiden Gleichungen

$$\langle z\,|A|\,\psi\rangle \;=\; \frac{\partial}{\partial \bar z}\; \langle 0\,|\exp\left(\bar z\, A\right)|\,\psi\rangle \;=\; \frac{\partial}{\partial \bar z}\, \psi(\bar z) \tag{4.17}$$

und

$$\langle z\,|A^\star|\,\psi\rangle \;=\; \langle 0\,|[\exp\left(\bar z\, A\right), A^\star]|\,\psi\rangle \;=\; \bar z\, \langle 0\,|\exp\left(\bar z\, A\right)|\,\psi\rangle \;=\; \bar z \psi(\bar z) \tag{4.18}$$

erfüllt.

Übungsaufgabe Wie lautet das Skalarprodukt zweier Wellenfunktionen (4.16)?

---

[1] $\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{d}\bar z \wedge \mathrm{d}z \;=\; \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$

4.1.3 Bosonisches Pfadintegral

Als nächstes postulieren wir einen Hamilton-Operator, den wir normalgeordnet schreiben, durch

$$H(A^\star, A) \; = : h(A^\star, A) : \tag{4.19}$$

Dabei sei $h(a^\star, a)$ die klassische Hamilton-Funktion. Die normalgeordnete Form hat den Vorzug, daß für sie die schöne Gleichung

$$\langle z\,|: h(A^\star, A) :|\, w\rangle \;=\; h(\bar{z}, w)\; \langle z|w\rangle . \tag{4.20}$$

gilt. Der Zeitentwicklungsoperator dieses Systems ist bei Euklidischer Zeit gegeben durch

$$U(t) \;=\; \exp\left(-t\; : h(A^\star, A) :\right). \tag{4.21}$$

In Anbetracht von (4.20) besteht das dynamische Problem in der holomorphen Darstellung darin, den exponentierten Hamilton-Operator normalzuordnen. Eine interessante Formel in diesem Zusammenhang ist

$$\begin{aligned} : \exp\left(-t\, A^\star A\right) : |n\rangle \;&=\; \sum_{m=0}^{n} \frac{(-t)^m}{m!} : (A^\star A)^m : |n\rangle \\ &=\; \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (-t)^m |n\rangle \\ &=\; (1-t)^n |n\rangle . \end{aligned} \tag{4.22}$$

Insbesonders haben wir daher eine explizite Darstellung für den Projektor auf den Grundzustand, nämlich

$$|0\rangle\langle 0| \; = : \exp\left(-A^\star A\right) : . \tag{4.23}$$

Um eine Pfadintegraldarstellung für den Zeitentwicklungsoperator zu bekommen, zerstücken wir das Zeitintervall wieder in n Teile und lassen anschließend n nach unendlich gehen. Es gilt dann die Pfadintegralformel

$$
\begin{aligned}
&\left\langle z\left|\exp\left(-t\ :h(A^\star,A):\right)\right|z'\right\rangle \ = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\langle z\left|\left\{\exp\left(-\frac{t}{n}\ :h(A^\star,A):\right)\right\}^n\right|z'\right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty}\int\prod_{m=1}^{n-1}\left\{\frac{\mathrm{d}^2 z_m}{\pi}\ \exp\left(-\bar z_m\, z_m\right)\right\} \\
&\qquad \prod_{m=1}^{n}\left\langle z_m\left|\exp\left(-\frac{t}{n}\ :h(A^\star,A):\right)\right|z_{m-1}\right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty}\int\prod_{m=1}^{n-1}\left\{\frac{\mathrm{d}^2 z_m}{\pi}\ \exp\left(-\bar z_m\, z_m\right)\right\} \\
&\qquad \prod_{m=1}^{n}\left\{\exp\left(-\frac{t}{n}\,h(\bar z_m, z_{m-1})\right)\ \langle z_m|z_{m-1}\rangle\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\int\prod_{m=1}^{n-1}\frac{\mathrm{d}^2 z_m}{\pi}\ \exp\left(-\sum_{m=1}^{n-1}|z_m|^2+\sum_{m=1}^{n}\bar z_m z_{m-1}\right) \\
&\qquad \exp\left(-\frac{t}{n}\sum_{m=1}^{n}h(\bar z_m, z_{m-1}).\right)
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Den Extraterm im Exponential kann man nach einer kurzen Überlegung in der folgenden Weise schreiben

$$
\begin{aligned}
-\sum_{m=1}^{n-1}|z_m|^2+\sum_{m=1}^{n}\bar z_m z_{m-1} \quad &= \quad \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1}\left\{(\bar z_{m+1}-\bar z_m)\, z_m-\bar z_m(z_m-z_{m-1})\right\} \\
&\quad +\frac{1}{2}(\bar z_n z_{n-1}+\bar z_0 z_0).
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Im Grenzwert $n\to\infty$ erhalten wir deshalb die Pfadintegraldarstellung

$$
\begin{aligned}
\left\langle z\left|U(t)\right|z'\right\rangle \quad = \quad &\int_{z(0)=z'}^{\bar z(t)=\bar z}\left[\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\right]\ \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}s\ \left(\dot{\bar z}(s)\, z(s)-\bar z(s)\,\dot z(s)\right)\right\} \\
&\exp\left\{-\int_0^t \mathrm{d}s\ h(\bar z(s), z(s))\right\}\ \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\bar z\ z(t)+\bar z(0)\ z'\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Man kann diese Formel auch durch eine Variablentransformation aus dem Phasenraumpfadintegral, das wir nicht behandelt haben, direkt herleiten. Eine Besonderheit des holomorphen Pfadintegrals sind die Zeitableitungen erster Ordnung und die gemischten Randbedingungen.

Übungsaufgabe 1) Schreiben Sie den Hamilton-Operator des anharmonischen Oszillators in der Form (4.19). 2) Beweisen Sie (4.20) für das normalgeordnete Monom $(A^\star)^n A^m$. 3) Diskutieren Sie (4.22). 4) Führen Sie im holomorphen Pfadintegral (4.26) eine Wick-Rotation zur Minkowski-Zeit durch. 5) Normalordnung definiert eine Operatorordnung für den Übergang von der klassischen Hamilton-Funktion zum Hamilton-Operator. Wie übersetzt man diese in eine Regel für die Reihenfolge von P und Q?

4.2 Fermionische Oszillatoralgebra

Wir betrachten wiederum ein eindimensionales System. Diesmal postulieren wir einen Erzeugungsoperator $A^\star$ und einen Vernichtungsoperator A mit den *Antikommutatorrelationen*

$$\{A, A^\star\} \;=\; A\,A^\star + A^\star A \;=\; 1, \qquad \{A, A\} \;=\; \{A^\star, A^\star\} \;=\; 0. \tag{4.27}$$

In der kanonischen Quantisierung werden für Fermionen nämlich Antikommutatoren postuliert. (4.27) beschreibt einem Fermionischen Freiheitsgrad. In der Feldtheorie werden wir es später mit unendlich vielen solchen zu tun bekommen. Zunächst wollen wir aber einen einzelnen Freiheitsgrad betrachten.

4.2.1 Fermionischer Fockraum

Die Algebra (4.27) besitzt die folgende zweidimensionale Darstellung. Sie ist gegeben durch einen unbesetzten Grundzustand

$$A|0\rangle \;=\; 0, \qquad \langle 0|0\rangle \;=1 \tag{4.28}$$

und einen einfach besetzten angeregten Zustand

$$|1\rangle \;=\; A^\star|0\rangle, \qquad \langle 1|1\rangle \;=\; 1. \tag{4.29}$$

Ein beliebiger Zustand besitzt somit die Zerlegung

$$|f\rangle \;=\; f_0|0\rangle + f_1|1\rangle, \tag{4.30}$$

und ist gegeben durch zwei komplexe Zahlen f_0 und f_1. Die Tatsache, daß Fermionische Zustände nur unbesetzt oder einfach besetzt sind, ist uns als das Paulische Ausschließungsprinzip aus der Quantenmechanik geläufig. Hier ist dieses Prinzip die unmittelbare Folge der Algebra (4.27).

Übungsaufgabe Geben Sie die Matrixdarstellung der Operatoren $A^\star$ und A in dieser Basis an.

4.2.2 Grassmann-Algebra

Die kohärenten Zustände werden im Fermionischen Fall als Zustände mit Koeffizienten in einer Grassmann-Algebra konstruiert. Das geht wie folgt. Die Grassmann-Algebra ist dabei zunächst eine Algebra, die durch zwei Elemente Θ und $\bar{\Theta}$ erzeugt wird, mit den Relationen

$$\{\Theta, \Theta\} \;=\; \{\Theta, \bar{\Theta}\} \;=\; \{\bar{\Theta}, \bar{\Theta}\} \;=\; 0. \tag{4.31}$$

Ein allgemeines Element dieser Grassmann-Algebra ist ein Ausdruck der Form

$$f \;=\; f_{00} + f_{10}\bar{\Theta} + f_{01}\Theta + f_{11}\bar{\Theta}\Theta, \tag{4.32}$$

wobei wir konventionsgemäß der Algebra eine eins zufügen mit den offensichtlichen Eigenschaften. Dieses Objekt ergänzen wir noch durch zwei Operationen, die Grassmann-Ableitung und die Grassmann-Integration, die tatsächlich identisch sind. Sie sind definiert durch

$$\frac{\partial}{\partial\Theta}1 \;=\; \frac{\partial}{\partial\Theta}\bar{\Theta} \;=\; 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\Theta}\Theta \;=\; 1, \tag{4.33}$$

sowie

$$\int \mathrm{d}\Theta\, 1 \;=\; \int \mathrm{d}\Theta\, \bar{\Theta} \;=\; 0, \qquad \int \mathrm{d}\Theta\, \Theta \;=\; 1. \tag{4.34}$$

Nach einer kurzen Eingewöhnungsphase kann man mit diesen Objekten leicht rechnen. Es gilt beispielsweise für (4.32)

$$\int \mathrm{d}\Theta \mathrm{d}\bar{\Theta}\, f \;=\; f_{11}. \tag{4.35}$$

Für detailliertere Informationen über Grassmann-Variablen möchte ich Sie an dieser Stelle auf die Lehrbuchliteratur verweisen. Im nächsten Kapitel werden wir zu dieser Frage zurückkommen.

4.2.3 Kohärente Zustände

Analog zum Bosonischen Fall konstruieren wir aus dem obigen Fundus Fermionische Vertexoperatoren

$$V(\bar{\Theta}) \;=\; \exp\left(\bar{\Theta}\, A\right) \;=\; 1 + \bar{\Theta}\, A \tag{4.36}$$

und

$$V^\star(\Theta) \;=\; \exp\left(\Theta\, A^\star\right) \;=\; 1 + \Theta\, A^\star, \tag{4.37}$$

wobei Grassmann-Erzeuger und Fermionische Operatoren miteinander kommutieren sollen. Die Fermionischen Vertexoperatoren genügen einer Vertauschungsregel, die der Bosonischen Entsprechung zur Verwechslung ähnlich sieht. Sie lautet

$$V(\bar{\Theta})\, V^{\star}(\eta) \;=\; V^{\star}(\eta)\, V(\bar{\Theta})\; \exp\left(\bar{\Theta}\,\eta\right). \tag{4.38}$$

Dabei fordern wir Antivertauschungsregeln zwischen allen Erzeugern $\Theta^{\sharp}$ und $\eta^{\sharp}$. Die Beziehung (4.38) gilt auf dieser verdoppelten Grassmann-Algebra. In vollständiger Analogie zum Bosonischen Fall können wir daraus kohärente Zustände bilden. Sie sind gegeben durch

$$|\Theta\rangle \;=\; V^{\star}(\Theta)|0\rangle \;=\; |0\rangle + \Theta|1\rangle. \tag{4.39}$$

Wie im Bosonischen Fall sind diese Fermionischen kohärenten Zustände Eigenzustände des Vernichtungsoperators, denn

$$A|\Theta\rangle \;=\; A\,\Theta\,|1\rangle \;=\; \Theta\,|0\rangle \;=\; \Theta\,(1+\Theta\,A^{\star})|0\rangle \;=\; \Theta|\Theta\rangle. \tag{4.40}$$

Im Einklang mit dem Bosonischen Fall sind die Fermionischen kohärenten Zustände nicht aufeinander orthogonal. Es gilt nämlich wiederum

$$\langle\Theta|\eta\rangle \;=\; 1+\bar{\Theta}\,\eta \;=\; \exp\left(\bar{\Theta}\,\eta\right). \tag{4.41}$$

Wiederum aber sind sie im folgenden Sinne vollständig. Das Skalarprodukt zweier allgemeiner Fermionischer Zustände (4.30) berechnet sich zu

$$\langle f|g\rangle \;=\; \bar{f}_0 g_0 + \bar{f}_1 g_1. \tag{4.42}$$

Es gilt nun die folgende Fermionische Vollständigkeitsrelation

$$\langle f|g\rangle \;=\; \int \mathrm{d}\bar{\Theta}\mathrm{d}\Theta\; \exp\left(-\bar{\Theta}\Theta\right)\; \langle f|\Theta\rangle\,\langle\Theta|g\rangle. \tag{4.43}$$

Dabei ist

$$\langle\Theta|f\rangle \;=\; f_0 + f_1\bar{\Theta} \tag{4.44}$$

sozusagen eine (anti-holomorphe) Wellenfunktion mit Werten in der Grassmann-Algebra.

Übungsaufgabe 1) Zeige (4.38). 2) Zeige (4.41). 3) Verifizieren Sie (4.44).

4.2.4 Operatoren und ihre Symbole

Ein allgemeiner normalgeordneter Operator auf dem Fermionischen Fockraum ist ein Ausdruck der Gestalt

$$: h(A^\star, A) : = \; h_{00} + h_{10} A^\star + h_{01} A + h_{11} A^\star A. \tag{4.45}$$

Man nennt den dazugehörigen Ausdruck

$$h(a^\star, a) \; = \; h_{00} + h_{10} a^\star + h_{01} a + h_{11} a^\star a. \tag{4.46}$$

das Symbol desselben. Der einfache Grund für diese scheinbar umständliche Begriffsbildung ist, daß gilt

$$\langle \Theta \,|: h(A^\star, A) :|\, \eta \rangle \; = \; h(\bar{\Theta}, \eta) \; \exp\left(\bar{\Theta}\, \eta\right). \tag{4.47}$$

Dabei ist auf die Ordnung der Grassmann-Variablen im Symbol achtzugeben. Wie im Bosonischen Fall ist der Projektor auf den Grundzustand gegeben durch

$$|0\rangle\langle 0| \; = : \exp\left(-A^\star A\right) :, \tag{4.48}$$

denn es gilt

$$: \exp\left(-A^\star A\right) : = \; 1 - A^\star A. \tag{4.49}$$

Normalordung für Fermionen ist definiert durch

$$: A^\star A := \; A^\star A, \qquad : A\, A^\star : = \; -A^\star A. \tag{4.50}$$

Nach diesen Fingerübungen sind wir soweit, in Analogie zum Bosonischen Fall ein erstes Fermionisches Pfadintegral zu erstellen.

Übungsaufgabe 1) Zeige (4.47).

4.2.5 Fermionisches Pfadintegral

Wir postulieren die Dynamik des Systems wiederum durch einen Hamilton-Operator der normalgeordneten Gestalt (4.48). In Analogie zum Bosonischen

Pfadintegral gilt nun

$$
\begin{aligned}
&\langle \Theta \left| \exp\left(-t\ : h(A^\star, A) :\right) \right| \eta \rangle \ = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle \Theta \left| \left\{ \exp\left(-\frac{t}{n}\ : h(A^\star, A) : \right) \right\}^n \right| \eta \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \prod_{m=1}^{n-1} \left\{ \mathrm{d}\bar{\Theta}_m \mathrm{d}\Theta_m\ \exp\left(-\bar{\Theta}_m \Theta_m\right) \right\} \\
&\quad \prod_{m=1}^{n} \left\langle \Theta_m \left| \exp\left(-\frac{t}{n}\ : h(A^\star, A) : \right) \right| \Theta_{m-1} \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \prod_{m=1}^{n-1} \left\{ \mathrm{d}\bar{\Theta}_m \mathrm{d}\Theta_m\ \exp\left(-\bar{\Theta}_m \Theta_m\right) \right\} \\
&\quad \prod_{m=1}^{n} \left\{ \exp\left(-\frac{t}{n}\, h(\bar{\Theta}_m, \Theta_{m-1}) \right)\ \exp\left(\bar{\Theta}_m\, \Theta_{m-1} \right) \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \prod_{m=1}^{n-1} (\mathrm{d}\bar{\Theta}_m \mathrm{d}\Theta_m)\ \exp\left(-\sum_{m=1}^{n-1} \bar{\Theta}_m \Theta_m + \sum_{m=1}^{n} \bar{\Theta}_m \Theta_{m-1} \right) \\
&\quad \exp\left(-\frac{t}{n} \sum_{m=1}^{n} h(\bar{\Theta}_m, \Theta_{m-1}) \right). \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ wird hieraus das Pfadintegral

$$
\begin{aligned}
&\langle \Theta \left| \exp\left(-t\ : h(A^\star, A) :\right) \right| \eta \rangle \ = \\
&= \int_{\Theta(0)=\eta}^{\bar{\Theta}(t)=\bar{\Theta}} \left[\mathrm{d}\bar{\Theta}\, \mathrm{d}\Theta\right]\ \exp\left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{d}s\ \left(\dot{\bar{\Theta}}(s)\Theta(s) - \bar{\Theta}(s)\dot{\Theta}(s) \right) \right\} \\
&\quad \exp\left(-\int_0^t \mathrm{d}s\ h(\bar{\Theta}(s), \Theta(s)) \right)\ \exp\left\{ \frac{1}{2} \left(\bar{\Theta}\ \Theta(t) - \bar{\Theta}(0)\ \eta \right) \right\}. \qquad (4.52)
\end{aligned}
$$

Man kann sich in diesem eindimensionalen System zu Recht fragen, warum wir ein derartiges Geschütz auffahren, um die Zeitentwicklung in einem zweidimensionalen Hilbertraum umzuschreiben. Die Formel (4.52) besitzt eine direkte Verallgemeinerung auf die Quantenfeldtheorie. In der QED ist die Fermion-Wirkung nämlich ebenfalls quadratisch und von dieser Gestalt.

Übungsaufgabe Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Fermionischen harmonischen Operators.

4.3 Literaturhinweise

Eine sehr interessante verwandte Sichtweise, die jedoch auf der Q-P-Beschreibung beruht, findet man in [61, Kap. 9.5]. (Studieren Sie dieses Kapitel!) Die grundlegende Referenz für das hier präsentierte Material ist [16].

Eine isomorphe Darlegung der Dinge findet man in [31]. Siehe auch alle weiteren aufgeführten und nicht aufgeführten Lehrbücher. Wenn Ihnen noch eine Quelle auffällt, die Ihnen besonders klar erscheint, und die ich nicht im Literaturverzeichnis erwähne, bitte ich um Benachrichtigung.

5 Grassmann Variablen

Fermionen beschreibt man im Pfadintegralformalismus mit Hilfe von Grassmann Variablen. In dieser Vorlesung werden wir uns ausführlich mit diesen seltsamen Größen beschäftigen.

5.1 Grassmann Algebra

Sei $\mathfrak{A}(\Theta_1, \ldots, \Theta_{2n})$ die reelle oder komplexe Algebra, die durch die Symbole $\Theta_1, \ldots, \Theta_{2n}$ generiert wird, mit den Antivertauschungsrelationen

$$\{\Theta_\alpha, \Theta_\beta\} \;=\; \Theta_\alpha\Theta_\beta + \Theta_\beta\Theta_\alpha \;=\; 0. \tag{5.1}$$

Wir wollen der Algebra noch eine eins gönnen, die mit den anderen Generatoren vertauschen soll. Elemente dieser Algebra sind Ausdrücke der Form

$$Z(\Theta) \;=\; \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k=1}^{2n} Z_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\; \Theta_{\alpha_1} \cdots \Theta_{\alpha_k}, \tag{5.2}$$

wobei die Koeffizienten $Z_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ reell- oder komplexwertige *anti-symmetrische* Funktionen der Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sind. Eine alternative Form der Formel (5.2) ist

$$Z(\Theta) \;=\; \sum_{k=1}^{2n} \sum_{1\le\alpha_1<\ldots<\alpha_k\le 2n} Z_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\; \Theta_{\alpha_1} \cdots \Theta_{\alpha_k}. \tag{5.3}$$

Übungsaufgabe Bestimmen sie die Dimension von $\mathfrak{A}(\Theta_1, \ldots, \Theta_{2n})$ als Vektorraum.

5.2 Grassmann-Ableitung

Fassen wir das Element Θ_α gleichzeitig als Operator der Linksmultiplikation mit Θ_α auf. Dann können wir einen weiteren Operator durch die Vorschrift

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\Theta_\alpha}, \Theta_\beta\right\} \;=\; \delta_{\alpha,\beta} \tag{5.4}$$

(mal der Identität) definieren. Er heißt partielle Grassmann-Ableitung. Um sich mit diesem anzufreunden, rechnen wir gleich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\Theta_\beta}\left(\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_2}\cdots\Theta_{\alpha_k}\right) &= \left\{\frac{\partial}{\partial\Theta_\beta}, \Theta_{\alpha_1}\right\}\Theta_{\alpha_2}\cdots\Theta_{\alpha_k} - \Theta_{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\Theta_\beta}\left(\Theta_{\alpha_2}\cdots\Theta_{\alpha_k}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\Theta_{\alpha_1}\cdots\Theta_{\alpha_{j-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial\Theta_\beta}, \Theta_{\alpha_j}\right\}\Theta_{\alpha_{j+1}}\cdots\Theta_{\alpha_k} \\
&= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\Theta_{\alpha_1}\cdots\Theta_{\alpha_{j-1}}\;\delta_{\alpha_j,\beta}\;\Theta_{\alpha_{j+1}}\cdots\Theta_{\alpha_k}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

aus. Beachte dabei, daß das Monom verschwindet, wenn nicht $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$ gilt, und somit nur ein Term in (5.5) beiträgt. Mit dieser Formel können wir allgemeine Elemente (5.3) ableiten.

Übungsaufgabe Zeigen Sie, daß die Grassmann-Ableitungen anti-kommutieren, d. h.

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \Theta_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \Theta_\beta} \right\} \;=\; 0. \tag{5.6}$$

5.3 Grassmann-Integral

Wir ergänzen die Grassmann-Ableitung durch eine zweite Operation, das Grassmann-Integral. Es ist definiert durch

$$\int \mathrm{d}\Theta_\beta \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2} \cdots \Theta_{\alpha_k} \;=\; \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \Theta_{\alpha_1} \cdots \Theta_{\alpha_{j-1}}\, \delta_{\alpha_j,\beta}\, \Theta_{\alpha_{j+1}} \cdots \Theta_{\alpha_k}. \tag{5.7}$$

Ein Blick auf (5.5) zeigt, daß Grassmann-Integration und Grassmann-Differentiation identisch sind. Man kann sich nun fragen, warum wir eine zweite Notation für dieselbe Operation einführen. Die Antwort ist die, daß wir die Notation für die Grassmann-Integration ähnlich zu der im Bosonischen Fall einrichten möchten, damit wir uns die Formeln besser merken können. Wir finden nun

$$\int \mathrm{d}\Theta_{2n} \cdots \mathrm{d}\Theta_1 \Theta_{\pi(1)} \cdots \Theta_{\pi(2n)} \;=\; (-1)^\pi \tag{5.8}$$

für Permutationen $\pi \in \mathfrak{S}_{2n}$. Am besten merkt man sich (5.7) durch die Vorschrift, daß man die zu integrierende Variable zuerst nach links sortiert, dabei Minuszeichen aufsammelt und anschließend

$$\int \mathrm{d}\Theta_\alpha \Theta_\alpha \;=\; 1 \tag{5.9}$$

anwendet. Um Platz zu sparen, ist es zweckmäßig, die Abkürzung

$$\mathcal{D}\Theta \;=\; \mathrm{d}\Theta_{2n} \cdots \mathrm{d}\Theta_1 \tag{5.10}$$

einzuführen.

Übungsaufgabe Zeigen Sie, daß das Grassmann-Integral im folgenden Sinn translationsinvariant ist. Es gilt

$$\int \mathcal{D}\Theta\; F(\Phi + \Theta) \;=\; \int \mathcal{D}\Theta\; F(\Theta), \tag{5.11}$$

und zwar sowohl für Grassmann-wertige als auch für Zahlen-wertige Verschiebungen.

5.4 Gaußsche Integrale

In der Quantenfeldtheorie haben wir es mit einem speziellen Typus von Grassmann-Integralen zu tun. Sie sind wie folgt definiert. Sei A eine komplexe oder reelle antisymmetrische $2n \times 2n$-Matrix,

$$A_{\alpha,\beta} \;=\; -A_{\beta,\alpha}. \tag{5.12}$$

Wir definieren

$$(\Theta, A\Theta) \;=\; \sum_{\alpha,\beta} \Theta_\alpha \, A_{\alpha,\beta} \, \Theta_\beta. \tag{5.13}$$

Dann gilt die folgende schöne Formel

$$\int \mathcal{D}\Theta \; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\Theta, A\,\Theta)} \;=\; \mathrm{Pf}(A), \tag{5.14}$$

wobei

$$\mathrm{Pf}(A) \;=\; \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{2n}} (-1)^\pi \; A_{\pi(1),\pi(2)} \cdots A_{\pi(2n-1),\pi(2n)} \tag{5.15}$$

der *Pfaffian* von A ist. Das ge(tr)übte Leserauge wird eine keinesfalls zufällige Ähnlichkeit mit der Determinante von A feststellen. Diese Formel ist noch nicht genau die, die wir später brauchen werden. Sei A invertierbar. Dann gilt etwas allgemeiner

$$\int \mathcal{D}\Theta \; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\Theta, A\,\Theta) + (\Phi,\Theta)} \;=\; \mathrm{Pf}(A)\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\Phi, A^{-1}\Phi)}, \tag{5.16}$$

wobei $(\Phi, \Theta) \;=\; \sum_\alpha \Phi_\alpha \Theta_\alpha$, und wobei wir einen zweiten Satz von Grassmann-Erzeugern mit den Relationen

$$\{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\} \;=\; \{\Phi_\alpha, \Theta_\beta\} \;=\; 0 \tag{5.17}$$

der Algebra hinzufügen. (Das Gaußsche Grassmann-Integral (5.16) definiert eine Abbildung von $\mathfrak{A}(\Theta_1, \ldots, \Theta_{2n}, \Phi_1, \ldots, \Phi_{2n})$ nach $\mathfrak{A}(\Phi_1, \ldots, \Phi_{2n})$.)

Übungsaufgabe 1) Beweisen Sie (5.14). 2) Zeigen Sie (5.16).

5.5 Korrelatoren als Pfaffians

Aus der erzeugenden Funktion (5.16) kann man die Korrelatoren des Maßes (5.14) bestimmen. Dabei macht man sich

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \Phi_{\alpha_j}} \, \mathrm{e}^{(\Phi,\Theta)} \;=\; \mathrm{e}^{(\Phi,\Theta)} \; \Theta_{\alpha_1} \cdots \Theta_{\alpha_j} \tag{5.18}$$

zunutze. Beachte, daß die Exponentialfunktion dem sogenannten geraden Teil der Algebra angehört, jenem der aus Linearkombinationen von Termen mit geradzahliger Anzahl Generatoren besteht. Elemente der geraden Unteralgebra kommutieren mit allen anderen Elementen (einschließlich den ungeraden). Es folgt sogleich, daß

$$\begin{aligned}\frac{\int \mathcal{D}\Theta \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\Theta,A\Theta)}\Theta_{\alpha_1}\cdots\Theta_{\alpha_{2k}}}{\int \mathcal{D}\Theta \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\Theta,A\Theta)}} &= \frac{\partial}{\partial\Phi_{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\Phi_{\alpha_{2k}}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\Phi,A^{-1}\Phi)}\Big|_{\Phi=0} \\ &= (-1)^k\ \mathrm{Pf}\Big((A^{-1})_{\alpha_i,\alpha_j}\Big). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Dabei ist der Pfaffian der $2k \times 2k$-Matrix mit Einträgen $M_{i,j} = (A^{-1})_{\alpha_i,\alpha_j}$ gemeint.

Übungsaufgabe 1) Zeigen Sie (5.18). 2) Verifizieren Sie durch explizite Rechnung (5.19).

5.6 Nambu-Trick

In der QED brauchen wir einen speziellen Typus solcher Integrale. Den wollen wir jetzt untersuchen. Dazu numerieren wir zunächst die Erzeuger um. Sie seinen i. f. durch einen Doppelindex

$$\alpha = (i,\sigma) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,2\} \tag{5.20}$$

numeriert. Es gibt nach wie vor $2n$ Generatoren. Diesen gibt man nun neue Namen

$$\Theta_{i,1} = \bar{\theta}_i, \qquad \Theta_{i,2} = \theta_i, \tag{5.21}$$

und

$$\Phi_{i,1} = -\phi_i, \qquad \Phi_{i,2} = \bar{\phi}_i. \tag{5.22}$$

Man kann nun noch eine Anordnung festlegen, die diese Generatoren mit den vorherigen identifiziert. Wir wollen es so machen, daß

$$\mathcal{D}\Theta = \mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\bar{\theta}_1\cdots\mathrm{d}\theta_n\mathrm{d}\bar{\theta}_n = \mathcal{D}(\theta\bar{\theta}) \tag{5.23}$$

gilt. Weiterhin wollen wir Matrizen A einer ganz speziellen Form anschauen, nämlich solche, deren nichtverschwindende Matrixelemente gegeben sind durch

$$A_{(i,1),(j,2)} = -A_{(j,2),(i,1)} = B_{i,j}. \tag{5.24}$$

Am geschicktesten merkt man sich diese Relation in der Matrixschreibweise

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.25}$$

Die inverse Matrix dazu ist leicht bestimmt. Sie ist gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -(B^{-1})^T \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.26}$$

unter der Voraussetzung, daß B invertierbar ist. In Elementform haben wir daher

$$(A^{-1})_{(i,1),(j,2)} = -(A^{-1})_{(j,2),(i,1)} = -(B^{-1})_{j,i}. \tag{5.27}$$

Mit diesen Namensgebungen können wir nun direkt das Gaußsche Grassmann-Integral in die folgende Gestalt umschreiben. Es gilt

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\Theta \; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\Theta, A\,\Theta)+(\Phi,\Theta)} &= \int \mathcal{D}(\theta\bar{\theta}) \; \mathrm{e}^{(\bar{\theta},B\theta)+(\bar{\theta},\phi)+(\bar{\phi},\theta)} \\ &= \det(B) \; \mathrm{e}^{-(\bar{\phi},B^{-1}\phi)}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Insbesonders liest man hieraus die schöne Gleichung

$$\mathrm{Pf}(A) = \det(B) \tag{5.29}$$

ab. Man kann sie direkt mit der kombinatorischen Definition (5.15) angewandt auf (5.25) beweisen. In diesem Fall geht es aber auch sehr geschickt mit Hilfe der Grassmann-Integrale. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}(\theta\bar{\theta}) \; \mathrm{e}^{(\bar{\theta},B\theta)} &= \frac{1}{n!} \sum_{i_1,j_1,\dots,i_n,j_n} B_{i_1,j_1} \cdots B_{i_n,j_n} \\ &\quad \int \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\bar{\theta}_1 \cdots \mathrm{d}\theta_n \mathrm{d}\bar{\theta}_n \bar{\theta}_{i_n} \theta_{j_n} \cdots \bar{\theta}_{i_1} \theta_{j_1} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i_1,j_1,\dots,i_n,j_n} B_{i_1,j_1} \cdots B_{i_n,j_n} \\ &\quad \int \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_n \mathrm{d}\bar{\theta}_1 \cdots \bar{\theta}_n \bar{\theta}_{i_n} \cdots \bar{\theta}_{i_1} \theta_{j_n} \cdots \theta_{j_1} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi,\tau \in \mathfrak{S}_n} (-1)^\pi (-1)^\tau B_{\pi(1),\tau(1)} \cdots B_{\pi(n),\tau(n)} \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (-1)^\pi B_{1,\pi(1)} \cdots B_{n,\pi(n)} \\ &= \det(B). \end{aligned} \tag{5.30}$$

Wir können (5.28) noch etwas anders schreiben. Substituiere $B = -C^{-1}$. In der QED Literatur ist diese Form

$$\int \mathcal{D}(\bar\theta\theta)\ \mathrm{e}^{-(\bar\theta, C^{-1}\theta)+(\bar\theta,\phi)+(\bar\phi,\theta)} \;=\; \frac{1}{\det C}\ \mathrm{e}^{(\bar\phi, C\phi)} \tag{5.31}$$

gebräuchlich. Dabei haben wir den Faktor $(-1)^n$ von der Determinante in das Maß transferiert, das nun in der Gestalt $\mathcal{D}(\bar\theta\theta)$ auftritt.

Übungsaufgabe Zeigen Sie (5.28).

5.7 Korrelatoren als Determinanten

Die Korrelatoren der speziellen neuen Form des Gaußschen Grassmann-Integrals lassen sich wiederum leicht durch Grassmann-Ableitungen aus der erzeugenden Funktion berechnen. Dazu notieren wir zunächst die Identität

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\phi_{i_1}}\frac{\partial}{\partial\bar\phi_{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\phi_{i_k}}\frac{\partial}{\partial\bar\phi_{j_k}}\mathrm{e}^{(\bar\phi,C\phi)}\Big|_{\phi=0} = \\
&= \frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial\phi_{i_1}}\frac{\partial}{\partial\bar\phi_{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\phi_{i_k}}\frac{\partial}{\partial\bar\phi_{j_k}}(\bar\phi, C\phi)^k \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{a_1,b_1,\dots,a_k,b_k=1}^{n} C_{a_1,b_1}\cdots C_{a_k,b_k} \\
&\quad \frac{\partial}{\partial\phi_{i_1}}\frac{\partial}{\partial\bar\phi_{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\phi_{i_k}}\frac{\partial}{\partial\bar\phi_{j_k}}\bar\phi_{a_k}\phi_{b_k}\cdots\bar\phi_{a_1}\phi_{b_1} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{a_1,b_1,\dots,a_k,b_k=1}^{n} C_{a_1,b_1}\cdots C_{a_k,b_k} \\
&\quad \frac{\partial}{\partial\phi_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\phi_{i_k}}\frac{\partial}{\partial\bar\phi_{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\bar\phi_{j_k}}\bar\phi_{a_k}\cdots\bar\phi_{a_1}\phi_{b_1}\cdots\phi_{b_1} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\pi,\tau\in\mathfrak{S}_n}(-1)^\pi(-1)^\tau C_{j_{\pi(1)},i_{\tau(1)}}\cdots C_{j_{\pi(k)},i_{\tau(k)}} \\
&= \det\begin{pmatrix} C_{j_1,i_1} & C_{j_1,i_2} & \cdots & C_{j_1,i_k} \\ C_{j_2,i_1} & C_{j_2,i_2} & \cdots & C_{j_2,i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{j_k,i_1} & C_{j_k,i_2} & \cdots & C_{j_k,i_k}\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Wie im Bosonischen Fall besteht ein solcher Korrelator aus $k!$ Termen. Im Gegensatz zum Bosonischen Fall, konspierieren sie zu einer Determinante. (Den entsprechenden Bosonischen Ausdruck ohne Minuszeichen nennt man eine Permanente.) Auf der anderen Seite gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\phi_{i_1}}\frac{\partial}{\partial\bar{\phi}_{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\phi_{i_k}}\frac{\partial}{\partial\bar{\phi}_{j_k}}\mathrm{e}^{(\bar{\phi},\theta)+(\bar{\theta},\phi)} &= \mathrm{e}^{(\bar{\phi},\theta)+(\bar{\theta},\phi)}\,(-1)^k\,\bar{\theta}_{i_1}\theta_{j_1}\cdots\bar{\theta}_{i_k}\theta_{j_k} \\ &= \mathrm{e}^{(\bar{\phi},\theta)+(\bar{\theta},\phi)}\,\theta_{j_1}\bar{\theta}_{i_1}\cdots\theta_{j_k}\bar{\theta}_{i_k}.\end{aligned} \tag{5.33}$$

Infolge dessen bekommen wir den folgenden Ausdruck für die Korrelatoren des Maß es (5.31). Es gilt

$$\frac{\int\mathcal{D}(\bar{\theta}\theta)\mathrm{e}^{-(\bar{\theta},C\theta)}\,\theta_{j_1}\bar{\theta}_{i_1}\cdots\theta_{j_k}\bar{\theta}_{i_k}}{\int\mathcal{D}(\bar{\theta}\theta)\mathrm{e}^{-(\bar{\theta},C\theta)}} = \det\begin{pmatrix} C_{j_1,i_1} & C_{j_1,i_2} & \cdots & C_{j_1,i_k} \\ C_{j_2,i_1} & C_{j_2,i_2} & \cdots & C_{j_2,i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{j_k,i_1} & C_{j_k,i_2} & \cdots & C_{j_k,i_k}\end{pmatrix} \tag{5.34}$$

Dieser Ausdruck entspricht dem Wick-Theorem für Fermionen.

Übungsaufgabe Sei $C_{i,j} = \langle v_i|w_j\rangle$ von der Form von Skalarprodukten. Geben Sie eine Abschätzung für die Korrelatoren (5.34) mit Hilfe der Gramschen Ungleichung für Determinanten an.

5.8 Literaturhinweise

Grassmann Variablen für Fermionische Pfadintegrale wurden von Berezin eingeführt. Sie werden daher auch Berezin-Integrale genannt. Siehe [5]. Eine interessante mathematische Referenz ist [18]. Eine umfassende Einführung in die Methode der Grassmann-Variablen mit vielen Details bietet [64]. Weiterhin möchte ich auf [37] als ein Beipiel unter den vielen Lehrbüchern verweisen.

6 Das Dirac Fermion

Elektron und Positron werden in der QED durch ein gemeinsames Dirac-Feld (mit D Komponenten) beschrieben. (Die Dimension D sei i. f. gerade.) In dieser Vorlesung wollen wir das freie Dirac-Feld besprechen. Alle Eigenschaften des freien Dirac-Feldes lassen sich in einem Dirac-Propagator subsummieren. Wir stellen diesen an die Spitze der Konstruktion.

6.1 Euklidische Formulierung

Wie im Bosonischen Fall definieren wir Fermionische Feldtheorien durch die Angabe einer Wirkung (entspricht einer Hamilton-Funktion im Bosonischen Fall, da das Fermionische Pfadintegral einem Hamiltonschen Bosonischen Pfadintegral entspricht, siehe dazu die Diskussion in [1]). Die Wirkung sei wiederum durch das Raum-Zeit-Integral über eine Lagrange-Dichte gegeben. Speziell die freie Feldtheorie von Dirac-Fermionen ist sie gegeben durch

$$S[\bar{\psi}, \psi] \;=\; \int \mathrm{d}^D x \; \mathcal{L}(\bar{\psi}(x), \psi(x)) \tag{6.1}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{\psi}(x), \psi(x)) \;&=\; \sum_{a,b=1}^{D} \bar{\psi}(x,a) \, \big(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ + m\big)_{a,b} \, \psi(x,b) \\ &=\; \bar{\psi}(x)\big(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ + m\big)\psi(x). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Die Notation ist dabei wie folgt. Die Felder $\bar{\psi}(x,a) = \bar{\psi}_a(x)$ und $\psi(x,a) = \psi_a(x)$ seien Grassmann-Variablen, die durch $(x,a) \in \mathbb{R}^D \times \{1, \ldots, D\}$ indiziert werden. Der zweite Index signalisiert, daß die Felder D Komponenten haben. (Eine attraktive Möglichkeit, um ein wohldefiniertes mathematisches Objekt zu bekommen, besteht darin, die Euklidische Raum-Zeit $\mathbb{R}^D$ durch ein endliches Gitter ersetzen. Solche Gitterfermionen werden ausführlich in [45] unter die Lupe genommen. Wir wollen hier die Betrachtung des formalen Kontinuumlimes fortsetzen.) Weiter sei a la Feynman

$$\partial\!\!\!/ \;=\; \sum_{\mu=1}^{D} \gamma^\mu \, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \;=\; \gamma^\mu \, \partial_\mu, \tag{6.3}$$

wobei die γ_μ einen Satz von $D \times D$-Dirac-Matrizen bezeichnen. Die γ-Matrizen seien anti-Hermitesch, und es gelte

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \;=\; -2\,\delta^{\mu,\nu}. \tag{6.4}$$

Übungsaufgabe Durchsuchen Sie die Literatur nach Darstellungen der γ-Matrizen. Geben Sie nicht auf, bevor Sie die chirale Darstellung und die Diracsche Standard-Darstellung gefunden haben.

6.1.1 Dirac-Propagator

Wir quantisieren die durch (6.1) und (6.2) definierte Theorie, indem wir die folgende Pfadintegraldarstellung für das erzeugende Funktional der Schwinger-Funktionen, eine andere Bezeichnung der Euklidischen Greenschen Funktionen, postulieren:

$$Z[\bar{\eta},\eta] \;=\; \frac{\int \mathcal{D}(\bar{\psi},\psi)\;\exp\{-S[\bar{\psi},\psi]+(\bar{\psi},\eta)+(\bar{\eta},\psi)\}}{\int \mathcal{D}(\bar{\psi},\psi)\;\exp\{-S[\bar{\psi},\psi]\}} \tag{6.5}$$

Wie im Bosonischen Fall gelingt es leicht, das erzeugende Funktional der freien Theorie explizit auszurechnen. Dabei machen wir uns die Formel (5.31) zunutze. Ihr zufolge gilt

$$Z[\bar{\eta},\eta] \;=\; \mathrm{e}^{-(\bar{\eta},S\eta)}, \tag{6.6}$$

wobei

$$(\bar{\eta},S\eta) \;=\; \int \mathrm{d}^D x \int \mathrm{d}^D y\; \bar{\eta}(x)\; S(x,y)\; \eta(y). \tag{6.7}$$

Es ist üblich, die Dirac-Indizes in der Notation zu unterdrücken. Diesem Brauch wollen wir uns hier dankbar anschließen. Der Dirac-Propagator ist dabei das Inverse des Differentialoperators in (6.2). Er ist gegeben durch

$$S(x,y) \;=\; \int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}\; \frac{\not{p}+m}{p^2+m^2}. \tag{6.8}$$

Da diese Formel vielleicht nicht allen Lesern offensichtlich ist, beweisen wir sie gleich durch

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\not{\partial}_x+m)S(x,y) &= \int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}\; \frac{(-\not{p}+m)(\not{p}+m)}{p^2+m^2}\\ &= \delta(x-y),\end{aligned} \tag{6.9}$$

weil

$$(-\not{p}+m)(\not{p}+m) \;=\; -(\not{p})^2+m^2 \;=\; p^2+m^2, \tag{6.10}$$

da

$$(\not{p})^2 \;=\; \sum_{\mu,\nu} p_\mu\, p_\nu\; \frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} \;=\; -\sum_\mu p_\mu\, p^\mu. \tag{6.11}$$

(Beachte, daß $p_\mu = p^\mu$ in der Euklidischen Metrik gilt.) Die einzige Komplikation im Vergleich zum skalaren Feld besteht darin, daß wir hier mit Matrizen arbeiten. Eine nützliche Beobachtung ist, daß

$$\begin{aligned}S(x,y) =&\; (-\mathrm{i}\not{\partial}_x+m)\int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}\; \frac{1}{p^2+m^2}\\ =&\; (-\mathrm{i}\not{\partial}_x+m)\; C(x,y),\end{aligned} \tag{6.12}$$

wobei C gegeben ist durch (3.32). Mit anderen Worten, wir können den Dirac-Propagator durch Differentiation aus dem skalaren Propagator gewinnen.

Übungsaufgabe Überlegen Sie sich, wie die Formeln dieses Abschnitts ausgeschrieben in Komponentenform lauten.

6.2 Minkowskische Formulierung

In der Literatur werden Sie vorzugsweise den Dirac-Propagator bei reeller Zeit (imaginärer Euklidischer Zeit) vorfinden. Man bekommt ihn aus dem obigen Ausdruck durch Wick-Rotation.

6.2.1 Wick-Rotation des Euklidischen Propagators

Wick-Rotation funktioniert im Fermionischen Fall genau wie im Bosonischen Fall. Wir bekommen

$$\begin{aligned} S_E\big((\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}t,\mathbf{x}),(0,\mathbf{0})\big) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}t+\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}}\,\frac{\omega\gamma_E^0+\mathbf{p}\gamma_E+m}{\omega^2+\mathbf{p}^2+m^2} \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\mathrm{p}\mathrm{x}}\,\frac{\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}\gamma_E^0+\mathbf{p}\gamma_E+m}{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\Theta}\omega^2+\mathbf{p}^2+m^2} \end{aligned} \tag{6.13}$$

Die Polologie ist dabei identisch wie in (3.39). Im Grenzwert $\Theta\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+$ ergibt sich

$$\begin{aligned} S_E\big((\mathrm{i}t,\mathbf{x}),(0,\mathbf{0})\big) &= \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\mathrm{p}\mathrm{x}}\,\frac{-\omega\mathrm{i}\gamma_E^0+\mathbf{p}\gamma_E+m}{\omega^2-\mathbf{p}^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon} \\ &= \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\mathrm{p}\mathrm{x}}\,\frac{\omega\mathrm{i}\gamma_E^0+\mathbf{p}\gamma_E+m}{\omega^2-\mathbf{p}^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon} \\ &= \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\mathrm{p}\mathrm{x}}\,\frac{\omega\gamma_M^0-\mathbf{p}\gamma_M+m}{\omega^2-\mathbf{p}^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon} \\ &= \mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^Dp}{(2\pi)^D}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\,x}\,\frac{\not p+m}{p^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon} \\ &= S_F(x,0). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Die γ-Matrizen haben wir dabei vom Euklidischen ins Minkowskische mit Hilfe der Beziehung

$$\gamma_M^0 \;=\; \mathrm{i}\gamma_E^0, \qquad \gamma_M^i \;=\; -\gamma_E^i \tag{6.15}$$

übersetzt. Offensichtlich gilt für diese γ-Matrizen die Antivertauschungsrelation

$$\{\gamma_M^\mu,\gamma_M^\nu\} \;=\; 2\,g^{\mu,\nu} \tag{6.16}$$

mit der Metrik $g^{0,0} = 1$ und $g^{i,i} = -1$. Weiterhin ist nun γ_M^0 Hermitesch, wogegen die γ_M^i weiterhin anti-Hermitesch bleiben, also gilt

$$(\gamma_M^0)^\star = \gamma_M^0, \qquad (\gamma_M^i)^\star = -\gamma_M^i. \tag{6.17}$$

Die Schlußfolgerung hieraus ist, daß wir zumindest in der Störungsrechnung den Übergang von der Euklidischen zur Minkowskischen Zeit dadurch bewerkstelligen können, daß wir den Euklidischen Dirac-Propagator durch den Feynman-Propagator (6.14) ersetzen.

6.2.2 Wick-Rotation der Wirkung

Nur um Konsistenz mit der Literatur zu erreichen, rotieren wir auch noch die Wirkung (6.1) zu realen (imaginären) Zeiten. Diese Form des Pfadintegrals ist in den meisten Lehrbüchern vorzufinden. Definiere analog zu (3.12)

$$t_\Theta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}\, t_E \qquad \psi_\theta^\sharp(t_\theta, \mathbf{x}) = \psi_E^\sharp(t_E, \mathbf{x}), \tag{6.18}$$

so daß

$$\mathrm{d}t_E = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\, t_\Theta, \qquad \partial_0 \psi_E^\sharp(t_E, \mathbf{x}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}\, \partial_0 \psi_\Theta^\sharp(t_\Theta, \mathbf{x}). \tag{6.19}$$

Dabei steht $\psi^\sharp$ als Abkürzung für $\bar\psi$ und ψ. Einsetzen in (6.1) liefert mit Hilfe einer Konturdrehung der Zeitintegration

$$\begin{aligned}
S_E[\bar\psi_E, \psi_E] = {} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_\Theta \int \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x} \\
& \bar\psi_\Theta(t_\Theta, \mathbf{x}) \, \left(\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}\gamma_E^0\partial_0 + \mathrm{i}\gamma_E^i\partial_i + m\right) \psi_\Theta(t_\Theta, \mathbf{x}) \\
\overset{\Theta=\frac{\pi}{2}}{=} {} & \mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_M \int \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x} \\
& \bar\psi_M(t_M, \mathbf{x}) \, \left(\mathrm{i}(-\mathrm{i})\gamma_E^0\partial_0 + \mathrm{i}\gamma_E^i\partial_i + m\right) \psi_M(t_M, \mathbf{x}) \\
= {} & \mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_M \int \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x} \\
& \bar\psi_M(t_M, \mathbf{x}) \, \left(-\mathrm{i}\gamma_M^0\partial_0 - \mathrm{i}\gamma_M^i\partial_i + m\right) \psi_M(t_M, \mathbf{x}) \\
= {} & -\mathrm{i} \int \mathrm{d}^D x \, \bar\psi_M(x) \, \left(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ \, - m\right) \psi_M(x) \\
= {} & -\mathrm{i}\, S_M[\bar\psi_M, \psi_M].
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Diesen Ausdruck können Sie in das Funktionalintegral (6.5) einsetzen. Der resultierende Ausdruck ist das Pfadintegral in der Minkowski-Formulierung. Wie bereits erwähnt ist dieser Ausdruck durch die iε-Vorschrift zu ergänzen, die gerade besagt, daß er als Limes einer Wick-Rotation aus dem Euklidischen zu verstehen ist.

6.3 Die freien Korrelationsfunktionen

Der nächste Baustein unserer Konstruktion ist die Berechnung der freien Korrelationsfunktionen aus (6.6). Zum Glück haben wir die Arbeit bereits im vorigen Kapitel über die Grassmann-Variablen getan. Der Lohn ist die folgende phantastische Formel

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \psi(x_1,a_1)\bar\psi(y_1,b_1)\psi(x_2,a_2)\bar\psi(y_2,b_2)\cdots\psi(x_n,a_n)\bar\psi(y_n,b_n)\right\rangle = \\
&= \frac{\int \mathcal{D}(\bar\psi,\psi)\ \mathrm{e}^{-(\bar\psi,[\mathrm{i}\not\partial+m]\psi)}\ \psi(x_1,a_1)\bar\psi(y_1,b_1)\cdots\psi(x_n,a_n)\bar\psi(y_n,b_n)}{\int \mathcal{D}(\bar\psi,\psi)\ \mathrm{e}^{-(\bar\psi,[\mathrm{i}\not\partial+m]\psi)}} \\
&= \det\begin{pmatrix}
S((x_1,a_1),(y_1,b_1)) & S((x_1,a_1),(y_2,b_2)) & \cdots & S((x_1,a_1),(y_n,b_n)) \\
S((x_2,a_2),(y_1,b_1)) & S((x_2,a_2),(y_2,b_2)) & \cdots & S((x_2,a_2),(y_n,b_n)) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
S((x_n,a_n),(y_1,b_1)) & S((x_n,a_n),(y_2,b_2)) & \cdots & S((x_n,a_n),(y_n,b_n))
\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

Sie entspricht dem Wickschen Theorem im Fermionischen Fall. Man kann sie wiederum als Summation über alle Kontraktionen der integrierten Feldgrößen schreiben, wobei nur gequerte mit ungequerte Felder gepaart werden, und wobei jede Paarung mit einem Vorzeichen zu versehen ist. Das Vorzeichen bestimmt man als Signatur der Permutation, die die gepaarten Felder benachbart stellt.

Es ist durchaus legitim, die Formel (6.21) als *Definition* des Fermionischen Pfadintegrals zu nehmen. Erfahrungsgemäß ist dieser Weg nur pädagogisch nicht vertretbar. Es ist auch im Fermionischen Fall eindrucksvoll festzustellen, daß man genau denselben Ausdruck für die zeitgeordneten Vakuumserwartungswerte von Feldoperatoren erhält.

Die einfachste Weise diese Formel zu beweisen, ist die folgende trickreiche Reduktion auf eine *endliche* Grassmann-Algebra. Führe die Abkürzungen $\xi_i = (x_i, a_i)$ und $\zeta_i = (y_i, b_i)$ ein. Dann stellt man fest, daß (6.21) gegeben ist durch

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\eta(\zeta_1)}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(\xi_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta\eta(\zeta_n)}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(\xi_n)}\exp\Big\{(\bar\eta, S\,\eta)\Big\}\Big|_{\bar\eta=\eta=0} = \\
&= \frac{\partial}{\partial\phi_1}\frac{\partial}{\partial\bar\phi_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\phi_n}\frac{\partial}{\partial\bar\phi_n}\exp\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\bar\phi_i\ S(\xi_i,\zeta_j)\ \phi_j\right\}\Bigg|_{\bar\phi=\phi=0}.
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

Dieser Ausdruck ist als Gleichung auf der durch $\bar\phi_i$ und ϕ_i erzeugten endlichen Grassmann-Algebra zu lesen. Mit der Formel (5.32) folgt daraus (6.21).

Es bleibt zu zeigen, daß die Funktionalableitungen in (6.22) tatsächlich in der richtigen Reihenfolge stehen. Angesichts der fundamentalen Formeln

(6.5) und (6.6) notieren wir dazu, daß

$$\frac{\delta}{\delta\eta(\zeta_1)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(\xi_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta\eta(\zeta_n)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(\xi_n)}\exp\{(\bar{\eta},\psi)+(\bar{\psi},\eta)\} =$$
$$\exp\{(\bar{\eta},\psi)+(\bar{\psi},\eta)\}\ (-1)^n\ \bar{\psi}(\zeta_1)\psi(\xi_1)\cdots\bar{\psi}(\zeta_n)\psi(\xi_n). \tag{6.23}$$

Die restliche Arbeit ist leicht getan. Wir vertauschen paarweise die gequerten Felder mit den zugehörigen ungequerten Feldern und sammeln dabei das gewünschte Vorzeichen $(-1)^n$ auf.

Übungsaufgabe Beweisen Sie durch Ausführen der Funktionalableitungen die Gleichung (6.22).

6.4 Literaturhinweise

Diese Darlegungen sollten Sie unbedingt durch ein Studium der Literatur über Spinorfelder ergänzen. Einige Themen zu Spinorfeldern sind:

- die Darstellungen der $SL(\mathbb{C})$ (der zweifachen Überlagerung der homogenen Lorentzgruppe),
- der Weyl-Spinor, der Majorana-Spinor und der Dirac-Spinor im Vergleich (Wellengleichungen, Invarianzen, insbesonders die chirale Symmetrie),
- die kanonische Quantisierung von Spinoren (Antikommutatoren, Spin-Statistik-Zusammenhang).

Eine ausführliche Diskussion dieser Materie finden Sie in [61], eine pragmatisch ausgerichtete Diskussion in [48]. Als Kurzfassung könnten Sie beispielsweise die zugehörigen Abschnitte in [37] lesen.

7 Die quantenmechanische Poincaré-Gruppe

Die besondere Gestalt des Dirac-Propagators kann durch die Darstellungstheorie der quantenmechanischen Poincaré-Gruppe in Verbindung mit Axiomen der Quantenfeldtheorie begründet werden. In diesem Kapitel wollen wir diesen darstellungstheoretischen Ursprung skizzieren.

Zunächst besprechen wir die unitären irreduziblen Darstellungen der quantenmechanischen Poincaré-Gruppe. Diese entsprechen Einteilchenzuständen in einer relativistisch invarianten Quantentheorie.

Anschließend betrachten wir das Transformationsverhalten von freien Feldern mit Spin im Operatorformalismus. Wir werden sehen, welche Felder Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ beschreiben können. Ein Spinoff der Betrachtungen wird das Spin-Statistik-Theorem für freie Felder sein. Das Kapitel endet mit einer darstellungstheoretischen Formel für den Dirac-Propagator.

7.1 Poincaré-Transformationen

Poincaré-Transformationen sind Paare (Λ, a), wobei $\Lambda \in SO(3,1)$ eine Lorentz-Transformation ist, und wobei $a \in \mathbb{R}^4$ eine Raum-Zeit-Translation ist. Das Multiplikationsgesetz lautet

$$(\Lambda, a)(\Lambda', a') \;=\; (\Lambda\Lambda', a + \Lambda a'). \tag{7.1}$$

In der Quantenmechanik tritt an die Stelle der $SO(3,1)$ nach der Theorie von Wigner die quantenmechanische Lorentz-Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$. Sie ist die zweifache Überlagerungsgruppe von $SO(3,1)$. Zwischen den beiden Gruppen besteht die fundamentale Beziehung[2]

$$A\,\sigma_\mu\,A^\star \;=\; \sigma_\nu\,\Lambda(A)^\nu{}_\mu. \tag{7.2}$$

Dabei ist A ein Element der $SL(2,\mathbb{C})$, nämlich eine komplexe 2×2-Matrix mit Determinante eins,

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \det(A) \;=\; a\,d - b\,c, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \tag{7.3}$$

und $A^\star = \overline{A}^T$ ist die Hermitesch konjugierte Matrix. Zur Notation in Gleichung (7.2): σ_0 ist die Einheitsmatrix, und σ_i ist die $i$te Pauli-Matrix. Sie sind gegeben durch

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

[2]Die Gleichung (7.2) definiert einen Gruppenhomomorphismus $SL(2,\mathbb{C}) \to SO(3,1)$. Er ist Teil der kurzen exakten Sequenz $0 \to \mathbb{Z}_2 \to SL(2,\mathbb{C}) \to SO(3,1) \to 0$. Sie besagt, daß $SO(3,1) = SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$.

Die Pauli-Matrizen sind Hermitesch und genügen der Orthogonalitätsbeziehung $\mathrm{tr}(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 2\,\delta_{\mu,\nu}$. Die Lorentz-Transformation $\Lambda(A)$ berechnet sich demzufolge aus A gemäß

$$\Lambda(A)^\nu{}_\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\sigma_\nu A \sigma_\mu A^\star). \tag{7.5}$$

Man ließt hieraus ab, daß $\Lambda(-A) = \Lambda(A)$ ist. Es erweist sich als zweckmäßig, Vierervektoren ebenfalls als komplexe 2×2-Matrizen zu schreiben. Man tut dies durch die Zuweisung

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p^0 + p^3 & p^1 - \mathrm{i}p^2 \\ p^1 + \mathrm{i}p^2 & p^0 - p^3 \end{pmatrix} = p^\mu\,\sigma_\mu. \tag{7.6}$$

Ihr Transformationsgesetz hat die kanonische Gestalt

$$A\,\underline{p}\,A^\star = \underline{p}', \qquad p' = \Lambda(A)\,p. \tag{7.7}$$

Für alle $p \in \mathbb{R}^4$ ist $\underline{p}$ eine Hermitesche Matrix. Somit lassen sich die Elemente der quantenmechanischen Poincaré-Gruppe auch als Paare von Matrizen auffassen.

Übungsaufgabe 1) Zählen Sie die freien Parameter der Transformationen Λ und A. 2) Diskutieren Sie die kurze exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z}_2 \to SL(2,\mathbb{C}) \to SO(3,1) \to 0$.

7.2 Unitäre irreduzible Darstellungen

In der Quantentheorie treten Symmetrien der Wigner-Theorie zufolge als unitäre oder anti-unitäre Darstellungen von Gruppen auf. Für kontinuierliche Gruppen, deren Elemente stetig in das Einselement deformiert werden können, kommen nur unitäre Darstellungen in Frage.

7.2.1 Begriffsbildungen

Eine unitäre Darstellung einer Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus U, der Elemente $g \in G$ auf unitäre Operatoren $U(g) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eines Hilbert-Raums $\mathcal{H}$ abbildet. Damit ist gemeint, daß

$$U(g)\,U(g') = U(g\,g'), \qquad U(g)^{-1} = U(g^{-1}) = U(g)^\star \tag{7.8}$$

gilt.

Eine Darstellung von G auf $\mathcal{H}$ heißt irreduzibel, wenn es keinen G-invarianten Unterraum in $\mathcal{H}$ gibt, außer $\mathcal{H}$ selbst und außer der Null.

Hinter dieser Begriffsbildung verbirgt sich die physikalische Vorstellung, daß eine Symmetrieoperation $U(g)$ jedem physikalischen Zustand ψ einen anderen physikalischen Zustand $U(g)\psi$ zuordnet. Die Gruppeneigenschaft besagt, daß die Verkettungen $U(g)U(g')$ und $U(gg')$ zweier Symmetrieoperationen den gleichen Zustand ergeben.

Die Unitarität garantiert, daß die Operation Matrixelemente invariant läßt, da $(U(g)\psi, U(g)\phi) = (\psi, U(g)^\star U(g)\phi) = (\psi, \phi)$. Streng genommen muß dies nur bis auf die Multiplikation mit einer Phase gelten, da in diesem Fall immer noch Betragsquadrate von Skalarprodukten, die die beobachtbaren Größen in einer Quantentheorie sind, invariant bleiben. Diese Überlegung führt zur Theorie der sogenannten Strahldarstellungen[3], die wir hier nicht vertiefen wollen. Wigner hat gezeigt, daß die unitären Strahldarstellungen der Poincaré-Gruppe durch unitäre gewöhnliche Darstellungen der quantenmechanischen Poincaré-Gruppe gegeben sind.

7.2.2 Das Spektrum von P

Wir postulieren, daß der physikalische Hilbertraum mit einer unitären Darstellung der quantenmechanischen Poincaré-Gruppe ausgestattet ist. Insbesonders postulieren wir unitäre Operatoren $U(a)$ und $U(A)$. Wenden wir uns zuerst den Raum-Zeit-Translationen zu. Wir schreiben

$$U(a) \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}a_\mu P^\mu}, \tag{7.9}$$

wobei die P^μ Hermitesche Operatoren sind. Ihre wichtigsten Eigenschaften sind

$$U(a)\,U(a') \;=\; U(a+a'), \qquad [P^\mu, P^\nu] \;=\; 0, \tag{7.10}$$

und

$$U(A)\;P^\mu\;U(A)^\star \;=\; (P')^\mu, \qquad (P')^\mu \;=\; \Lambda(A)^\mu{}_\nu\,P^\nu. \tag{7.11}$$

Der Operator P^0 wird als Enerergieoperator interpretiert, die Operatoren P^i als Impulsoperatoren.

Da die P-Operatoren gemäß (7.10) miteinander vertauschen, folgt, daß sie simultan diagonalisiert werden können. Betrachten wir daher simultane Eigenzustände

$$P|p,\lambda\rangle \;=\; p|p,\lambda\rangle, \tag{7.12}$$

wobei λ summarisch für alle weiteren Quantenzahlen steht. Auf diesen Zuständen wirken die Translationen gemäß

$$U(a)|p,\lambda\rangle \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}aP}|p,\lambda\rangle \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}ap}|p,\lambda\rangle. \tag{7.13}$$

[3]Eine unitäre Strahldarstellung von G auf $\mathcal{H}$ ist eine Abbildung U, die jedem Element g einen unitären Operator $U(g)$ zuordnet, die das abgeänderte Multiplikationsgesetz $U(g)\,U(g') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(g,g')}\,U(gg')$ erfüllt. Die Forderung nach der Assoziativität des Produkts ist gleichbedeutend mit eine *Kozykelbedingung* an die Phasenfaktoren.

Aus (7.11) folgt ihr Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformationen. Es gilt

$$P^\mu U(A)|p,\lambda\rangle \;=\; U(A)\Lambda(A)^\mu{}_\nu P^\nu|p,\lambda\rangle \;=\; \Lambda(A)^\mu{}_\nu p^\nu\, U(A)|p,\lambda\rangle. \quad (7.14)$$

Diese Formel besagt, daß $U(A)|p,\lambda\rangle$ ein Eigenvektor von P mit Eigenvert $\Lambda(A)p$ ist.

Wenn ein bestimmter Viererimpuls $p_\star$ in der Darstellung auftritt, dann gehören sofort alle Viererimpulse der Form $\Lambda p_\star$ ebenso zur Gesellschaft. Die Menge $\{\Lambda p_\star|\Lambda \in SO(3,1)\}$ nennt man auch den Orbit von $p_\star$. Die Menge dieser Orbits bilden den homogenen Raum $\mathbb{R}^4/SO(3,1)$.

Zustände, die zu verschiedenen Orbits gehören, können nicht durch Lorentz-Transformationen ineinander überführt werden. Daraus folgt, daß in einer irreduziblen Darstellung die Impulse genau eines Orbits auftreten. Sie lassen sich wie folgt klassifizieren:

1. $p^2 = m^2$ und $p^0 > 0$
2. $p^2 = m^2$ und $p^0 < 0$
3. $p^2 = -m^2$ und $-\infty < p^0 < \infty$
4. $p^2 = 0$ und $p^0 > 0$
5. $p^2 = 0$ und $p^0 < 0$
6. $p = 0$

Die Strategie besteht nun darin, einen Repräsentanten $p_\star$ im Orbit, und damit ein Element des homogenen Raums, zu wählen und die Betrachtungen auf den Unterraum, aufgespannt durch $|p,\lambda\rangle$ mit $p = \Lambda p_\star$ zu beschränken. Die kanonischen Repräsentanten in der Physik sind

1. $p_\star = (m,0,0,0)$
4. $p = \kappa\,(1,0,0,-1)$
6. $p_\star = (0,0,0,0)$

7.2.3 Stabilitätsgruppen

Sei $p_\star$ der Representant des betrachteten homogenen Raumes. Die Stabilitätsgruppe des Representanten, sie wird auch Wigners kleine Gruppe genannt, ist die Untergruppe $H \subset SL(2,\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft

$$\Lambda(A)p_\star \;=\; p_\star \quad\Leftrightarrow\quad A\underline{p}_\star A^\star \;=\; \underline{p}_\star. \quad (7.15)$$

Fall 1. Gemäß (7.5) gilt $\underline{p}_\star = m\,I$, wobei I die Einheitsmatrix ist. Die Stabilitätsbedingung lautet in diesem Fall

$$A \in H \quad \Leftrightarrow \quad AA^\star = I \quad \Leftrightarrow \quad A \in SU(2). \tag{7.16}$$

Massive Darstellungen mit positiver Energie werden daher durch Darstellungen der $SU(2)$ *induziert*.

Fall 4. Gemäß (7.5) gilt in diesem Fall für den kanonischen Repräsentanten

$$\underline{p}_\star \;=\; \kappa(\sigma_0 - \sigma_3) \;=\; 2\kappa \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.17}$$

Die Stabilitätsgruppe besteht in diesem Fall aus Matrizen, für die gilt

$$A\underline{p}_\star A^\star \;=\; \underline{p}_\star, \qquad A \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix}, \qquad ad - bc \;=\; 1. \tag{7.18}$$

Nach einer kurzen Rechnung stellt man fest, daß derartige Matrizen sich in der Form

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}} & 0 \\ z & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \qquad -2\pi \le \phi < 2\pi, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{7.19}$$

schreiben lassen. Die Stabilitätsgruppe ist in diesem Fall die dreidimensionale Gruppe E_2, die Gruppe der Drehungen und Translationen von $\mathbb{R}^2$. Sie enthält zwei Untergruppen, zum einen die Untergruppe der Rotationen

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \tag{7.20}$$

und zum anderen die Untergruppe der Translationen

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.21}$$

Die Translationsuntergruppe ist ein Normalteiler[4] der E_2.

Fall 6. In diesem Fall ist $H = SL(2, \mathbb{C})$.

Übungsaufgabe 1) Zeige (7.18). 2) Zeige, daß die Untergruppe (7.20) das Gruppengesetz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ zz' & 1 \end{pmatrix}$ erfüllt.

[4] Eine Untergruppe N von G heißt Normalteiler, wenn für alle $g \in G$ und $n \in N$ gilt $g\,n = n\,g$.

7.2.4 Darstellungsmatrizen der kleinen Gruppe

Betrachten wir nun die Wirkung von $U(h)$ für $h \in H$ auf unsere Zustände $|p_\star, \lambda\rangle$. Es ist klar, daß sich $U(h)|p_\star, \lambda\rangle$ als Linearkombination

$$U(h)\,|p_\star, \lambda\rangle \;=\; \sum_{\lambda'} |p_\star, \lambda'\rangle\; d(h)_{\lambda',\lambda} \tag{7.22}$$

schreiben lassen muß. Fassen wir $d(h) = (d(h)_{\lambda',\lambda})$ als Matrix auf. Dann zeigt man leicht aus der Darstellungseigenschaft von U, daß

$$d(h)\,d(h') \;=\; d(h\,h'), \qquad d(h^{-1}) \;=\; d(h)^{-1}, \tag{7.23}$$

gelten muß. Die Matrizen $d(h)$ bilden daher eine Darstellung der kleinen Gruppe. Wenn die Gesamtdarstellung unitär sein soll, muß insbesonders auch die Darstellung der kleinen Gruppe unitär sein. Der von $|p_\star, \lambda\rangle$ aufgespannte Unterraum trägt somit eine unitäre Darstellung der Stabilitätsgruppe.

Wir werden gleich zeigen, wie man aus einer unitären Darstellung der kleinen Gruppe eine unitäre Darstellung der gesamten Gruppe induziert, deren Einschränkung auf die Stabilitätsgruppe gerade die induzierende Darstellung ist. Unter der Voraussetzung, dieses geleistet zu haben, gelangen wir zu der folgenden Schlußfolgerung von Wigner.

Die unitären irreduziblen Darstellungen der quantenmechanischen Poincaré-Gruppe sind eindeutig bestimmt durch die Angabe

- des Spektrums von P^μ (homogener Raum) und
- einer unitären irreduziblen Darstellung der zugehörigen kleinen Gruppe.

Übungsaufgabe Zeige (7.23).

7.2.5 Standardboosts

Betrachten wir den Orbit, der aus einem gegebenen Representanten $p_\star$ generiert wird. Zu jedem p aus dem Orbit wählen wir einen Standardboost B_p mit der Eigenschaft, daß

$$p \;=\; \Lambda(B_p)\,p_\star \quad\Leftrightarrow\quad B_p \underline{p}_\star B_p^\star \;=\; \underline{p}. \tag{7.24}$$

Es gibt viele solche Representanten. (Man kann einen beliebigen Representanten mit jedem Element der Stabilitätsgruppe von rechts multiplizieren.) Eine populäre Wahl in der Physik ist das Produkt einer Rotation mal einem Boost in z-Richtung. Die Rotation nennt man auch Wigner-Rotation.

Der gesamte Darstellungsraum wird nun aufgespannt durch die Vektoren

$$|p, \lambda\rangle \;=\; U(B_p)|p_\star, \lambda\rangle. \tag{7.25}$$

Diese Formel sieht etwas tautologisch aus. Sie definiert aber nur $|p,\lambda\rangle$ als $U(B_p)\,|p_\star,\lambda\rangle$, und legt damit die Darstellungsmatrizen der Standardboosts fest. Auf einem beliebigen Zustand gilt dann $B_p|p',\lambda\rangle \;=\; |p+p',\lambda\rangle$.

Wir müssen nun ein geeignetes Transformationsgesetz für die übrigen Gruppenelemente konstruieren. Das geht wie folgt. Seien p, p' und A so, daß $p' \;=\; \Lambda(A)\,p$. Dann gilt per Definition

$$\Lambda(B^{-1}_{\Lambda(A)p}\,A\,B_p) \;=\; \Lambda(B^{-1}_{\Lambda(A)p})\;\Lambda(A)\;\Lambda(B_p)\;p_\star \;=\; p_\star. \tag{7.26}$$

Das Gruppenelement auf der linken Seite dieser Gleichung ist somit ein Element der Stabilitätsgruppe. Diese Identität machen wir uns zunutze in

$$\begin{aligned} U(A)\;|p,\lambda\rangle &= U(A)\;U(B_p)\;|p_\star,\lambda\rangle \\ &= U(B_{\Lambda(A)p})\;U(B_{\Lambda(A)p})^{-1}\;U(A)\;U(B_p)\;|p_\star,\lambda\rangle \\ &= U(B_{\Lambda(A)p})\;\sum_{\lambda'}|p_\star,\lambda'\rangle\;d(B^{-1}_{\Lambda(A)p}\,A\,B_p)_{\lambda',\lambda} \\ &= \sum_{\lambda'}|\Lambda(A)p,\lambda'\rangle\;d(B^{-1}_{\Lambda(A)p}\,A\,B_p)_{\lambda',\lambda}. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Diese wunderbare Konstruktion induziert aus einer gegebenen Darstellung der Stabilitätsgruppe eine Darstellung der quantenmechanischen Poincaré-Gruppe.

Übungsaufgabe 1) Zeigen Sie, daß die durch (7.27) definierte Wirkung $U(A)$ das Gruppengesetz erfüllt. 2) Zeigen Sie, daß die so definierte Darstellung unitär ist, wenn die Darstellung der kleinen Gruppe unitär ist.

7.2.6 Massive Darstellungen positiver Energie

Wie wir gesehen haben, ist für diese Darstellungen (der Fall 1) die kleine Gruppe gegeben durch $SU(2)$. Die Stabilitätsgruppe ist also die zweifache Überlagerung der Drehgruppe $SO(3)$ des dreidimensionalen Raumes[5].

Die irreduziblen Darstellungen der $SU(2)$ sind uns aus der Quantenmechanik wohlvertraut. Sie werden durch einen halbzahligen Spin $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ numeriert. Eine Basis wird somit aufgespannt durch $|p,\lambda\rangle$ mit $p^2 = m^2$, wobei $p^0 > 0$ ist, und $\lambda = -s, -s+1, \dots, s$. Die Darstellung der kleinen Gruppe ist $2s+1$-dimensional. Die gesamte Darstellung ist unendlich-dimensional.

Übungsaufgabe 1) Studieren Sie noch einmal die Darstellungstheorie der $SU(2)$. 2) Warum ist die Gesamtdarstellung unendlich-dimensional? 3) Geben Sie den Gruppenhomomorphismus $SU(2) \to SO(3)$ an.

[5] Mathematiker belieben diesen Sachverhalt als kurze exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z}_2 \to SU(2) \to SO(3) \to 0$ darzustellen.

7.2.7 Masselose Darstellungen positiver Energie

Die kleine Gruppe der masselosen Darstellungen positiver Energie ist diesmal (der Fall 4) die Gruppe E_2. Diese Gruppe hat einen Normalteiler, nämlich die Untergruppe der Translationen

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{C} \right\}. \tag{7.28}$$

Man unterscheidet nun zwei Fälle. Im ersten Fall ist der Normalteiler trivial dargestellt. Die Darstellungen mit dieser Eigenschaft sind die Darstellungen der kommutativen Gruppe der Rotationen

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \middle| \phi \in (-2\pi, 2\pi) \right\}. \tag{7.29}$$

Alle endlich dimensionalen unitären irreduziblen Darstellungen dieses Typs sind eindimensional und von der einfachen Form

$$d(h) = e^{i\lambda\phi} \tag{7.30}$$

mit $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Man nennt λ auch die Helizität der Darstellung.

Die anderen (treuen) Darstellungen Darstellungen der kleinen Gruppe sind alle unendlich dimensional, da E_2 nicht kompakt ist. Man kann sie wiederum als induzierte Darstellungen konstruieren. Die kleine Gruppe ist in diesem Fall $\mathbb{Z}_2$. Diese Darstellungen sind charakterisiert durch einen Impuls $\pi = (\pi^1, \pi^2)$ mit $\pi^2 = \rho^2$ und eine Zahl $\sigma = \pm 1$, die die Darstellung von $\mathbb{Z}_2$ bestimmt.

Übungsaufgabe Konstruieren Sie die unitären irreduziblen Darstellungen der Gruppe E_2 mit der Methode der induzierten Darstellungen.

7.2.8 Bosonen vs. Fermionen

Die quantenmechanische Poincaré-Gruppe hat das Zentrum $\mathbb{Z}_2$, nämlich die eins und das Gruppenelement

$$\gamma = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix}, \tag{7.31}$$

das eine Rotation um die z-Achse mit Winkel 2π repräsentiert. Das Zentrum ist definiert als die Untergruppe aller Elemente γ, die mit allen Gruppenelementen A vertauschen, für die also

$$U(A,a)\, U(\gamma) = U(\gamma)\, U(A,a) \tag{7.32}$$

gilt. Schurs Lemma besagt nun, daß die Gruppenelemente des Zentrums in einer irreduziblen Darstellung als Vielfache der Identität dargestellt werden. Daraus folgt die Bose-Fermi-Alternative

- $U(\gamma) \;=\; I$ (Boson)
- $U(\gamma) \;=\; -I$ (Fermion)

Wirklich bemerkenswert finde ich, daß die Fundamentaldarstellung der kleinen Gruppe $SU(2)$, die Darstellung mit $s = \frac{1}{2}$, Fermionisch ist. Gruppentheoretisch sind die Fermionen fundamentaler als die Bosonen! Die einfachste Darstellung hingegen, die triviale Darstellung mit $s = 0$, ist Bosonisch.

Übungsaufgabe Die z-Achse scheint hier ausgezeichnet zu sein. Diskutieren Sie eine Rotation um die x-Achse mit Winkel 2π.

7.2.9 Literaturhinweise

Die Grundlage dieser Vorlesung bildet ein Skriptum von Prof. Mack [42]. Die Theorie geht auf Wigner zurück. Eine ausführliche Darlegung der Implikationen der Poincaré-Invarianz in einer Quantentheorie ließt man bei [57] nach. Dort finden sich auch die Referenzen auf Wigners Originalarbeiten.

7.3 Felder mit Spin

Wir wechseln jetzt den Betrachtungswinkel von den Zuständen zu den Feldern der Theorie. Ein Feld mit Spin ist eine operatorwertige Distribution $\phi_\sigma(x)$, die sich unter Poincaré-Transformationen gemäß

$$U(a)\,\phi_\sigma(x)\,U(a)^{-1} \;=\; \phi_\sigma(x+a) \tag{7.33}$$

sowie

$$U(A)\,\phi_\sigma(x)\,U(A)^{-1} \;=\; \sum_{\sigma'} D(A^{-1})_{\sigma,\sigma'}\;\phi_{\sigma'}(\Lambda(A)x) \tag{7.34}$$

transformiert. Dabei ist $D(A)$ eine endlich dimensionale Darstellung der quantenmechanischen Lorentz-Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$. Damit gelangen wir automatisch zu der Problemstellung, die endlich dimensionalen irreduziblen Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$ zu bestimmen.

7.3.1 Unitaritätstrick

Erinnern wir uns zuerst an $SU(2)$. Die Exponentialabbildung liefert einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi:\; \mathbb{R}^3 \ni \vec{\alpha} \;\to\; \phi(\vec{\alpha}) \;=\; \exp\left(\mathrm{i}\vec{\alpha}\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \in SU(2). \tag{7.35}$$

Wenn wir diesen analytisch Fortsetzen bekommen wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi : \mathbb{C}^3 \ni \vec{\alpha} + \mathrm{i}\vec{\beta} \;\to\; \phi(\vec{\alpha} + \mathrm{i}\vec{\beta}) \;=\; \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha} + \mathrm{i}\vec{\beta})\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \in SL(2,\mathbb{C}). \tag{7.36}$$

Sprechen wir nun von Darstellungen. Die Darstellungen der $SU(2)$ sind Gruppenhomomorphismen

$$\mathcal{D}_j : SU(2) \ni \exp\left(\mathrm{i}\vec{\alpha}\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \;\mapsto\; \exp\left(\mathrm{i}\vec{\alpha}\vec{J}_j\right) \in \mathrm{End}(V_j), \tag{7.37}$$

gegeben durch Liealgebra-Homomorphismen $\mathfrak{D}_j : \frac{\vec{\sigma}}{2} \to \vec{J}_j$. Dabei sei j der Spin der Darstellung. Der Darstellungsraum V_j ist ein $2j+1$-dimensionaler Vektorraum. Wir können nun Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$ aus Paaren von Darstellungen $(\mathcal{D}_{j_1}, \mathcal{D}_{j_2})$ der $SU(2)$ zusammenbasteln. Das geht so:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{j_1} \otimes \mathcal{D}_{j_2} : \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha} + \mathrm{i}\beta)\frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \;\mapsto \\ \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha} + \mathrm{i}\beta)\vec{J}_{j_1}\right) \otimes \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha} - \mathrm{i}\beta)\vec{J}_{j_2}\right) \in \mathrm{End}(V_{j_1} \otimes V_{j_2}). \end{aligned} \tag{7.38}$$

Übungsaufgabe 1) Überzeugen Sie sich, daß (7.38) tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus ist. 2) Welche Dimension hat die Darstellung (j_1, j_2)? 3) Geben Sie explizite Formeln für $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ und $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ an.

7.3.2 Konstruktion der (j_1, j_2)-Darstellung

Die Formel (7.38) ist zwar schön, sie ist aber nicht besonders explizit. Wir wollen nun die Darstellungen explizit konstruieren. Betrachten wir $\mathbb{C}^2$. Wir definieren

$$\zeta \;=\; (\zeta_1, \zeta_2), \qquad \zeta^\star \;=\; \begin{pmatrix} \bar{\zeta}_1 \\ \bar{\zeta}_2 \end{pmatrix}. \tag{7.39}$$

Zu $A \in SL(2,\mathbb{C})$ ordnen wir die folgenden Abbildungen

$$A : \zeta \mapsto \zeta A, \qquad A^\star : \zeta^\star \mapsto A^\star \zeta^\star, \tag{7.40}$$

zu. Beachte, daß beide Zuordnungen Antihomomorphismen[6] sind.

Betrachte nun homogene Polynome vom Doppelgrad $(2j_1, 2j_2)$ in ζ und $\bar{\zeta}$, gegeben durch

$$p(\zeta) \;=\; \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{2j_1},\dot{\sigma}_1,\ldots,\dot{\sigma}_{2j_2}=1}^{2} p_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{2j_1},\dot{\sigma}_1,\ldots,\dot{\sigma}_{2j_2}}\; \zeta_{\sigma_1}\cdots\zeta_{\sigma_{2j_1}}\bar{\zeta}_{\dot{\sigma}_1}\cdots\bar{\zeta}_{\dot{\sigma}_{2j_2}} \tag{7.41}$$

[6]Ein Antihomomorphismus ist eine Abbildung α mit $\alpha(AB) = \alpha(B)\alpha(A)$.

Die Koeffizienten seien dabei symmetrisch unter den Permutationen der ungepunkteten und der gepunkteten Indizes.

Auf dem Raum solcher Polynome können wir eine Darstellung der Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$ konstruieren. Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A)(p)_{\sigma_1,\dots,\sigma_{2j_1},\dot\sigma_1,\dots,\dot\sigma_{2j_2}} &= \\ \sum_{\sigma'_1,\dots,\sigma'_{2j_1},\dot\sigma'_1,\dots,\dot\sigma'_{2j_2}} & A_{\sigma_1,\sigma'_1}\cdots A_{\sigma_{2j_1},\sigma'_{2j_1}}\bar A_{\dot\sigma_1,\dot\sigma'_1}\cdots \bar A_{\dot\sigma_{2j_1},\dot\sigma'_{2j_1}} p_{\sigma'_1,\dots,\sigma'_{2j_1},\dot\sigma'_1,\dots,\dot\sigma'_{2j_2}} \end{aligned} \tag{7.42}$$

Eine symmetrische Funktion $p_{\sigma_1,\dots,\sigma_{2j}}$ ist festgelegt durch die Angabe von $p_{1,\dots,1,2\dots,2}$. Es gibt $2j+1$ solche Zahlen. Damit ist die Dimension der Darstellung (7.42) bestimmt. Sie ist $(2j_1+1)(2j_2+1)$-dimensional.

Stellt man keine Symmetriebedingung an die Koeffizienten, bekommt man offensichtlich die Darstellung

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes\cdots\otimes\left(\frac{1}{2},0\right)}_{2j_1}\otimes\underbrace{\left(0,\frac{1}{2}\right)\otimes\cdots\otimes\left(0,\frac{1}{2}\right)}_{2j_2} \tag{7.43}$$

Man erinnere sich nun an die Clebsch-Gordan-Zerlegung von Tensorprodukten von Darstellungen der $SU(2)$. Die Darstellung mit dem höchsten Spin projeziert man aus dem Tensorprodukt der Darstellungsräume mit dem totalen Symmetrisator. (Die anderen bekommt man durch verallgemeinerte Symmetrisatoren, die durch Young-Diagramme dargestellt werden.) Es gilt

$$j_1 = \underbrace{\mathfrak{S}\left(\frac{1}{2}\otimes\cdots\otimes\frac{1}{2}\right)}_{2j_1} \tag{7.44}$$

Indem wir nun fordern, daß die Polynome einzeln symmetrisch in den gepunkteten und den ungepunkteten Indizes sind, extrahieren wir genau die gewünschte Darstellung. Die durch (7.42) definierte Darstellung ist mit anderen Worten

$$(j_1,j_2) = \underbrace{\mathfrak{S}\left\{\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes\cdots\otimes\left(\frac{1}{2},0\right)\right\}}_{2j_1}\otimes\underbrace{\mathfrak{S}\left\{\left(0,\frac{1}{2}\right)\otimes\cdots\otimes\left(0,\frac{1}{2}\right)\right\}}_{2j_2} \tag{7.45}$$

Übungsaufgabe 1) Wir haben zwei Konstruktionen der (j_1,j_2)-Darstellung besprochen. Überzeugen Sie sich, daß die beiden Konstruktionen äquivalent sind. 2) Sind diese Darstellungen unitär? Warum ist die Antwort *nein*?

7.3.3 Teilchen und Felder

Zunächst fordern wir die folgenden Ingredienzen einer relativistischen Quantentheorie. Allgemeinem Brauch folgend postulieren wir einen normierten Poincaré-invarianten Vakuumzustand $|0\rangle$,

$$U(A,a)\;|0\rangle \;=\; |0\rangle, \qquad \langle 0|0\rangle \;=\; 1. \tag{7.46}$$

Weiter postulieren wir Einteilchenzustände $|p,\lambda\rangle$, die sich nach einer irreduziblen unitären Darstellung der Poincaré-Gruppe transformieren. Mit diesen Zuständen assoziiert man Einteilchenerzeugungsoperatoren

$$|p,\lambda\rangle \;=\; a^\star(p,\lambda)|0\rangle. \tag{7.47}$$

Wir kennen das Transformationsverhalten der Einteilchenzustände aus der obigen Darstellungstheorie. Es lautet zur Erinnerung

$$U(a)|p,\lambda\rangle \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}pa}\;|p,\lambda\rangle, \quad U(A)|p,\lambda\rangle \;=\; \sum_{\lambda'} |\Lambda(A)p,\lambda'\rangle\; d(B^{-1}_{\Lambda(A)p} A B_p)_{\lambda',\lambda}. \tag{7.48}$$

Daraus können wir das Transformationsverhalten der Erzeugungsoperatoren bestimmen. Da der Vakuumzustand invariant ist, gilt

$$U(g)|p,\lambda\rangle \;=\; U(g)\;a^\star(p,\lambda)\;|0\rangle \;=\; U(g)\;a^\star(p,\lambda)\;U(g)^{-1}\;|0\rangle. \tag{7.49}$$

Wir finden hieraus ohne Umschweife, daß die beiden Gleichungen

$$U(a)\;a^\star(p,\lambda)\;U(a)^{-1} \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}pa}\;a^\star(p,\lambda) \tag{7.50}$$

und

$$U(A)\;a^\star(p,\lambda)\;U(A)^{-1} \;=\; \sum_{\lambda'} a^\star(\Lambda(A),\lambda')\; d(B^{-1}_{\Lambda(A)p} A B_p)_{\lambda',\lambda} \tag{7.51}$$

gelten müssen. Entsprechende Formeln findet man auch für die Vernichtungsoperatoren. Stellen Sie diese zur Übung auf.

Aus den Auf- und Absteigern können wir nun Feldoperatoren durch eine Art von Fourier-Transformation zusammensetzen. Wir schreiben sie für ein komplexes Feld mit einem invarianten Maß $\mathrm{d}\mu(p)$ in der folgenden Weise

$$\phi_\sigma(x) \;=\; \int \mathrm{d}\mu(p) \sum_\lambda \;\big\{u_\sigma(p,\lambda)\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\;a^\star(p,\lambda) + \bar{v}_\sigma(p,\lambda)\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\;b(p,\lambda)\big\} \tag{7.52}$$

Eine Diskussion der Nützlichkeit des Feldbegriffs würde den gesetzten Rahmen sprengen. Wir ziehen uns hier auf den defensiven Standpunkt zurück, daß die QED in der in der Sprache solcher Felder überliefert wird.

Aus (7.50) folgt sofort, daß das Transformationsverhalten

$$U(a)\ \phi_\sigma(x)\ U(a)^{-1}\ =\ \phi_\sigma(x+a) \tag{7.53}$$

wie gewünscht gilt. Unter welchen Bedingungen gilt jedoch (7.34)? Das können wir leicht ausrechnen. Für den soweit zusammengesetzten Theorierohling finden wir, daß

$$\begin{aligned}
&U(A)\ \phi_\sigma(x)\ U(A)^{-1}\ = \\
&= \int \mathrm{d}\mu(p) \sum_\lambda \left\{ u_\sigma(p,\lambda)\ \mathrm{e}^{ipx}\ U(A)\ a^\star(p,\lambda)\ U(a)^{-1} + \cdots \right\} \\
&= \int \mathrm{d}\mu(p) \sum_\lambda \left\{ u_\sigma(p,\lambda)\ \mathrm{e}^{ipx}\ \sum_{\lambda'} a^\star(\Lambda(A)p,\lambda')\ d(B^{-1}_{\Lambda(A)p} A B_p)_{\lambda',\lambda} + \cdots \right\} \\
&= \int \mathrm{d}\mu(p') \sum_{\lambda'} \left\{ \sum_\lambda d(B^{-1}_{p'} A B_{\Lambda(A)^{-1}p})_{\lambda',\lambda}\ u_\sigma(\Lambda(A)^{-1}p',\lambda) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\Lambda(A)^{-1}p}\ a(p',\lambda') + \cdots \right\} \\
&\stackrel{!}{=} \sum_{\sigma'} D(A^{-1})_{\sigma,\sigma'}\ \phi_{\sigma'}(\Lambda(A)x).
\end{aligned} \tag{7.54}$$

Die zweiten Terme möge der Leser durch eigene Rechnung hinzufügen. Beachten Sie, wie dabei die Invarianz des Integrationsmaßes verwendet wurde. Schauen wir uns zunächst den Ort an. Wir haben

$$x_\mu\ (\Lambda(A)^{-1})^\mu{}_\nu\ p^\nu\ =\ p^\nu\ \Lambda(A)_\nu{}^\mu\ x_\mu\ =\ p_\mu\ \Lambda(A)^\mu{}_\nu\ x^\nu, \tag{7.55}$$

wie es sein soll. (Erinnern Sie sich, daß $\Lambda(A) \in SO(3,1)$, dann ist (7.55) sofort klar.) Um Konsistenz zu erreichen, müssen die beiden Bedingungen

$$\sum_\lambda d(B^{-1}_{p'} A B_{\Lambda(A)^{-1}p})_{\lambda',\lambda}\ u_\sigma(\Lambda(A)^{-1}p',\lambda)\ =\ \sum_{\sigma'} D(A^{-1})_{\sigma,\sigma'}\ u_{\sigma'}(p',\lambda') \tag{7.56}$$

und

$$\sum_\lambda \bar{d}(B^{-1}_{p'} A B_{\Lambda(A)^{-1}p})_{\lambda',\lambda}\ \bar{v}_\sigma(\Lambda(A)^{-1}p',\lambda)\ =\ \sum_{\sigma'} D(A^{-1})_{\sigma,\sigma'}\ \bar{v}_{\sigma'}(p',\lambda') \tag{7.57}$$

erfüllt sein. Man erfüllt sie mit Hilfe der Konstruktionsvorschrift der induzierten Darstellungen.

Betrachten wir zunächst den Spezialfall, wenn $p = p_\star$ der Representant des Lorentz-Orbits ist, und A ein Element der Stabilitätsgruppe von $p_\star$ ist. Dann ist $B_{p_\star} = 1$, und wir erhalten

$$\sum_\lambda d(A)_{\lambda',\lambda}\, u_\sigma(p_\star,\lambda) = \sum_{\sigma'} D(A^{-1})_{\sigma,\sigma'}\; u_{\sigma'}(p_\star,\lambda'), \tag{7.58}$$

$$\sum_\lambda \bar{d}(A)_{\lambda',\lambda}\, \bar{v}_\sigma(p_\star,\lambda) = \sum_{\sigma'} D(A^{-1})_{\sigma,\sigma'}\; \bar{v}_{\sigma'}(p_\star,\lambda'). \tag{7.59}$$

Daraus schließt man, daß die Einschränkung der endlich dimensionalen Darstellung D auf die Stabilitätsgruppe H von $p_\star$ die induzierende Darstellung enthalten muß.

Angenommen wir haben es geschafft, (7.58) zu erfüllen. Dann können wir für gegebene Darstellungen beschließen, daß

$$u_\sigma(p,\lambda) \;=\; \sum_{\sigma'} D(B_p)_{\sigma,\sigma'}\; u_{\sigma'}(p_\star,\lambda). \tag{7.60}$$

Wir haben nur zu zeigen, daß mit dieser Festlegung das Transformationsverhalten (7.56) richtig herauskommt. Man rechnet dies direkt nach:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma'} D(A^{-1})_{\sigma,\sigma'}\; u_{\sigma'}(p,\lambda) \;= \\
&= \sum_{\sigma',\sigma''} D(A^{-1})_{\sigma,\sigma'}\; D(B_p)_{\sigma',\sigma''}\; u_{\sigma''}(p_\star,\lambda) \\
&= \sum_{\sigma',\sigma''} D(B_{\Lambda(A)^{-1}p})_{\sigma,\sigma'}\; D(B^{-1}_{\Lambda(A)^{-1}p} A^{-1} B_p)_{\sigma',\sigma''}\; u_{\sigma''}(p_\star,\lambda) \\
&= \sum_{\sigma'} D(B_{\Lambda(A)^{-1}p})_{\sigma,\sigma'} \;\sum_{\lambda'} d(B_p^{-1} A B_{\Lambda(A)^{-1}p})_{\lambda,\lambda'}\; u_{\sigma'}(p_\star,\lambda') \\
&= \sum_{\lambda'} d(B_p^{-1} A B_{\Lambda(A)^{-1}p})_{\lambda,\lambda'}\; u_\sigma(\Lambda(A)^{-1}p,\lambda').
\end{aligned} \tag{7.61}$$

Die Rechnung sollte Ihnen bekannt vorkommen. Wir haben sie bei der Konstruktion der irreduziblen unitären Darstellungen der Poincaré-Gruppe angewandt.

Eine analoge Konstruktion für den anderen Teil des Feldoperators führt auf die Vorschrift

$$\bar{v}_\sigma(p,\lambda) \;=\; \sum_{\sigma'} D(B_p)_{\sigma,\sigma'}\; \bar{v}_{\sigma'}(p_\star,\lambda). \tag{7.62}$$

Durch direktes Nachrechnen gemäß den Zeilen (7.61) folgt hieraus die Gültigkeit von (7.57), nämlich

$$\sum_{\sigma'} D(A^{-1})_{\sigma,\sigma'}\; \bar{v}_{\sigma'}(p,\lambda) \;=\; \sum_{\lambda'} \bar{d}(B_p^{-1} A B_{\Lambda(A)^{-1}p})_{\lambda,\lambda'}\; \bar{v}_{\sigma'}(\Lambda(A)^{-1}p,\lambda'). \tag{7.63}$$

Zu (7.58) und (7.59) notiere man: wenn die Darstellung $d(A)_{\lambda,\lambda'}$ identisch mit der Darstellung $D(A)_{\sigma,\sigma'}$ sein soll, dann muß die Konjugation mit der Matrix $M_{\sigma,\lambda} = u_\sigma(p_\star, \lambda)$ als Invertierungsoperation wirken.

7.3.4 Leuchtfeuer

Um alle ver(w)irrten Leser wieder in das Fahrwasser zu bugsieren, machen wir kurz eine Bestandsaufnahme. Wir haben konstatiert, daß Teilchen unitären irreduziblen Darstellungen der quantenmechanischen Poincaré-Gruppe zugeordnet werden. Betrachten wir die Aufgabe, ein spezielles solches Teilchen zu beschreiben, sagen wir das Elektron. Wir wissen, daß das Elektron Spin $\frac{1}{2}$ hat und somit zur Fundamentaldarstellung der kleinen Gruppe $SU(2)$ gehört. Dies legt die Darstellung $d(A)_{\lambda,\lambda'}$ fest. (Nach der Methode der induzierten Darstellungen bestimmt man zunächst die Darstellung der Stabilitätsgruppe und induziert daraus die ganze Darstellung.) Die Indizes laufen dabei über die Werte $\{\uparrow, \downarrow\}$, entsprechend Spin $\frac{1}{2}$ und Spin $-\frac{1}{2}$. (Belesene Leser werden sofort nach dem Positron fragen. Geduld - dies ist nur ein provisorisches Leuchtfeuer.) Betrachten wir nun die Aufgabe, dieses Teilchen durch ein Feld zu beschreiben. (Wir beschränken uns dabei auf Teilchen ohne Wechselwirkung. Sie werden durch freie Felder beschrieben.) Es stellt sich die Frage, nach welcher Darstellung sich das Feld transformieren sollte. Eine minimale Konstruktion bestünde darin, anzunehmen, daß sich das Feld nach der Fundamentaldarstellung mit Spin $\frac{1}{2}$ transformiert. Das ist aber keinesfalls der allgemeinste mögliche Fall. Und es ist auch nicht der Fall, den die Natur für das Elektron ausgesucht hat. Folglich sind wir aufgefordert, das Transformationsverhalten $D(A^{-1})_{\sigma,\sigma'}$ von Feldern zu untersuchen und die Einschränkungen zu finden, die eine Teilchenbeschreibung mit Spin $\frac{1}{2}$ diesem auferlegt. Genau das haben wir in den vorhergehenden Abschnitten getan. Die Bedingung lautet, daß die induzierende Darstellung der Stabiltätsgruppe für das Feld die induzierende Darstellung der Stabiltätsgruppe für das Teilchen enthalten muß. Die Betonung liegt hier auf dem Wort Darstellung. Die Stabiltätsgruppe ist natürlich für Teilchen und Feld gleich. Wenn wir einmal eine solche *legitime* Darstellung festgelegt haben, können wir die Maschinerie der Quantenfeldtheorie anwerfen und volle Fahrt voraus machen.

Übungsaufgabe Zeigen Sie (7.57) (analog zu (7.56)).

7.3.5 Massive Darstellungen positiver Energie

Wie bereits erwähnt wurde, ist die kleine Gruppe in diesem Fall $SU(2)$. Eine Darstellung (j_1, j_2) von $SL(2,\mathbb{C})$ enthält nach der Clebsch-Gordan-Zerlegung Darstellungen von $SU(2)$ mit Spin $|j_1 - j_2| \leq s \leq j_1 + j_2$ und $s \bmod 2 = (j_1 + j_2) \bmod 2$. Das bedeutet, daß Teilchen mit Spin s durch

Felder beschrieben werden können, die sich nach der Darstellung (j_1, j_2) transformieren, sofern diese Bedingungen erfüllt sind. Für den Fall $s = \frac{1}{2}$ gelangen wir zu der folgenden Liste von möglichen Darstellungen (j_1, j_2)

- $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (Dimension 2)
- $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (Dimension 6)
- $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ (Dimension 12)

Die Liste läßt sich nach dem erkennbaren Schema ins Unendliche fortsetzen.

Das Dirac-Feld transformiert sich nach einer *reduziblen* Darstellung von $SL(2, \mathbb{C})$, nämlich als direkte Summe der Fundamentaldarstellungen

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{7.64}$$

Diese Darstellung wird irreduzibel, wenn die Gruppe um eine (diskrete) Spiegelung erweitert wird. Siehe dazu die ausführliche Diskussion in [55].

In der chiralen Darstellung der γ-Matrizen, in der γ_5 diagonal ist, ist das Feld gegeben durch die Zusammensetzung von zwei zweikomponentigen Spinoren und transformiert sich einfach gemäß

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad D(A)\psi = \begin{pmatrix} A\phi \\ \epsilon \bar{A} \epsilon^{-1} \chi \end{pmatrix}. \tag{7.65}$$

Der aufmerksame Leser wird im Transformationsverhalten der unteren beiden Komponenten den gepunkteten Spinor wiedererkennen. Hier ist ϵ eine bestimmte 2×2-Matrix.

Übungsaufgabe Suchen Sie in (7.38) die eingebettete $SU(2)$-Darstellung.

7.3.6 Darstellungstheoretische Form der Zweipunktfunktion

In diesem Abschnitt wollen wir die Zweipunktfunktion des Feldes und seines komplex konjugierten Feldes durch die Darstellungsmatrizen ausdrücken.

Man gelangt vor die Alternative, die Theorie mit Kommutatoren oder Antikommutatoren zu quantisieren. Es zeigt sich, daß Fermionen mit Antikommutatoren zu quantisieren sind und Bosonen mit Kommutatoren, wenn man die Lokalitätsbedingung erhebt, daß Felder bei raumartigen Abständen kommutieren sollen. Siehe dazu [60].

Das Maß $\mathrm{d}\mu(p)$ in der Integraldarstellung (7.52) des Feldes sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mu(p) &= \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}\,(2\pi)\delta(p^2 - m^2)\,\Theta(p^0) \\ &= \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p})}\,\mathrm{d}p^0 \delta\big(p^0 - \omega(\mathbf{p})\big), \end{aligned} \tag{7.66}$$

$$\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \tag{7.67}$$

Dieses Integrationsmaß ist eingeschränkt auf die obere Massenschale. Verbildlichen Sie sich dies. Wir fordern dazu passende (Anti-)Kommutationsregeln

$$[a(\mathbf{p},\lambda), a^\star(\mathbf{p}',\lambda')]_\pm \;=\; (2\pi)^3\; 2\omega(\mathbf{p})\; \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\; \delta_{\lambda,\lambda'}. \tag{7.68}$$

Es versteht sich dabei im folgenden, daß auf der Massenschale

$$a^\sharp(p,\lambda) \;=\; a^\sharp\big((\omega(\mathbf{p}),\mathbf{p}),\lambda\big) \;=\; a^\sharp(\mathbf{p},\lambda). \tag{7.69}$$

Nach diesen Vorbereitungen schreiten wir zur Tat, die Berechnung der Zweipunktfunktion

$$\begin{aligned} &\langle 0\,|\phi_\sigma(x)\;\phi^\star_\tau(y)|\,0\rangle \;= \\ &\Big\langle 0\Big|\int \mathrm{d}\mu(p)\sum_\lambda \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\;u_\sigma(p,\lambda)\;a^\star(p,\lambda)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\;\bar v_\sigma(p,\lambda)\;b(p,\lambda)\right\} \\ &\int \mathrm{d}\mu(p')\sum_{\lambda'}\Big\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'y}\;\bar u_\tau(p',\lambda')\;a(p',\lambda')+\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'y}\;v_\tau(p',\lambda')\;b^\star(p',\lambda')\Big\}\Big|0\Big\rangle. \end{aligned} \tag{7.70}$$

Glücklicherweise trägt nur ein einziger Term bei, und die Arbeit viertelt sich zu

$$\begin{aligned} \langle 0\,|\phi_\sigma(x)\;\phi^\star_\tau(y)|\,0\rangle \;=\; &\int \mathrm{d}\mu(p)\sum_\lambda \int \mathrm{d}\mu(p')\sum_{\lambda'} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\;\bar v_\sigma(p,\lambda)\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'y}\;v_\tau(p',\lambda') \\ &\big\langle 0\big|b(p,\lambda)\;b^\star(p',\lambda')\big|0\big\rangle. \end{aligned} \tag{7.71}$$

Der Grundzustandserwartungswert wird nach dem bewährten Muster mit Hilfe der (Anti-)Kommutatorrelation (7.68) (mit a substituiert durch b) berechnet

$$\begin{aligned} \big\langle 0\big|b(p,\lambda)\;b^\star(p',\lambda')\big|0\big\rangle &= \big\langle 0\big|[b(p,\lambda),b^\star(p',\lambda')]_\pm\big|0\big\rangle \\ &= (2\pi)^3\;2\omega(\mathbf{p})\;\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\;\delta_{\lambda,\lambda'}. \end{aligned} \tag{7.72}$$

Diese δ-Funktion eignet sich perfekt, um die p'-Integration in (7.68) auszuführen. Das Resultat der Gymnastik lautet

$$\langle 0\,|\phi_\sigma(x)\;\phi^\star_\tau(y)|\,0\rangle \;=\; \int \mathrm{d}\mu(p)\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}\;\sum_\lambda \bar v_\sigma(p,\lambda)\;v_\tau(p,\lambda). \tag{7.73}$$

In Worten: die Fourier-transformierte der Zweipunktfunktion bestimmt sich als quadratischer Ausdruck der Darstellungsfunktionen im Feldoperator.

Erinnern Sie sich noch an die Formel (7.62)? Mit Ihrer Unterstützung reduziert man den Integranden zu der Form

$$\sum_\lambda \bar v_\sigma(p,\lambda)\;v_\tau(p,\lambda) \;=\; \sum_\lambda\sum_{\sigma'} D(B_p)_{\sigma,\sigma'}\bar v_{\sigma'}(p_\star,\lambda)\sum_{\tau'}\bar D(B_p)_{\tau,\tau'}v_{\tau'}(p_\star,\lambda). \tag{7.74}$$

Über die Wahl der Darstellungsfunktionen $v_\sigma(p_\star,\lambda)$ ist soweit kein Wort gefallen. Später werden wir für den Spin-$\frac{1}{2}$-Fall eine explizite Wahl treffen. Mit Hilfe der beiden sehr schönen Formeln

$$\sum_\lambda \bar{v}_{\sigma'}(p_\star,\lambda) v_{\tau'}(p_\star,\lambda) \;=\; \delta_{\sigma',\tau'} \tag{7.75}$$

und

$$\bar{D}(B_p)_{\tau,\tau'} \;=\; D(B_p^\star)_{\tau',\tau}, \tag{7.76}$$

die wir hier aus dem Hut zaubern wollen, können wir die augenblickliche Verlegenheit überbrücken. Alle Zweifler verweise ich streng zu [60]. Es folgt dann, daß die Fourier-transformierte der Zweipunktfunktion gegeben ist durch

$$\sum_\lambda \bar{v}_\sigma(p,\lambda)\; v_\tau(p,\lambda) \;=\; \sum_{\sigma'} D(B_p)_{\sigma,\sigma'}\; D(B_p^\star)_{\sigma',\tau} \;=\; D(B_p B_p^\star)_{\sigma,\tau}. \tag{7.77}$$

Wir gönnen diesem Ausdruck einen eigenen Namen. Für die Spin-s Darstellung erweist er sich als ein Monom in p vom Grade $2s$. Wir nennen ihn

$$\sum_\lambda \bar{v}_\sigma(p,\lambda)\; v_\tau(p,\lambda) \;=\; m^{-2s}\, \Pi_{\sigma,\tau}(p). \tag{7.78}$$

Die explizite Form von $\Pi(p)$ findet man in [60]. Die Zweipunktfunktion hat nun eine darstellungstheoretische Bedeutung bekommen! Wir folgern hieraus, daß

$$\begin{aligned}\langle 0\,|\phi_\sigma(x)\;\phi_\tau^\star(0)|\,0\rangle &= m^{-2s}\int \mathrm{d}\mu(p)\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\;\Pi_{\sigma,\tau}(p)\\ &= m^{-2s}\;\Pi_{\sigma,\tau}(\mathrm{i}\partial)\int \mathrm{d}\mu(p)\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\\ &= m^{-2s}\;\Pi_{\sigma,\tau}(\mathrm{i}\partial)\;\;\triangle_+(x)\end{aligned} \tag{7.79}$$

gilt. Durch komplexe Konjugation erhält man hieraus die folgende Formel. Es ist üblich, eine weitere Funktion $\bar{\triangle}_+(x) = \triangle_-(x)$ einzuführen. (Lesen Sie bitte die allgemeinen Betrachtungen über kausale Propagatoren in Ihrem Lehrbuch über die Quantenfeldtheorie nach.) Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle 0\,|\phi_\tau^\star(0)\;\phi_\sigma(x)|\,0\rangle &= m^{-2s}\;\Pi_{\sigma,\tau}(-\mathrm{i}\partial)\;\;\triangle_-(x)\\ &= (-m)^{2s}\;\Pi_{\sigma,\tau}(\mathrm{i}\partial)\;\;\triangle_-(x).\end{aligned} \tag{7.80}$$

Mit dieser Erkenntnis können wir den (Anti-)Kommutator von Feldoperatoren ausrechnen. Da er $\mathbb{C}$-wertig und somit gleich dem Vakuumerwartungswert ist, erhalten wir

$$[\phi_\sigma(x),\phi_\tau(0)]_\pm \;=\; m^{-2s}\;\Pi_{\sigma,\tau}(\mathrm{i}\partial)\;\Big\{\triangle_+(x)\pm(-1)^{2s}\,\triangle_-(x)\Big\}. \tag{7.81}$$

Für raumartige Abstände ($x^2 < 0$) kann man zeigen, daß

$$\triangle_+(x) - \triangle_-(x) \;=\; 0, \quad \triangle_+(x) + \triangle_-(x) \;\neq\; 0, \tag{7.82}$$

gilt. Aus der Lokalitätsbedingung, daß der Kommutator (7.81) für raumartige Abstände verschwinden soll, schließen wir, daß

$$\pm\,(-1)^{2s} \;\overset{!}{=}\; -1. \tag{7.83}$$

Wir sind damit zu stolzen Besitzern des Spin-Statistik-Zusammenhangs für freie Felder geworden: Felder mit halbzahligem s müssen mit Antikommutatoren quantisiert werden, Felder mit ganzzahligem Spin hingegen mit Kommutatoren. Die Lokalitätsbedingung bedeutet, daß sich Feldmessungen an raumartig getrennten Punkten gegenseitig nicht beeinflussen.

Übungsaufgabe Durchdenken Sie noch einmal in Ruhe die Highlights dieses Abschnitts: die Formel (7.77) für die Zweipunktfunktion und den Spin-Statistik-Zusammenhang (7.83).

7.3.7 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$-Darstellung

In der $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$-Darstellung von $SL(2,\mathbb{C})$ ist die Darstellungmatrix von A identisch mit der Matrix A. Der Darstellungsraum ist ein zweidimensionaler Vektorraum.

Man könnte vermuten, daß die Zweipunktfunktion von der Wahl der Standardboosts abhängt. Das ist nicht so. Die Standardboosts sind nämlich so gestrickt, daß

$$B_p \underline{p}_\star B_p^\star \;=\; \underline{p} \tag{7.84}$$

gilt. Siehe auch (7.24). Für die massiven Darstellungen positiver Energie wählten wir als Representanten $p_\star = (m, 0, 0, 0)$, der einem ruhenden Teilchen entspricht. In diesem Fall ist

$$\underline{p}_\star \;=\; m\, I \tag{7.85}$$

proportional zur Einheitsmatrix ist. Ergo schließen wir, daß

$$\Pi \;=\; \underline{p} \;=\; \begin{pmatrix} p^0 + p^3 & p^1 - \mathrm{i}p^2 \\ p^1 + \mathrm{i}p^2 & p^0 - p^3 \end{pmatrix} \;=\; p^\mu\, \sigma_\mu. \tag{7.86}$$

Ein solches Feld wird auch Weyl-Fermion genannt. Wir haben soeben die Zweipunktfunktion von Weyl-Fermionen berechnet. Diese Darstellung hat einen komplex konjugierten Zwilling.

7.3.8 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$-Darstellung

In der $\left(0,\frac{1}{2}\right)$-Darstellung von $SL(2,\mathbb{C})$ wird die Matrix A durch ihre komplex konjugierte Matrix $\bar{A}$ dargestellt. Der Darstellungshomomorphismus ist die komplexe Konjugation. In diesem Fall gilt

$$\Pi \;=\; D(B_p B_p^\star) \;=\; \overline{B_p B_p^\star}. \tag{7.87}$$

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir bereits gezeigt, daß in den massiven Darstellungen positiver Energie $B_p B_p^\star \;=\; m^{-1}\,\underline{p}$ gilt. Damit gilt

$$\Pi \;=\; p^\mu\,\overline{\sigma}_\mu. \tag{7.88}$$

Die Form der Funktion Π hängt zwar nicht von der Wahl der Standardboosts ab, sie hängt jedoch von unserer Wahl einer Basis in $\mathbb{C}^2$ ab.

Die Konjugationsmatrix ϵ Definiere eine 2×2-Matrix ϵ durch

$$\epsilon \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon^{-1} \;=\; \epsilon^T \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(\epsilon) \;=\; 1. \tag{7.89}$$

Die Konjugation mit ϵ bewirkt für allgemeine 2×2-Matrizen

$$\epsilon\;A\;\epsilon^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \;=\; \det(A)\;(A^{-1})^T. \tag{7.90}$$

Speziell für Matrizen $A \in SU(2)$ gilt daher $\epsilon A \epsilon^{-1} = \overline{A}$.

Äquivalente Darstellung Wir können die Darstellung $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ in einer zweiten äquivalenten Form schreiben:

$$D(A) \;=\; \epsilon\,\overline{A}\,\epsilon^{-1}. \tag{7.91}$$

Für die Funktion Π ergibt sich dann die schöne neue Formel

$$\Pi \;=\; p^\mu\;\epsilon\,\overline{\sigma}_\mu\;\epsilon^{-1} \;=\; p^0\;I - p^i\;\sigma_i. \tag{7.92}$$

Die komplexe Konjugation haben wir damit für ein Minuszeichen verkaufen können.

7.3.9 $\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,\frac{1}{2}\right)$-Darstellung

Die beiden bisher besprochenen Darstellungen waren zweidimensional. Man nennt die Elemente des Darstellungsraumes in diesem Fall auch Weyl-Spinoren. Man kann die beiden Darstellungen nahtlos zu einer vierdimensionalen *reduziblen* Darstellung zusammenfügen. Die Elemente dieser Darstellung nennt man nun Dirac-Spinoren. Das Dirac-Fermion des vorherigen Kapitels nimmt Werte in dieser Darstellung an. Mit der Berechnung des dazugehörigen Propagators wollen wir unseren Exkurs in die Kellergewölbe (oder sind es die Dachböden) der Quantenfeldtheorie beschließen.

Betrachten wir nun den vierkomponentigen sogenannten Bispinor

$$\psi(x) \;=\; \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \tag{7.93}$$

in dieser Darstellung. Er transformiert sich gemäß der Formel

$$U(A)\;\psi_\alpha(x)\;U(A)^{-1} \;=\; \sum_\beta D_{\alpha,\beta}(A^{-1})\;\psi_\beta\big(\Lambda(A)x\big), \tag{7.94}$$

wobei $D(A)$ die vierdimensionale Darstellung von $SL(2,\mathbb{C})$ ist, die durch

$$D(A) \;=\; \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \epsilon\bar{A}\epsilon^{-1} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^{-1})^\star \end{pmatrix} \tag{7.95}$$

definiert sei. Führen wir noch eine weitere Matrix β ein durch

$$\beta \;=\; \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.96}$$

mit deren Hilfe wir

$$\beta\;D(A)\;\beta \;=\; \begin{pmatrix} (A^{-1})^\star & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \;=\; D(A^{-1})^\star \tag{7.97}$$

bekommen. Man definiert nun einen kovariant adjungierten Bispinor durch die Formel

$$\overline{\psi}(x) \;=\; \psi^\star(x)\;\beta \;=\; (\chi^\star(x), \phi^\star(x)). \tag{7.98}$$

Die Operation ist nicht mit der komplexen Konjugation zu verwechseln. (Komplexe Konjugation des Feldes ist zunächst gar nicht definiert.) (7.98) ist ein Hilfsmittel, um invariante Kombinationen von Bispinoren zu entwerfen. Wir finden nämlich das Transformationsverhalten

$$U(A)\;\overline{\psi}_\alpha(x)\;U(A) \;=\; \sum_\beta \overline{\psi}_\beta(\Lambda(A)x)\;D_{\beta,\alpha}(A). \tag{7.99}$$

Man zeigt dies durch direktes Nachrechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} U(A)\;\psi^\star(x)\;U(A)^{-1}\;\beta &= \;\psi^\star(\Lambda(A)x)\;D(A^{-1})^\star\;\beta \\ &= \;\psi^\star(\Lambda(A)x)\;\beta\;D(A). \end{aligned} \tag{7.100}$$

Für diese Größen können wir nun wiederum den Vakuumerwartungswert von zwei Feldoperatoren bestimmen. Wir finden

$$\big\langle 0\,\big|\psi(x)\;\overline{\psi}(y)\big|\,0\big\rangle \;=\; \begin{pmatrix} \langle 0\,|\phi(x)\;\chi^\star(y)|\,0\rangle & \langle 0\,|\phi(x)\;\phi^\star(y)|\,0\rangle \\ \langle 0\,|\chi(x)\;\chi^\star(y)|\,0\rangle & \langle 0\,|\chi(x)\;\phi^\star(y)|\,0\rangle \end{pmatrix} \tag{7.101}$$

Die Außerdiagonalterme haben wir bereits bestimmt. Sie sind gegeben durch

$$\langle 0\,|\phi(x)\ \phi^\star(x)|\,0\rangle \;=\; m^{-1}\,\Pi^{(12)}(\mathrm{i}\partial)\ \triangle_+\,(x-y), \quad \Pi^{(12)}(p) \;=\; p^0 I + p^i\sigma_i \tag{7.102}$$

und

$$\langle 0\,|\chi(x)\ \chi^\star(y)|\,0\rangle \;=\; m^{-1}\,\Pi^{(21)}(\mathrm{i}\partial)\ \triangle_+\,(x-y), \quad \Pi^{(21)}(p) \;=\; p^0 I - p^i\sigma_i. \tag{7.103}$$

Die anderen Terme bestimmt man ganz analog zu der Rechnung (7.73). Es ergibt sich

$$\langle 0\,|\phi(x)\ \chi^\star(y)|\,0\rangle \;=\; \int \mathrm{d}\mu(p)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}\ \sum_\lambda \bar{v}_\sigma^{(\frac{1}{2},0)}(p,\lambda)\ v_\tau^{(0,\frac{1}{2})}(p,\lambda) \tag{7.104}$$

und

$$\langle 0\,|\chi(x)\ \phi^\star(y)|\,0\rangle \;=\; \int \mathrm{d}\mu(p)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}\ \sum_\lambda \bar{v}_\sigma^{(0,\frac{1}{2})}(p,\lambda)\ v_\tau^{(\frac{1}{2},0)}(p,\lambda) \tag{7.105}$$

in einer sich hoffentlich selbsterklärenden Notation.

Um die Gleichungen (7.104) bzw. (7.105) auszurechnen, ist mir nichts besseres eingefallen, als eine explizite Basis für die Spinoren anzugeben. Dazu müssen wir noch einmal weit zurückgreifen.

$\left(\frac{1}{2},0\right)$-Basis Wir müssen für Elemente A der Stabilitätsgruppe $SU(2)$ eine Basis konstruieren, für die die Formel (7.58) gilt. Im Fall der $\left(\frac{1}{2},0\right)$-Darstellung lautet die zu erfüllende Bedingung

$$\sum_\lambda A_{\lambda',\lambda}\ u_\sigma(p_\star,\lambda) \;=\; \sum_{\sigma'} (A^{-1})_{\sigma,\sigma'}\ u_{\sigma'}(p_\star,\lambda'). \tag{7.106}$$

Eine solche Basis kann man anhand von (7.90) angeben, nämlich

$$u_\sigma(p_\star,\lambda) \;=\; \epsilon_{\sigma,\lambda} \tag{7.107}$$

leistet das Gewünschte. (7.75) ist zunächst ein Selbstgänger. Wir notieren

$$\sum_\lambda \bar{u}_\sigma(p_\star,\lambda)\ u_\tau(p_\star,\lambda) \;=\; \sum_\lambda \epsilon_{\sigma,\lambda}\ \epsilon_{\tau,\lambda} \;=\; \sum_\lambda \epsilon_{\sigma,\lambda}\ (\epsilon^{-1})_{\lambda,\tau} \;=\; \delta_{\sigma,\tau}. \tag{7.108}$$

Anschließend müssen wir (7.106) nachprüfen. Das geht wie folgt

$$\sum_\lambda A_{\lambda',\lambda}\,\epsilon_{\sigma,\lambda} = \sum_\lambda A_{\lambda',\lambda}\,(\epsilon^{-1})_{\lambda,\sigma} = \sum_{\sigma'} (\epsilon^{-1})_{\lambda',\sigma'}\ (A^{-1})_{\sigma,\sigma'} = \sum_{\sigma'} (A^{-1})_{\sigma,\sigma'}\ \epsilon_{\sigma',\lambda'}. \tag{7.109}$$

Dabei haben wir verwendet, daß für $SU(2)$-Matrizen $\epsilon\ A\ \epsilon^{-1} \;=\; (A^{-1})^T$ gilt.

Nach diesem Konsistenzcheck dürfen wir die Konvention (7.107) ungeniert verwenden. Die p-Abhängigkeit berechnet man nun genau wie in (7.60). Für den betrachteten Fall konstruieren wir nach bewährter Manier

$$u_\sigma(p,\lambda) \;=\; \sum_{\sigma'} (B_p)_{\sigma,\sigma'}\ u_{\sigma'}(p_\star,\lambda) \;=\; \sum_{\sigma'} (B_p)_{\sigma,\sigma'}\ \epsilon_{\sigma',\lambda}. \tag{7.110}$$

Die komplexe Konjugation dieses Ausdrucks ergibt weiter

$$\bar{u}_\sigma(p,\lambda) \;=\; \sum_{\sigma'} (\bar{B}_p)_{\sigma,\sigma'}\ \epsilon_{\sigma',\lambda}. \tag{7.111}$$

(Die Spinoren dieses Abschnitts sollten in der Notation von (7.104) und (7.105) alle mit einem Superskript $\big(\frac{1}{2},0\big)$ dekoriert werden, die des folgenden Abschnitts mit $\big(0,\frac{1}{2}\big)$.)

$\big(0,\frac{1}{2}\big)$**-Basis** An dieser Stelle passiert ein sehr willkommener Zufall. Auf der Untergruppe $SU(2)$ von $SL(2,\mathbb{C})$ stimmen A und $\epsilon\bar{A}\epsilon = (A^{-1})^\star$ überein. In dieser Darstellung haben wir somit unmittelbar die Formel (7.106) zu unserer Verfügung. Die p-Abhängigkeit ändert sich allerdings in

$$u_\sigma(p_\star,\lambda) \;=\; \sum_{\sigma'} (\bar{B}_p^{-1})_{\sigma',\sigma}\ \epsilon_{\sigma',\lambda} \;=\; \sum_{\sigma'} (\epsilon^{-1})_{\lambda,\sigma'}\ (\bar{B}_p^{-1})_{\sigma',\sigma}. \tag{7.112}$$

Die komplex konjugierte Gleichung hiervon ist selbstverständlich gegeben durch

$$\bar{u}_\sigma(p_\star,\lambda) \;=\; \sum_{\sigma'} (\epsilon^{-1})_{\lambda,\sigma'}\ (B_p^{-1})_{\sigma',\sigma}. \tag{7.113}$$

Nach diesen etwas mühsamen Präparationsschritten können wir die Spinsummen in (7.104) und (7.105) berechnen. Das Rechnung ergibt

$$\sum_\lambda \bar{v}_\sigma^{(\frac{1}{2},0)}(p,\lambda)\ v_\tau^{(0,\frac{1}{2})}(p,\lambda) \;=\; \sum_{\lambda,\sigma',\tau'} (\bar{B}_p)_{\sigma,\sigma'}\ \epsilon_{\sigma',\lambda}\ (\epsilon^{-1})_{\lambda,\tau'}\ (\bar{B}_p^{-1})_{\tau',\tau} \;=\; \delta_{\sigma,\tau}. \tag{7.114}$$

Der Fourier-Zähler ist in diesem Fall einfach die Einheitsmatrix! Das gilt gleichfalls für den komplex konjugierten Erwartungswert. Das Resultat dieser Übung ist die schöne Formel

$$\Pi^{(11)}(p) \;=\; \Pi^{(22)}(p) \;=\; m. \tag{7.115}$$

Die Fourier-Transformierte der Zweipunktfunktion (7.101) ist somit gegeben durch

$$\begin{pmatrix} m\,I & p^0 I + p^i\sigma^i \\ p^0 I - p^i\sigma^i & m \end{pmatrix} \;=\; \not{p} + m, \tag{7.116}$$

wobei die γ-Matrizen als

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \tag{7.117}$$

herauskommen. Dies sind genau die γ-Matrizen in der chiralen Darstellung. Bis auf den Faktor i, der eine Frage der Konventionen ist, bekommen wir exakt die Formel (6.14) heraus.

7.3.10 Literatur- und Studierhinweise

Das Material dieses Abschnitts stammt aus den sehr lesenswerten Artikeln [60]. Es findet sich ebenfalls in [61]. Die hiesige Darstellung folgt dem Skriptum [42]. Wenn Sie Spaß an der Mathematik haben, empfehle ich die Darstellungstheorie bei [24] nachzulesen. Eine sehr pädagogische Quelle über die Relativitätstheorie mit vielen Informationen, aber ohne formalen Ballast, ist [55]. Die Fundamente der Quantentheorie findet man in [29]. Unerwähnt blieben u. a.

- die diskreten Symmetrietransformationen Raumspiegelung, Zeitspiegelung und Ladungskonjugation,
- die Feldgleichungen,
- die Zeitordnung und die kausalen Propagatoren.

Eventuell werde ich dieses Kapitel später in dieser Hinsicht ergänzen. Wenn Sie es eilig haben, studieren Sie bitte das Buch [61] von Weinberg.

8 Das Photonfeld

In dieser Vorlesung wollen wir das Pfadintegral für das Photonfeld aufstellen. Das Ziel ist, die Faddeev-Popov-Methode zu erklären und (mit minimalem Formalismus) den eichfixierten Photonpropagator zu berechnen. Anschließend sind wir gerüstet für die QED Störungsrechnung.

8.1 Euklidische Wirkung

Betrachten wir ein freies Photonfeld auf der Euklidischen Raum-Zeit. Die Euklidische Wirkung für das freie Photonfeld lautet

$$S_{em}[A_\mu, \partial_\nu A_\mu] \;=\; \int \mathrm{d}^D x \, \mathcal{L}_{em}\big(A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)\big) \tag{8.1}$$

mit

$$\mathcal{L}_{em}\big(A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)\big) \;=\; \frac{1}{4}\, F^{\mu,\nu}(x)\; F_{\mu,\nu}(x), \tag{8.2}$$

wobei

$$F_{\mu,\nu}(x) \;=\; \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \;=\; \partial_{[\mu} A_{\nu]}. \tag{8.3}$$

Dabei heißt $A_\mu(x)$ das Photon- oder Eichfeld, und $F_{\mu,\nu}(x)$ heißt der Feldstärketensor. In der Euklidischen Formulierung ist $g^{\mu,\nu} = g_{\mu,\nu} = \delta_{\mu,\nu}$ und somit $A^\mu(x) = A_\mu(x)$ und $F^{\mu,\nu}(x) = F_{\mu,\nu}(x)$.

Da der Feldstärketensor per Definition anti-symmetrisch ist, können wir die Lagrange-Funktion alternativ wie folgt schreiben

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{em}\big(A_\mu(x), \partial_\nu A_\mu(x)\big) \;&=\; \frac{1}{2}\sum_{\mu<\nu} F_{\mu,\nu}(x)^2 \\ &=\; \frac{1}{2}\left(\sum_i F_{0,i}(x)^2 + \sum_{i<j} F_{i,j}(x)^2\right).\end{aligned} \tag{8.4}$$

Die Lagrange-Dichte ist somit die Summe der Quadrate der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Feldstärke.

Bis auf das Vorzeichen der Euklidischen Konvention sollte Ihnen die Lagrange-Dichte (8.2) aus der klassischen Elektrodynamik bekannt vorkommen [32].

Übungsaufgabe 1) Studieren Sie die Lagrangesche Formulierung der klassischen Elektrodynamik. 2) Studieren Sie die alternative Formulierung (erster Ordnung), bei der $A_\mu(x)$ und $F_{\mu,\nu}(x)$ unabhängige Variablen sind. Siehe [37] und Referenzen darin.

8.1.1 Eichinvarianz

Die Lagrange-Dichte (8.2) besitzt eine fundamentale Symmetrie, die Invarianz unter *Eichtransformationen*. Definiere

$$A_\mu^\Lambda(x) \;=\; A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \tag{8.5}$$

für eine gegebene Funktion $\Lambda(x)$. Dann gilt

$$F^{\Lambda}_{\mu,\nu}(x) \;=\; \partial_{[\mu}A^{\Lambda}_{\nu]} \;=\; \partial_{[\mu}A_{\nu]} \;=\; F_{\mu,\nu}(x). \tag{8.6}$$

Dieser Symmetrie ordnet jeder Eichfeldkonfiguration $A_\mu(x)$ einen *Eichorbit* von Eichfeldkonfigurationen $A^{\Lambda}_{\mu}(x)$ zu, die denselben Feldstärketensor besitzen. Die Eichfeldkonfigurationen eines Eichorbits heißen eichäquivalent.

Übungsaufgabe Überprüfen Sie (8.6).

8.1.2 Regularität der Eichfeldkonfigurationen

Um die Erörterung zu vereinfachen, wollen wir bei der Diskussion klassischer Eichfeldkonfigurationen die folgenden Annahmen machen:

- $A_\mu(x)$ sei eine n-mal stetig differenzierbare Funktion.
- $A_\mu(x)$ strebe gegen Null für $|x| \to \infty$.
- $F_{\mu,\nu}(x)$ sei quadratintegrabel.

Weiterhin wollen wir nur solche Eichtransformationen zulassen, die diese Bedingungen respektieren. Wir stellen daher die folgenden Bedingungen an das Eichfeld:

- $\Lambda(x)$ sei eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion.
- $\Lambda(x)$ strebe gegen Null für $|x| \to \infty$.

Eine weitere Präzisierung würde uns zu weit vom Thema QED abbringen. Die Analysis von Eichfeldern ist ein spannendes Thema für sich. Schauen Sie sich [33] an, um einen Eindruck zu bekommen.

8.1.3 Reine Eichungen

Die Wirkung (8.1) erhält nach einer partiellen Integration die instruktive Gestalt

$$S_{em}[A_\mu, \partial_\nu A_\mu] \;=\; \int \mathrm{d}^D x \; \frac{1}{2} A_\mu(x) \left(-\delta_{\mu,\nu} \bigtriangleup + \partial_\mu \partial_\nu\right) A_\nu(x). \tag{8.7}$$

Dabei haben wir vorausgesetzt, daß die partielle Integration keine Randterme aufliest.

Der Differentialoperator in (8.7) besitzt Nullmoden. Die Nullmoden sind *reine Eichungen* $A_\mu(x) \;=\; \partial_\mu \Lambda(x)$. Es gilt nämlich

$$\left(-\delta_{\mu,\nu} \bigtriangleup + \partial_\mu \partial_\nu\right) \partial_\nu \Lambda(x) \;=\; 0. \tag{8.8}$$

Folglich ist der Differentialoperator in (8.7) nicht invertierbar.

Daraus ergibt sich ein Problem für die naive Pfadintegralquantisierung von (8.7). Die Wirkung ist zwar quadratisch, aber das Gaußsche Pfadintegral läßt sich nicht wie gewohnt berechnen, da der Propagator (das Inverse des Differentialoperators) nicht existiert.

Übungsaufgabe 1) Gibt es weitere Nullmoden als die reinen Eichungen? 2) Zeigen Sie, daß reine Eichungen Eichfeldkonfigurationen mit verschwindender Feldstärke sind.

8.1.4 Die klassischen Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen bekommt man durch Funktionalableitung der Wirkung (8.1) oder einfacher (8.7). Sie lauten

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} S_{em}[A_\mu, \partial_\nu A_\mu] \;=\; \Big(-\delta_{\mu,\nu} \,\triangle + \partial_\mu \partial_\nu\Big) A_\nu(x) \;\stackrel{!}{=}\; 0. \tag{8.9}$$

Aus (8.8) folgt, daß $A_\mu^\Lambda(x)$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist, wenn $A_\mu(x)$ eine Lösung ist.

Wenn man die Lorentz-Eichbedingung $\partial_\mu A_\mu(x) = 0$ fordert, vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu der Potentialgleichung

$$(-\triangle) A_\mu(x) \;=\; 0. \tag{8.10}$$

Auf dem Euklidischen Raume sind die Lösungen der klassischen Bewegungsgleichungen dann harmonische Funktionen. Wissenswertes über harmonische Funktionen findet man in [12, Bd. 2, Kap. 4]. Wenn wir nun weiterhin die Randbedingung fordern, daß das Eichfeld im Unendlichen verschwindet, bleibt als Lösung nur die Nullfunktion übrig.

8.2 Eichbedingungen

Die Eichfelder eines Eichorbits sind physikalisch äquivalent, da der Feldstärketensor auf den Eichorbits konstant ist. Wir können aus jedem Eichorbit einen Representanten auswählen, indem wir zusätzliche *Eichbedingungen* stellen. In der Eichfeldtheorie verwendet man vorzugsweise *lokale* Eichbedingungen der Form

$$\mathcal{F}\big(A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)\big) \;=\; c(x). \tag{8.11}$$

Eichbedingungen sind ein interessantes Thema für sich (Gribov-Kopien, die Arbeiten von Zwanziger), das wir hier nicht in der Tiefe ausloten wollen. Einige Bemerkungen sind allerdings unumgänglich.

Aus Raum-Zeit-Gründen wollen wir die folgende Diskussion auf die Lorentz-Bedingung

$$\partial_\mu A_\mu(x) \;=\; c(x). \tag{8.12}$$

beschränken. Die Lorentz-Bedingung hat den Vorzug, Euklidisch invariant zu sein.

Übungsaufgabe Erkundigen Sie sich in der Literatur über andere Eichbedingungen: die Coulomb-Eichung, die Hamilton-Eichung, die temporale Eichung, die Kammeichung in der Gittereichtheorie.

8.2.1 Zulässigkeit der Lorentz-Bedingung

Damit sich (8.12) als Eichbedingung qualifiziert, muß gezeigt werden, daß für jede Eichfeldkonfiguration $A_\mu(x)$ (genau) eine Eichtransformation $\Lambda(x)$ existiert, für die $A_\mu^\Lambda(x)$ die Eichbedingung erfüllt. Wir gelangen zu

$$\partial_\mu A_\mu^\Lambda(x) \;=\; \partial_\mu A_\mu(x) + \triangle\Lambda(x) \;\stackrel{!}{=}\; c(x). \tag{8.13}$$

Die Eichtransformation $\Lambda(x)$ bestimmt man für eine gegebene Eichfeldkonfiguration $A_\mu(x)$ als Lösung der Poisson-Gleichung

$$(-\triangle)\Lambda(x) \;=\; \partial_\mu A_\mu(x) - c(x). \tag{8.14}$$

Nach dieser *Eichfixierung* verbleiben noch die Eichtransformationen um harmonische Funktionen $(-\triangle)\Lambda(x) \;=\; 0$. Die einzige harmonische Funktion, die im Unendlichen verschwindet, ist die Nullfunktion.

Übungsaufgabe Wie löst man die Poisson-Gleichung (8.14)?

8.2.2 Eichvariation der Lorentz-Bedingung

Die Eichvariation der Eichbedingungen definiert einen linearen Operator auf dem Raum der Eichtransformationen. Für die Lorentz-Bedingung ist dies der durch

$$\frac{\delta}{\delta\Lambda(x)}\,\mathcal{F}\big(A_\mu^\Lambda(y), \partial_\mu A_\nu^\Lambda(y)\big) \;=\; \frac{\delta}{\delta\Lambda(x)}\,\partial_\mu A_\mu^\Lambda(y) \;=\; \triangle_x\,\delta(x-y) \tag{8.15}$$

definierte Differentialoperator

$$\int \mathrm{d}^D y\;\; \triangle_x\;\delta(x-y)\;\Lambda(y) \;=\; \triangle\,\Lambda(x). \tag{8.16}$$

Eine andere Weise festzustellen, ob eine Eichbedingung zulässig ist, besteht darin, zu prüfen, ob der durch die Eichvariation der Eichbedingung gegebene lineare Operator nicht singulär ist. (Damit ist gemeint, daß er keine Nullmoden besitzt.) Für die Lorentz-Bedingung finden wir den Laplace-Operator. Nachdem wir durch die Randbedingung bei Unendlich die harmonischen Funktionen ausgeschaltet haben, ist der Laplace-Operator nicht singulär.

Die Eichvariation der Eichbedingung hat eine geometrische Veranschaulichung. Die Eichbedingung definiert eine Fläche im Raum der Eichfeldkonfigurationen. Wenn die Eichvariation der Eichbedingung nicht singulär ist, schneidet die Eichfläche die Eichorbits transversal.

8.3 Pfadintegralquantisierung

Die Pfadintegraldarstellung für die erzeugende Funktion der Greenschen Funktionen ist formal gegeben durch

$$Z[J] \;=\; \frac{\int \mathcal{D}A\ \mathrm{e}^{-S_{em}[A]+(A,J)}}{\int \mathcal{D}A\ \mathrm{e}^{-S_{em}[A]}}, \tag{8.17}$$

wobei $S_{em}[A]$ die klassische Wirkung (8.7) ist, wobei

$$\mathcal{D}A \;=\; \prod_{x\in\mathbb{R}^D}\prod_{\mu=0}^{D-1} \mathrm{d}A_\mu(x) \tag{8.18}$$

das formale Maß auf dem Raum der Eichfeldkonfigurationen ist, und wobei

$$(A,J) \;=\; \int \mathrm{d}x\ A_\mu(x)\ J_\mu(x) \tag{8.19}$$

ein äußerer Quellenterm ist. Durch funktionale Ableitung nach der äußeren Quelle berechnet man daraus Erwartungswerte

$$\mathcal{O}\left[\frac{\delta}{\delta J}\right] \; Z[J]\bigg|_{J=0} \;=\; \frac{\int \mathcal{D}A \; \mathrm{e}^{-S_{em}[A]} \; \mathcal{O}(A)}{\int \mathcal{D}A \; \mathrm{e}^{-S_{em}[A]}}. \tag{8.20}$$

Sowohl die Wirkung als auch das Eichfeldmaß sind eichinvariant. Betrachten wir ebenfalls eichinvariante Observablen. Für alle Eichtransformationen Λ gilt dann

$$\mathcal{O}\left[A^\Lambda\right] \;=\; \mathcal{O}[A], \qquad S\left[A^\Lambda\right] \;=\; S[A], \qquad \mathcal{D}A^\Lambda \;=\; \mathcal{D}A. \tag{8.21}$$

Dann integrieren wir in (8.20) ein Funktional, das auf den Eichorbits konstant ist. Diese Beobachtung legt eine funktionale Variablentransformation nahe, bei der man das Maß in ein ein Maß über die Eichtransformationen und ein weiteres Maß über die *physikalischen Freiheitsgrade* faktorisiert.

Um Störungsrechnung betreiben zu können besteht auf jeden Fall Handlungsbedarf, da die Nullmoden des Differentialoperators in (8.7) es uns unmöglich machen, (8.17) als Gaußsches Integral berechnen zu können.

Übungsaufgabe Geben Sie Beispiele für eichinvariante Observablen an.

8.3.1 Faddeev-Popov Trick

Faddeev und Popov haben sich eine raffinierte Methode ausgedacht, um das Pfadintegral (8.20) zu eichfixieren. Lesen Sie dazu auch bei [16] nach. Sie besteht in einer Variablentransformation, bei der die Variablen implizit bestimmt sind.

Spielzeugmodell Das folgende Spielzeugmodell aus [46] ist sehr instruktiv. Betrachten wir das zweidimensionale Integral

$$Z(g) \;=\; \int \mathrm{d}^2\phi \; \mathrm{e}^{-S(\phi)}, \qquad S(\phi) \;=\; \frac{1}{g^2}(\phi^2-1)^2, \tag{8.22}$$

wobei $\phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$ und $\phi^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2$ ist. Die Wirkung ist invariant unter Drehungen

$$\begin{pmatrix}\phi_1^\alpha\\ \phi_2^\alpha\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \tag{8.23}$$

Dieses Modell ist auch in einer anderen Hinsicht instruktiv, nämlich als Spielzeugmodell für spontane Symmetriebrechung.

Die Drehsymmetrie nutzt man am besten, indem man zu Polarkoordinaten überzuwechselt. Dann vereinfacht sich (8.22) zu dem eindimensionalen Integral

$$Z(g) \;=\; 2\pi \int_0^\infty \mathrm{d}r \; r \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{g^2}(r^2-1)^2}. \tag{8.24}$$

Wir notieren zum einen einen Faktor 2π, das Volumen der Symmetriegruppe, und zum anderen einen Extrafaktor r im radialen Maß. Wenn wir diesen Ausdruck wieder als zweidimensionales Integral schreiben, bekommen wir

$$Z(g) \;=\; \pi \int \mathrm{d}^2\phi \; \delta(\phi_2) \; |\phi_1| \; \mathrm{e}^{-S(\phi_1,\phi_2)}. \tag{8.25}$$

Diesen Ausdruck wollen wir nun ein zweites Mal ohne die Verwendung der Polarkoordinaten herleiten.

Anstatt explizit die invariante Koordinate anzugeben, führen wir sie implizit durch eine Eichfixierungsbedingung ein, sagen wir

$$f(\phi) \;=\; f(\phi_1, \phi_2) \;=\; \phi_2. \tag{8.26}$$

Anschließend notieren wir für ein beliebiges aber festes ϕ die folgende Formel

$$1 \;=\; \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha \; \delta\left(f\left(\phi^\alpha\right)\right) \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\phi^\alpha) \right|. \tag{8.27}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ kommt daher, daß die Gleichung $f(\phi^\alpha) = 0$ im Intervall $[0, 2\pi]$ stets zwei Lösungen hat. Gleichung (8.27) beruht auf einer ϕ-abhängigen Variablentransformation von α. Die Jacobiante berechnet man durch Eichvariation der Eichbedingung leicht aus. Sie ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\phi^\alpha) \;=\; \frac{\partial}{\partial \alpha} \phi_2^\alpha \;=\; \cos(\alpha)\, \phi_1 - \sin(\alpha)\, \phi_2 \;=\; \phi_1^\alpha \tag{8.28}$$

Der Faddeev-Popov-Trick besteht nun darin, die Eins (8.27) in das (8.22) einzufügen. Das Resultat ist, unter Ausnutzung der Rotationsinvarianz und Vertauschung der Integrationen,

$$\begin{aligned} Z(g) = & \int \mathrm{d}^2\phi \; \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha \; \delta\left(f\left(\phi^\alpha\right)\right) \; \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\phi^\alpha) \right| \; \mathrm{e}^{-S(\phi)} \\ = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha \; \int \mathrm{d}^2\phi \; \delta\left(\phi_2^\alpha\right) \; |\phi_1^\alpha| \; \mathrm{e}^{-S(\phi^\alpha)} \\ = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha \; \int \mathrm{d}^2\phi \; \delta\left(\phi_2\right) \; |\phi_1| \; \mathrm{e}^{-S(\phi)} \\ = & \, \pi \int \mathrm{d}^2\phi \; \delta\left(\phi_2\right) \; |\phi_1| \; \mathrm{e}^{-S(\phi)}. \end{aligned} \tag{8.29}$$

Wir erkennen die Formel (8.25) wieder und schöpfen hinreichend Vertrauen, um genau denselben Trick auf das Pfadintegral des Photonfeldes anzuwenden.

Der Vorteil dieser Formulierung besteht darin, daß sie ohne eine explizite Kenntnis der invarianten Koordinate, in unserem Spielzeugmodell ist das der Betrag von ϕ, auskommt. In Eichfeldtheorien ist diese invariante Koordinate im allgemeinen nämlich nicht bekannt.

Übungsaufgabe Verifizieren Sie diese Formeln für das Gaußsche Spielzeugmodell $S(\phi) \;=\; \frac{1}{2\lambda}\phi^2$.

Eichfixierung des Pfadintegrals Zur Eichfixierung führen wir für jeden Punkt x der Raum-Zeit eine lokale Eichbedingung (8.11) ein. Um Platz zu sparen, schreiben wir sie hier in der Form $\mathcal{F}\left(A(x)\right) \;=\; c(x)$. Dabei sei $c(x)$ zunächst eine gegebene Funktion, beispielsweise Null.

Der Faddeev-Popov-Trick besteht in der Einfügung einer geschickt gewählten Integraldarstellung der eins. In unserem Spielzeugmodell war dies (8.27). Das Analogon hiervon ist ein Funktionalintegral, nämlich

$$1 \;=\; \text{const.} \int \mathcal{D}\Lambda \; \delta\left(\mathcal{F}\left(A^\Lambda\right) - c\right) \; \left| \det\left(\frac{\delta \mathcal{F}\left(A^\Lambda\right)}{\delta \Lambda} \right) \right|. \tag{8.30}$$

Die funktionale δ-Funktion ist hier als Produkt von gewöhnlichen δ-Funktionen

$$\delta\left(\mathcal{F}\left(A^\Lambda\right) - c\right) \;=\; \prod_{x\in\mathbb{R}^D} \delta\left(\mathcal{F}\left(A^\Lambda(x)\right) - c(x)\right) \tag{8.31}$$

zu verstehen. Mit der Determinante in (8.30) ist die Funktionaldeterminante des *Faddeev-Popov-Operators* gemeint, der durch den Kern

$$\mathcal{M}(A^\Lambda|x,y) \;=\; \frac{\delta\mathcal{F}\left(A^\Lambda(x)\right)}{\delta\Lambda(y)} \tag{8.32}$$

gegeben ist. Der Wert der Konstanten const. in (8.30) ist unwesentlich, wie wir gleich sehen werden.

Für eine beliebige gegebene Eichfeldkonfiguration $A_\mu(x)$ lese man die Eichbedingung

$$\mathcal{F}\Big(A^\Lambda(x)\Big) \;=\; \mathcal{F}\Big(A(x) + \partial\Lambda(x)\Big) \;=\; c(x) \tag{8.33}$$

als eine Variablentransformation von $c(x)$ nach $\Lambda(x)$. Von der Eichbedingung wird dabei angenommen, daß für jede Funktion $c(x)$ genau eine Eichtransformation $\Lambda(x)$ existiert, die (8.33) bewerkstelligt. Um dieses sicherzustellen, darf die Faddeev-Popov-Determinante nicht singulär sein.

Den Operator der Eichvariation der Eichbedingung hatten wir für die Lorentz-Bedingung vorsorglich schon bestimmt. Er ist gegeben durch (8.22). In der QED hängt er nicht von der Eichfeldkonfiguration ab. Die Faddeev-Popov-Determinante ist hier eine Konstante, nämlich

$$\det\left(\frac{\delta\mathcal{F}\left(A^\Lambda\right)}{\delta\Lambda}\right) \;=\; \det\left(\triangle\right). \tag{8.34}$$

In unserem Spielzeugmodell ist er keine Konstante. In diesem Sinne ist die QED einfacher als das Integral (8.22).

In nicht-abelschen Eichtheorien ist erweist sich die Faddeev-Popov-Determinante als abhängig vom Eichfeld. Dort Fermionisiert man die Determinante mit Hilfe sogenannter Geisterfelder [16]. Man kann auch in der QED Geister einführen. Da sie aber faktorisieren, haben sie keinen Einfluß auf physikalische Größen.

Analog zum Spielzeugmodell führen wir die Eins (8.30) separat in den Zähler und Nenner von (8.20) ein. Unter Verwendung der Eichinvarianz von $S_{em}[A]$ und

$\mathcal{D}A$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
\langle\, \mathcal{O}[A]\,\rangle &= \frac{\int \mathcal{D}A\, \int \mathcal{D}\Lambda\, \delta\left(\mathcal{F}\left(A^\Lambda\right)-c\right)\, \left|\det\left(\frac{\delta\mathcal{F}(A^\Lambda)}{\delta\Lambda}\right)\right|\, \mathrm{e}^{-S_{em}[A]}\, \mathcal{O}[A]}{\int \mathcal{D}A\, \int \mathcal{D}\Lambda\, \delta\left(\mathcal{F}\left(A^\Lambda\right)-c\right)\, \left|\det\left(\frac{\delta\mathcal{F}(A^\Lambda)}{\delta\Lambda}\right)\right|\, \mathrm{e}^{-S_{em}[A]}} \\
&= \frac{\int \mathcal{D}\Lambda\, \int \mathcal{D}A^\Lambda\, \delta\left(\mathcal{F}\left(A^\Lambda\right)-c\right)\, \left|\det\left(\frac{\delta\mathcal{F}(A^\Lambda)}{\delta\Lambda}\right)\right|\, \mathrm{e}^{-S_{em}[A^\Lambda]}\, \mathcal{O}[A^\Lambda]}{\int \mathcal{D}\Lambda\, \int \mathcal{D}A^\Lambda\, \delta\left(\mathcal{F}\left(A^\Lambda\right)-c\right)\, \left|\det\left(\frac{\delta\mathcal{F}(A^\Lambda)}{\delta\Lambda}\right)\right|\, \mathrm{e}^{-S_{em}[A^\Lambda]}} \\
&= \frac{\int \mathcal{D}\Lambda\, \int \mathcal{D}A\, \delta\left(\mathcal{F}\left(A\right)-c\right)\, \left|\det\left(\mathcal{M}(A)\right)\right|\, \mathrm{e}^{-S_{em}[A]}\, \mathcal{O}[A]}{\int \mathcal{D}\Lambda\, \int \mathcal{D}A\, \delta\left(\mathcal{F}\left(A\right)-c\right)\, \left|\det\left(\mathcal{M}(A)\right)\right|\, \mathrm{e}^{-S_{em}[A]}} \\
&= \frac{\int \mathcal{D}A\, \delta\left(\mathcal{F}\left(A\right)-c\right)\, \left|\det\left(\mathcal{M}(A)\right)\right|\, \mathrm{e}^{-S_{em}[A]}\, \mathcal{O}[A]}{\int \mathcal{D}A\, \delta\left(\mathcal{F}\left(A\right)-c\right)\, \left|\det\left(\mathcal{M}(A)\right)\right|\, \mathrm{e}^{-S_{em}[A]}}
\end{aligned} \tag{8.35}$$

Wenn die Faddeev-Popov-Determinante unabhängig vom Eichfeld ist, und dies ist der Fall für die Lorentz-Eichung in der QED, kann sie herausgekürzt werden. Das Resultat ist die wunderhübsche Formel

$$\langle\, \mathcal{O}[A]\,\rangle \;=\; \frac{\int \mathcal{D}A\, \delta\left(\partial A - c\right)\, \mathrm{e}^{-S_{em}[A]}\, \mathcal{O}[A]}{\int \mathcal{D}A\, \delta\left(\partial A - c\right)\, \mathrm{e}^{-S_{em}[A]}}. \tag{8.36}$$

Sie besagt, daß wir das Funktionalintegral auf die Eichfeldkonfigurationen eines einzigen Eichschnittes beschränken können, ohne Erwartungswerte von eichinvarianten Observablen abzuänderen. Das ist ein sowohl einleuchtendes als auch bemerkenswertes Resultat. Den Eichschnitt können wir dabei durch $c(x)$ vorgeben, wie es uns beliebt.

Mittelung über die Eichschnitte Die Formel (8.36) ist unpraktisch für die Störungsrechnung. Dieses Manko läßt sich aber leicht beheben, indem man über alle Eichschnitte mit einem Gaußschen Gewicht mittelt. Das Konstruktionsprinzip ist immer dasgleiche: die Rückführung komplizierter Integrale auf Gaußsche Integrale. Die umständliche Darstellung (8.30) der Zahl Eins machen wir dazu noch etwas komplizierter:

$$\begin{aligned}
1 = \;\text{const.} \int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}c\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\alpha}\int \mathrm{d}^D x\, c(x)^2}\; \delta\left(\mathcal{F}\left(A^\Lambda\right)-c\right)\; \left|\det\left(\frac{\delta\mathcal{F}\left(A^\Lambda\right)}{\delta\Lambda}\right)\right| \\
= \text{const.} \int \mathcal{D}\Lambda\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\alpha}\int \mathrm{d}^D x\, \mathcal{F}\left(A^\Lambda(x)\right)}\; \left|\det\left(\frac{\delta\mathcal{F}\left(A^\Lambda\right)}{\delta\Lambda}\right)\right|
\end{aligned} \tag{8.37}$$

Die Identität (8.34) fügen wir in nun schon gewohnter Weise separat in den Zähler und Nenner von (8.20) ein. Anschließend kürzen wir die überflüssigen Konstanten aus Zähler und Nenner heraus. Um Schreibarbeit zu sparen, führen wir den *Eichfixierungsterm*

$$\begin{aligned}
S_{ef}[A] &= \frac{1}{2\alpha} \int \mathrm{d}^D x\; \partial_\mu A_\mu(x)^2 \\
&= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^D x\; A_\mu(x)\; \left(-\frac{1}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu\right)\, A_\nu(x)
\end{aligned} \tag{8.38}$$

ein. Das Resultat dieser Manipulation ist, in kompletter Analogie sowohl zum Spielzeugmodell als auch zu obiger Rechnung, ist das folgende eichfixierte Pfadintegral

$$
\begin{aligned}
\langle\, \mathcal{O}[A]\, \rangle &= \frac{\int \mathcal{D}A\ \mathrm{e}^{-S_{em}[A]}\ \mathcal{O}[A]}{\int \mathcal{D}A\ \mathrm{e}^{-S_{em}[A]}} \\
&= \frac{\int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A\ \mathrm{e}^{-S_{em}[A]-S_{ef}[A^{\Lambda}]}\ \mathcal{O}[A]}{\int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A\ \mathrm{e}^{-S_{em}[A]-S_{ef}[A^{\Lambda}]}} \\
&= \frac{\int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A^{\Lambda}\ \mathrm{e}^{-S_{em}[A^{\Lambda}]-S_{ef}[A^{\Lambda}]}\ \mathcal{O}[A^{\Lambda}]}{\int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A^{\Lambda}\ \mathrm{e}^{-S_{em}[A^{\Lambda}]-S_{ef}[A^{\Lambda}]}} \\
&= \frac{\int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A\ \mathrm{e}^{-S_{em}[A]-S_{ef}[A]}\ \mathcal{O}[A]}{\int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A\ \mathrm{e}^{-S_{em}[A]-S_{ef}[A]}} \\
&= \frac{\int \mathcal{D}A\ \mathrm{e}^{-S_{em}[A]-S_{ef}[A]}\ \mathcal{O}[A]}{\int \mathcal{D}A\ \mathrm{e}^{-S_{em}[A]-S_{ef}[A]}}. \qquad (8.39)
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir erneut die Eichinvarianz der Wirkung benutzt, sowie die Eichinvarianz des Eichfeldmaßes und die Eichinvarianz der Observablen. Das eichfixierte erzeugende Funktional der Greenschen Funktionen lautet nun in voller Schönheit

$$
Z[J] \;=\; \frac{\int \mathcal{D}A\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^D x\, A_\mu(x)\left(-\delta_{\mu,\nu}\triangle+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right)A_\nu(x)+\int \mathrm{d}^D x\, A_\mu(x)\, J_\mu(x)}}{\int \mathcal{D}A\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^D x\, A_\mu(x)\left(-\delta_{\mu,\nu}\triangle+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right)A_\nu(x)}} \qquad (8.40)
$$

Dieses Pfadintegral ist ein Gaußsches Integral! Wir können es daher sofort ausrechnen. Es ist gegeben durch

$$
Z[J] \;=\; \exp\left(\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^D x \int \mathrm{d}^D y\ J_\mu(x)\ G_{\mu,\nu}(x,y)\ J_\nu(y)\right), \qquad (8.41)
$$

wobei $G_{\mu,\nu}(x,y)$ der eichfixierte Photonpropagator ist. Die nächste Aufgabe ist, diesen Photonpropagator auszurechnen.

Übungsaufgabe Berechnen Sie einen expliziten Ausdruck für die Greenschen Funktionen des Photonfeldes.

8.3.2 Der eichfixierte Photonpropagator

Der eichfixierte Photonpropagator mit *Eichfixierungsparameter* α ist gegeben durch

$$
G_{\mu,\nu}(x,y) \;=\; \int \frac{\mathrm{d}^p}{(2\pi)^D}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}\ \widetilde{G}_{\mu,\nu}(p), \qquad (8.42)
$$

wobei die Fourier-transformierte desselben gegeben ist durch

$$
\widetilde{G}_{\mu,\nu}(p) \;=\; \frac{1}{p^2}\ \left(\delta_{\mu,\nu}-(1-\alpha)\frac{p_\mu\, p_\nu}{p^2}\right). \qquad (8.43)
$$

Wir müssen noch zeigen, daß dieser Ausdruck tatsächlich das Gewünschte leistet. Dazu rechnen wir nach, daß

$$
\begin{aligned}
&\left(\delta_{\sigma,\mu}-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{p_\sigma\, p_\mu}{p^2}\right)\ \left(\delta_{\mu,\nu}-(1-\alpha)\,\frac{p_\mu\, p_\nu}{p^2}\right) \;= \\
&= \delta_{\sigma,\nu}+\left\{(1-\alpha)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)-(1-\alpha)-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right\}\ \frac{p_\sigma\, p_\nu}{p^2} \qquad (8.44)
\end{aligned}
$$

gleich $\delta_{\sigma,\nu}$ ist, da sich die anderen Terme gegenseitig wegheben. Eine andere Weise, den Propagator zu schreiben ist

$$G_{\mu,\nu}(x,y) \;=\; \left(\delta_{\mu,\nu} - (1-\alpha)\frac{\partial_\mu\,\partial_\nu}{\triangle}\right) \int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}\; \frac{1}{p^2}. \tag{8.45}$$

Verglichen mit dem Propagator des freien skalaren Feldes ist dieser Propagator masselos. (Der Massenparameter ist Null.)

Der Eichfixierungsparameter α (eigentlich eine mißverständliche Wortschöpfung) ist frei wählbar. Eine besonders bequeme Wahl ist die sogenannte Feynman-Eichung $\alpha = 1$. In der Feynman-Eichung hat der Photonpropagator die einfachst mögliche Gestalt.

Übungsaufgabe Diskutieren Sie den Spezialfall $\alpha = 0$ in den obigen Formeln.

8.3.3 Wick-Rotation der Wirkung

Abschließend wollen wir noch die Euklidische Wirkung Wick-rotieren. In Analogie zum skalaren Feld erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta} \int \mathrm{d}^D x\; \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\Theta}\; \sum_i F_{0,i}(x)^2 + \sum_{i<j} F_{i,j}(x)^2\right) \;=\\
&\overset{\Theta=\frac{\pi}{2}}{=}\; -\mathrm{i} \int \mathrm{d}^D x\; \frac{1}{2}\left(\sum_i F_{0,i}(x)^2 - \sum_{i<j} F_{i,j}(x)^2\right)\\
&=\; -\mathrm{i} \int \mathrm{d}^D x\; \frac{-1}{4}\; F^{\mu,\nu}(x)\; F_{\mu,\nu}(x)
\end{aligned} \tag{8.46}$$

in einer etwas komprimierten aber hoffentlich verständlichen Notation.

Übungsaufgabe Wick-rotieren Sie den eichfixierten Photonpropagator (8.42) und (8.43). Leiten Sie analog zum skalaren Feld die $\mathrm{i}\varepsilon$-Vorschrift her.

8.4 Anmerkungen und Literaturhinweise

Wir haben viele wichtige Aspekte von allgemeinen Eichtheorien und speziell der $U(1)$-Eichtheorie außeracht gelassen:

- Systeme mit Nebenbedingungen in der klassischen Mechanik.
- Die kanonische Quantisierung von Systemen mit Nebenbedingungen.
- Das Pfadintegral für Systeme mit Nebenbedingungen.
- Die Nebenbedingungen einer Eichfeldtheorie.
- Die Nebenbedingungen einer $U(1)$-Eichfeldtheorie.
- Die geometrische Bedeutung der Eichinvarianz.
- Wilson-Loops, Paralleltransport, Aharonov-Bohm-Phasen.
- Folgen der Eichinvarianz, das Nöther-Theorem.

- Coulomb-Eichung, Hamilton-Eichung usw.
- Bedeutung der Eichinvarianz in der klassischen Feldtheorie.
- Gupta-Bleuler Quantisierung und das Problem der indefiniten Metrik.
- Gittereichtheorie.
- Gribov-Kopien, Gribov-Horizont und Zwanzigers Untersuchungen.

Eine recht ausführliche Diskussion der Nebenbedingungen finden Sie in [16]. Mehr oder weniger isomorphe Darstellungen finden Sie in anderen Lehrbüchern, etwa [37] oder [10]. Dort finden Sie auch eine Herleitung des Pfadintegrals aus dem kanonischen Formalismus: man quantisiert das Eichfeld kanonisch in der Coulomb-Eichung, leitet das Pfadintegral her und führt anschließend eine Transformation in die kovariante Lorentz-Eichung durch. Betrachten Sie sich als ermuntert, diesen Weg zu studieren.

9 Der QED-Vertex

Soweit besteht unsere Theorie aus zwei ungekoppelten Teilen, einem Materiefeld $(\bar{\psi}_a(x), \psi_a(x))$ und einem Eichfeld $A_\mu(x)$, gegeben durch Lagrange-Dichten

$$\mathcal{L}_{ma}(\bar{\psi}_a(x), \psi_a(x)) = \sum_{a,b} \bar{\psi}_a(x) \; (\mathrm{i}\not{\partial} + m)_{a,b} \; \psi_b(x), \tag{9.1}$$

$$\mathcal{L}_{em}(A_\mu(x)) = \sum_{\mu,\nu} \frac{1}{4} \, F_{\mu,\nu}(x) \; F_{\mu,\nu(x)}. \tag{9.2}$$

In dieser Vorlesung wollen wir die beiden Teile minimal eichinvariant aneinander koppeln: die Wechselwirkung der beiden Felder ist gegeben durch den berühmten QED-Vertex

$$\mathcal{L}_V(\bar{\psi}_a(x), \psi_a(x), A_\mu(x)) \;=\; e \sum_{a,b} \sum_{\mu} \bar{\psi}_a(x) \; \gamma^\mu_{a,b} \; A_\mu(x) \; \psi_b(x). \tag{9.3}$$

Wir können nun eine Lagrangesche Theoriedefinition vornehmen. Die Lagrange-Dichte der QED (ohne Eichfixierung) besteht aus den drei Teilen

$$\mathcal{L}_{QED}(\bar{\psi}, \psi, A) \;=\; \mathcal{L}_{ma}(\bar{\psi}, \psi) + \mathcal{L}_{em}(A) + \mathcal{L}_V(\bar{\psi}, \psi, A). \tag{9.4}$$

Im Verbund mit dem Algortithmus der (renormierten) Störungsrechnung, ist diese Theorie in der Lage, präzise Vorhersagen zu machen.

Die experimentelle Bestätigung der QED macht sie zu einer der größten Errungenschaften der Physik, der Naturwissenschaften und der menschlichen Kultur. (Wenn sie empirisch wiederlegt worden wäre, würden wir uns allerdings jetzt nicht mit ihr beschäftigen.)

Der QED-Vertex (9.3) läßt sich mit Hilfe des Begriffs der kovarianten Ableitung begründen. Die kovariante Ableitung liefert uns ein Werkzeug zur Konstruktion eichinvarianter Wechselwirkungen.

9.1 Die kovariante Ableitung

Für eine gegebene Eichfeldkonfiguration A_μ definieren wir ein kovariante Ableitung[7] ∇^A_μ durch

$$\nabla^A_\mu \;=\; \partial_\mu - \mathrm{i}\, e\, A_\mu(x), \tag{9.5}$$

dabei ist e ein Parameter der Theorie. Wir werden später e als den Betrag der elektrischen Elementarladung interpretieren.

Die kovariante Ableitung hat eine sehr natürliche geometrische Interpretation, auf die ich hier allerdings nicht eingehen möchte: studieren Sie [41] oder [44]. Statt dessen wollen wir uns das Verhalten der kovarianten Ableitung unter Eichtransformationen ansehen. Sei

$$g(x) \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, e\, \Lambda(x)} \tag{9.6}$$

[7]Sie werden in der Literatur die vielleicht natürlichere Variante finden, bei der die Ladung durch Reskalierung des Eichfeldes als Vorfaktor $1/e^2$ in die freie Lagrange-Dichte (9.2) überführt wird. Auch der Faktor i ist eine Konventionsfrage.

die Eichtransformation, eine $U(1)$-wertige Funktion. (Sie haben sich vielleicht schon nach dem Ursprung des Terminus $U(1)$-*Eichfeld* gefragt.) Dann zeigt die folgende Rechnung

$$\begin{aligned} g(x)\,\nabla^A_\mu\, g(x)^{-1} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,e\,\Lambda(x)}\,\left(\partial_\mu - \mathrm{i}\,e\,A_\mu(x)\right)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,e\,\Lambda(x)} \\ &= \partial_\mu - \mathrm{i}\,e\,\left(A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)\right) \\ &= \nabla^{A^\Lambda}_\mu , \end{aligned} \tag{9.7}$$

wie sich die kovariante Ableitung transformiert. Verglichen mit dem Eichfeld finden wir ein homogenes Transformationsgesetz. Das Transformationsgesetz für das Eichfeld lautet in der analogen Schreibweise $A^\Lambda = g\,A\,g^{-1} + \frac{\mathrm{i}}{e}\,g\,\partial\,g^{-1}$. Das homogene Transformationsgesetz (9.7) ist der einfache Grund, warum wir die kovariante Ableitung eingeführt haben. Sie liefert uns eine natürliche Konstruktionsvorschrift für eichinvariante Wechselwirkungen.

Übungsaufgabe Zeigen Sie, daß sich der Feldstärketensor als Kommutator von kovarianten Ableitungen schreiben läßt.

9.2 Minimale eichinvariante Substitution

Merken Sie sich die minimale eichinvariante Substitution als das Rezept, partielle Ableitungen durch kovariante Ableitungen zu ersetzen. Betrachten wir zum Beispiel die Lagrange-Dichte des Dirac-Feldes. Minimale eichinvariante Substitution ergibt

$$\begin{aligned} \bar\psi\left(\mathrm{i}\nabla\!\!\!/^{\,A} + m\right)\psi &= \bar\psi\left\{\mathrm{i}\gamma^\mu\left(\partial_\mu - \mathrm{i}\,e\,A_\mu\right) + m\gamma^\mu\right\}\psi \\ &= \bar\psi\left(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ + e\,A\!\!\!/ + m\right)\psi. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Die Vernunft hinter dieser Vorschrift ist, daß sie eine eichinvariante Lagrange-Dichte liefert, wenn man unter Eichtransformationen gleichzeitig das Materiefeld transformiert. Wir postulieren das folgende Verhalten des Dirac-Feldes unter Eichtransformationen

$$\psi^\Lambda(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,e\,\Lambda(x)}\,\psi(x), \qquad \bar\psi^\Lambda(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,e\,\Lambda(x)}\,\bar\psi(x). \tag{9.9}$$

Die minimal eichinvariante substituierte Lagrange-Dichte des Dirac-Feldes erweist sich nun als eichinvariant. Es gilt nämlich

$$\bar\psi\,\left(\nabla\!\!\!/^{\,A} + m\right)\,\psi = \bar\psi^\Lambda\,\left(\nabla\!\!\!/^{\,A^\Lambda} + m\right)\,\psi^\Lambda. \tag{9.10}$$

Die gute Nachricht dieser Rechnung ist, daß die Lagrange-Dichte (9.4) sich wegen (9.10) als eichinvariant erweist. Für alle Eichtransformationen gilt

$$\mathcal{L}_{QED}(\bar\psi^\Lambda, \psi^\Lambda, A^\Lambda) = \mathcal{L}_{QED}(\bar\psi, \psi, A). \tag{9.11}$$

Die Gleichung ist Kurzschreibweise geschrieben. Sie gilt an jedem Punkt x.

Übungsaufgabe 1) Verifizieren Sie (9.10). 2) Berechnen Sie den kovarianten Laplace-Operator. 3) Koppeln Sie minimal eichinvariant ein komplexes Skalarfeld an das Eichfeld. Welche Wechselwirkungsterme entstehen bei dieser Prozedur?

9.3 Das eichfixierte Pfadintegral

Die Faddeev-Popov-Prozedur läßt sich gleichermaßen auf die gekoppelte Theorie anwenden. Die Details, eine Kopie des oben Gesagten, möchte ich dem Leser überlassen. Das Ergebnis der Eichfixierung ist das eindrucksvolle Pfadintegral

$$\begin{aligned} Z_{QED}[J,\eta,\bar\eta] = &\int \mathcal{D}A \ \exp\left\{-\int \mathrm{d}^D x \ \Big(\mathcal{L}_{em}(A(x)) + \mathcal{L}_{ef}(A(x))\Big)\right\} \\ &\int \mathcal{D}(\bar\psi,\psi) \ \exp\left\{-\int \mathrm{d}^D x \ \mathcal{L}_{ma}(\bar\psi(x),\psi(x))\right\} \\ &\exp\left\{-\int \mathrm{d}^D x \ \mathcal{L}_V(\bar\psi(x),\psi(x),A(x))\right\} \\ &\exp\left\{\int \mathrm{d}^D x \ \Big(\bar\eta(x)\,\psi(x) + \bar\psi(x)\,\eta(x) + A(x)\,J(x)\Big)\right\} \\ &\Big/ \text{const.} \end{aligned} \tag{9.12}$$

Durchdenken Sie bitte noch einmal die Schritte, die zu dieser wunderbaren Formel geführt haben. Die Einzelteile der Wirkung sind durch (6.2), (8.2) und (8.38) gegeben. Schreiben Sie sich die Wirkung bitte noch einmal in voller Länge hinter die Ohren.

9.4 Die QED Störungsreihe

In der Formel (9.12) enthalten die ersten beiden Zeilen der rechten Seite Gaußsche Maße. Unter Verwendung von (3.48), b. z. w. Verallgemeinerungen hiervon, können wir (9.12) in eine für die Störungstheorie geeignete Form umschreiben. Erinnern Sie sich bitte an die Euklidischen Propagatoren

$$S_{a,b}(x,y) \ = \ \int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}\ \frac{\not p_{\,a,b} + m\,\delta_{a,b}}{p^2+m^2} \tag{9.13}$$

und

$$G_{\mu,\nu}(x,y) \ = \ \int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}\ \frac{1}{p^2}\left(\delta_{\mu,\nu} - (1-\alpha)\frac{p_\mu\,p_\nu}{p^2}\right) \tag{9.14}$$

In voller Ausführlichkeit bekommen wir

$$
\begin{aligned}
Z_{QED}[J,\eta,\bar\eta] = \; & \exp\left\{\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^D x \int \mathrm{d}^D y \sum_{\mu,\nu} \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\; G_{\mu,\nu}(x,y)\; \frac{\delta}{\delta A_\nu(x)}\right\} \\
& \exp\left\{-\int \mathrm{d}^D x \int \mathrm{d}^D y \sum_{a,b} \frac{\delta}{\delta \psi_a(x)}\; S_{a,b}(x,y)\; \frac{\delta}{\delta \bar\psi_b(y)}\right\} \\
& \exp\left\{-e\int \mathrm{d}^D x \sum_\mu \sum_{a,b} \bar\psi_a(x)\; \gamma^\mu_{a,b}\; A_\mu(x)\; \psi_b(x)\right\} \\
& \exp\left\{\int \mathrm{d}^D x \sum_a \Big(\bar\eta_a(x)\; \psi_a(x) + \bar\psi_a(x)\; \eta_a(x)\Big)\right\} \\
& \exp\left\{\int \mathrm{d}^D x \sum_\mu \; A_\mu(x)\; J_\mu(x)\right\}\Bigg|_{\bar\psi = \psi = 0 = A} \\
& \Big/ \text{const.} \qquad (9.15)
\end{aligned}
$$

Diese Formel ist die Startlinie für die (unrenormierte) perturbative QED, die ich Ihnen in der Einleitung versprochen habe. An dieser Stelle sollte ich Ihnen die Feynman-Regeln der QED aus (9.15) herleiten. Ich werde das nachholen, sobald ich ein geeignetes Graphikprogramm zum Zeichnen von Feynman-Graphen beherrsche.

Übungsaufgabe Leiten Sie für Fermionen die analoge Formel zu (3.48) her.

9.5 Die Schleifenentwicklung

Voller Enthusiasmus würden Sie sich vermutlich auf die Aufgabe stürzen wollen, die Formel (9.15) in eine Potenzreihe in der Kopplungskonstanten e zu entwickeln, wie wir es für das skalare Feld skizziert haben. (U. a. würden Sie das Auftreten divergenter Beiträge wiederentdecken.) Diese Störungsreihe ist nicht die, welche die professionellen QED-Rechner in perturbativen Rechnungen benutzen. Sie benutzen statt dessen die sogenannte *Schleifenentwicklung*.

- Der Rechenaufwand für Feynman-Integrale wächst mit der Schleifenordnung. Hingegen gibt es Beiträge beliebig hoher Ordnung in der e-Entwicklung die *trivial* auszurechnen sind, die sogenannten *Baumgraphen*.
- Die Schleifenordnung entspricht der Wichtigkeit von Quantenkorrekturen. Die nullte Ordnung entspricht der klassischen Feldtheorie. Die höheren Ordnungen ergeben sich aus einer Sattelpunktentwicklung für das QED-Pfadintegral.
- Die nullte Ordnung der Schleifenentwicklung, die sogenannte *Baumgraphenapproximation* läßt sich leicht ausrechnen, ist renormierungsfrei und enthält bereits die wesentlichen physikalischen Effekte.

Es ist daher keinesfalls verwunderlich, daß sie in Lehrbüchern über die QED in vorderster Linie mit den Baumgraphen konfrontiert werden.

9.5.1 Schleifenzählung

Überspringen Sie bitte den kleinen Abgrund zu den Feynman-Graphen. (Hier muß ich später Material zu Feynman-Graphen eingefügen.) Damit ist der Weg frei zu einer Diskussion der Bedeutung der Schleifenentwicklung.

Betrachten wir einen zusammenhängenden Feynman-Graphen mit den folgenden Kennzeichen:

- E_A = Anzahl externer Photonlinien
- I_A = Anzahl interner Photonlinien
- E_ψ = Anzahl externer Fermionlinien
- I_ψ = Anzahl interner Fermionlinien
- V = Anzahl Vertices

Da der QED-Vertex aus zwei Fermionhalbbeinen und einem Photonhalbbein besteht, gelten die Beziehungen

$$E_A + 2\,I_A \;=\; V, \qquad E_\psi + 2\,I_\psi \;=\; 2\,V. \tag{9.16}$$

Wir ordnen einem solchen Setup eine Schleifenzahl S zu, die wir wie folgt definieren

$$S \;=\; I_A + I_\psi - V + 1. \tag{9.17}$$

Die Schleifenzahl ist entweder Null oder eine positive ganze Zahl. Die Terme mit der Schleifenzahl Null heißen Baumgraphen.

9.5.2 Interpolationsparameter

Die Formel (9.17) gibt uns ein Rezept in die Hand, wie man (9.15) nach Termen mit zunehmender Schleifenzahl entwickeln kann. Dazu führen wir einen *Interpolationsparameter* s mit Werten in $[0,1]$ ein. (In den Lehrbüchern spielt $\hbar$ die Rolle von s, wobei eigentlich nur ein Teil der $\hbar$-Abhängigkeit interpoliert wird.) Wir definieren dann ein interpoliertes erzeugendes Funktional durch

$$\begin{aligned}
Z_{QED}[J,\eta,\bar\eta\,|\,s] = \;& \exp\left\{\frac{s}{2}\int \mathrm{d}^D x \int \mathrm{d}^D y \sum_{\mu,\nu} \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\; G_{\mu,\nu}(x,y)\; \frac{\delta}{\delta A_\nu(x)}\right\} \\
& \exp\left\{-s\int \mathrm{d}^D x \int \mathrm{d}^D y \sum_{a,b} \frac{\delta}{\delta \psi_a(x)}\; S_{a,b}(x,y)\; \frac{\delta}{\delta \bar\psi_b(y)}\right\} \\
& \exp\left\{-\frac{e}{s}\int \mathrm{d}^D x \sum_\mu \sum_{a,b} \bar\psi_a(x)\;\gamma^\mu_{a,b}\;A_\mu(x)\;\psi_b(x)\right\} \\
& \exp\left\{\int \mathrm{d}^D x \sum_a \Big(\bar\eta_a(x)\;\psi_a(x) + \bar\psi_a(x)\;\eta_a(x)\Big)\right\} \\
& \exp\left\{\int \mathrm{d}^D x \sum_\mu \;A_\mu(x)\;J_\mu(x)\right\}\Bigg|_{\bar\psi = \psi = 0 = A} \\
& \Big/ \mathrm{const.}
\end{aligned} \tag{9.18}$$

Die Entwicklung dieses Ausdrucks nach Potenzen von s ist in Anbetracht der Formel (9.17) die Schleifenentwicklung. Sie lautet

$$Z_{QED}[J,\eta,\bar{\eta}\,|\,s] \;=\; \sum_{S=0}^{\infty} \frac{s^S}{S!}\, Z^{(S)}_{QED}[J,\eta,\bar{\eta}]. \tag{9.19}$$

Auf den ersten Blick könnte man Vermuten, daß in dieser Entwicklung auch negative Potenzen von s auftreten müßten. Dies ist nicht der Fall. Den Grund kann man wie folgt beschreiben. Damit ein Vertex beiträgt, müssen seine drei Halblinien alle mit Propagatoren kontrahiert werden. Denken wir uns auch die Propagatoren jeweils in zwei Halbpropagatoren zerlegt. Dann bekommt jeder Vertex insgesamt drei Halbpropagatoren verpaßt. (Wenn er das nicht bekommt, wird er annihiliert.) Jeder Halbpropagator kommt mit einer Potenz $\sqrt{s}$, der Vertex mit Halbpropagatoren kommt daher insgesamt mit einem Faktor $\sqrt{s}$. Daraus wiederum könnte man den Schluß ziehen, daß die Schleifenentwicklung in Wahrheit eine Entwicklung nach Potenzen von $\sqrt{s}$ ist. Wiederum ist dies nicht so, wie man wohl bereits an (9.18) abliest. Der Punkt ist, daß die restlichen Halbpropagatoren zu den äußeren Feldern gerade die richtigen $\sqrt{s}$-Faktoren beitragen, damit die Halbzahligen s-Potenzen aus der Entwicklung verschwinden.

Bemerkung Diese Variante der Schleifenentwicklung ist ein Hausrezept. Sie werden in der Literatur eine andere Vorgehensweise beobachten. Üblicherweise tauscht man die erzeugende Funktion $Z[\bar{\eta},\eta,J]$ gleich gegen eine andere erzeugende Funktion $W[\bar{\eta},\eta,J]$, die erzeugende Funktion der verbundenen Schwinger-Funktionen, durch

$$Z[\bar{\eta},\eta,J] \;=\; \exp\Big\{-W[\bar{\eta},\eta,J]\Big\}. \tag{9.20}$$

(Hier gibt es verschiedene Konventionen für Vorfaktoren.) Diesen Schritt können wir mühelos an beliebiger Stelle im obigen Diskurs machen. Bei diesem Schritt läßt man es aber nicht bewenden. In einem zweiten Schritt Legendre-transformiert man noch $W[\bar{\eta},\eta,J]$ in

$$\begin{aligned}\Gamma[\bar{\psi},\psi,A] = \;& W[\bar{\eta},\eta,J] + \int \mathrm{d}^D x \;\sum_{\mu} J_\mu(x)\, A_\mu(x) \\ & + \int \mathrm{d}^D x \sum_a \Big(\bar{\eta}_a(x)\,\psi_a(x) + \sum_a \bar{\psi}_a(x)\,\eta_a(x)\Big).\end{aligned} \tag{9.21}$$

Anschließend macht man für (9.20) und (9.21) Sattelpunktsentwicklungen im Pfadintegral. Diese Entwicklung entspricht unserer Schleifenentwicklung. Zum Legendre-transformierten erzeugenden Funktional habe ich noch nichts gesagt, um durch eine möglichst minimale Technik die wesentlichen Merkmale der Theorie herauszuarbeiten. (Ich möchte eine Behandlung der Legendre-transformierten noch weiter zurückstellen.)

Ich habe den hausgemachten Weg gewählt, um zu betonen, daß das Konzept der Schleifenentwicklung unabhängig von dem ansonsten sehr nützlichen Organisation in zusammenhängende und 1P-irreduzible Graphenbeiträge ist.

9.6 Schlußbemerkungen

Die kovariante Ableitung ist eine zentrale Begriffsbildung in der Differentialgeometrie. Geometrische Aspekte haben wir aus Platzgründen fortgelassen. Sie sollten sich nicht auf den Genuß verzichten, die geometrischen Parallelen zwischen der Allgemeinen Relativitätstheorie und der Eichfeldtheorie zu studieren. Mir ist leider kein Lehrbuch bekannt, in dem beide Theorien vergleichend unterrichtet werden, außer vielleicht [38]. (Teilen Sie mir bitte mit, wenn Sie eine solche Referenz finden.) Ein gewichtiger Einstieg in das Literaturstudium könnte [44] sein.

Die Schleifenzahl S zählt die Anzahl unabhängiger Integrale in der Impulsraumdarstellung von Feynman-Amplituden. Die Zählung geht so: jeder Propagator bringt D Impulsintegrationen mit, jeder Vertex hat eine δ-Funktion im Gepäck, die Erhaltung des Gesamtimpulses braucht eine dieser δ-Funktionen auf. Überprüfen Sie diese mysteriös anmutende Bemerkung anhand von Beispielen. (Betrachten Sie der Einfachheit halber das skalare Feld.)

10 Diracs Theorie von Elektronen und Positronen

Bisher haben wir uns auf den feldtheoretischen Formalismus konzentriert. Um zu verstehen, auf welche Weise diese Maschine Vorhersagen über Streuamplituden macht, muß man die Dirac-Theorie von freien Elektronen und Positronen beherrschen. Asymptotisch einlaufende Teilchen werden durch Wellenpakete beschrieben, die Lösungen der zugehörigen Wellengleichung sind. Im Falle von Elektronen und Positronen ist dies die Dirac-Gleichung. Der Zweck dieser Vorlesung ist eine kurze Auffrischung Ihrer Erinnerung an die Dirac-Theorie im Minkowski-Raum.

10.1 Dirac-Gleichung

Wir betrachten gleich den allgemeinen Fall einer geradzahligen Raum-Zeit-Dimension D (vielleicht vier). Die Metrik sei gegeben durch $g^{0,0} = 1$, $g^{i,i} = -1$ und sonst Null. Seien γ^μ mit $\mu \in \{0, 1, \ldots, D-1\}$ quadratische Matrizen der Größe $2^{D/2}$, die den Relationen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\, g^{\mu,\nu} \tag{10.1}$$

genügen. Weiter sei γ^0 Hermitesch, und die γ^i seien anti-Hermitesch. Mit anderen Worten,

$$\left(\gamma^0\right)^\dagger = \gamma^0, \qquad \left(\gamma^i\right)^\dagger = -\gamma^i. \tag{10.2}$$

Die Dirac-Gleichung ist die folgende Differentialgleichung erster Ordnung für eine $2^{D/2}$-komponentige Funktion $\psi(x)$:

$$(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\, \psi(x) = 0. \tag{10.3}$$

10.2 Integraldarstellung von Wellenpaketen

Die allgemeine Lösung der Dirac-Gleichung (10.3) läßt sich als ein Art von Fourier-Integral schreiben, nämlich als

$$\psi(x) = \int \mathrm{d}\mu(p) \sum_\alpha \left(b(p,\alpha)\, u(p,\alpha)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + d(p,\alpha)^\star\, v(p,\alpha)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\right). \tag{10.4}$$

Dabei sind $b(p,\alpha)$ und $d(p,\alpha)$ Impulsraumwellenfunktionen. ($d(p,\alpha)^\star$ ist die komplex konjugierte Wellenfunktion.) Sie bestehen aus einer Komponente. Das Mass $\mathrm{d}\mu(p)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{d}\mu(p) = 2\, m\, \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D}\, (2\pi)\delta\left(p^2 - m^2\right)\, \Theta\left(p^0\right). \tag{10.5}$$

Die Integration in (10.4) geht mit anderen Worten über eine Massenschale. (Erinnern Sie sich an die Darstellungstheorie der quantenmechanischen Lorentz-Gruppe.) Durch Ausintegration von p^0 ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi(t,\mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^{D-1}\mathbf{p}}{(2\pi)^{D-1}}\, \frac{m}{\omega(\mathbf{p})} \sum_\alpha \Big\{ & b\left(\omega(\mathbf{p}),\mathbf{p},\alpha\right)\, u\left(\omega(\mathbf{p}),\mathbf{p},\alpha\right)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\mathbf{p})t+\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}} \\ & + d\left(\omega(\mathbf{p}),\mathbf{p},\alpha\right)^\star\, v\left(\omega(\mathbf{p}),\mathbf{p},\alpha\right)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\mathbf{p})t-\mathrm{i}\mathbf{p}\mathbf{x}} \Big\}, \end{aligned} \tag{10.6}$$

wobei

$$\omega(\mathbf{p}) \;=\; \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}. \tag{10.7}$$

Aus verstüdlichen Gründen werden Sie in der Literatur immer die Notation $p = (\omega(\mathbf{p}), \mathbf{p})$ sehen, in der $p^0 = p_0 = \omega(\mathbf{p})$ eine abhängige Variable von $\mathbf{p}$ ist. $u(p,\alpha)$ und $v(p,\alpha)$ sind daher als Funktionen auf der Massenschale aufzufassen. Sie sind die unabhängigen Lösungen der Impulsraum-Dirac-Gleichungen

$$(\not p - m)\, u(p,\alpha) \;=\; 0 \tag{10.8}$$

und

$$(\not p + m)\, v(p,\alpha) \;=\; 0. \tag{10.9}$$

Jede dieser Gleichungen hat $D/2$ Lösungen, die wir mit α durchnumeriert werden. Sie haben die folgende Interpretation in $D = 4$ Dimensionen

- $u\,(p,\alpha)$ Lösung positiver Energie mit Spin α (Elektron)
- $v\,(p,\alpha)$ Lösung negativer Energie mit Spin α (Positron)

10.3 $u^{(\alpha)}(p)$ und $v^{(\alpha)}(p)$ in der Dirac-Darstellung

Wir wählen die Dirac-Darstellung der γ-Matrizen, in der γ^0 diagonal ist. $\left(\gamma^0\right)^2 = 1$ impliziert, daß γ^0 die Eigenwerte ± 1 hat. $\gamma^0\gamma^i = -\gamma^i\gamma^0$ bedingt, daß die Dimension des Eigenraums zu 1 gleich der zu -1 ist. Wir ordnen die Eigenwerte so, daß

$$\gamma^0 \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{10.10}$$

Dann lauten (10.8) und (10.9) im Ruhesystem $p = (m, 0, \ldots, 0)^T$ nun einfach

$$\left(\gamma^0 - 1\right) u^{(\alpha)}(m,0) \;=\; 0 \tag{10.11}$$

und

$$\left(\gamma^0 + 1\right) v^{(\alpha)}(m,0) \;=\; 0. \tag{10.12}$$

Die unabhängigen Lösungen hiervon zu finden, ist ein Kinderspiel. Wir wählen für $\alpha \in \left\{1, \ldots, \frac{D}{2}\right\}$

$$u^{(\alpha)}_\beta(m,0) \;=\; \delta_{\alpha,\beta} \tag{10.13}$$

und

$$v^{(\alpha)}_\beta(m,0) \;=\; \delta_{\alpha,\beta-\frac{D}{2}}. \tag{10.14}$$

Die Notation ist etwas umständlich, sie hat sich aber in der Literatur so eingebürgert. Anschließend notiert man, daß

$$\Lambda_+(p) \;=\; \frac{\not p + m}{2m} \tag{10.15}$$

und

$$\Lambda_-(p) \;=\; \frac{-\not p + m}{2\,m} \tag{10.16}$$

die angenehmen Eigenschaften

$$\Lambda_\sigma(p)\,\Lambda_\tau(p) \;=\; \delta_{\sigma,\tau}\,\Lambda_\tau(p) \tag{10.17}$$

haben. Mit ihrer Hilfe konstruieren wir dann sofort

$$u^{(\alpha)}(p) \;=\; \sqrt{\frac{2\,m}{m+\omega(\mathbf{p})}}\Lambda_+(p)\,u^{(\alpha)}(m,0) \tag{10.18}$$

und

$$v^{(\alpha)}(p) \;=\; \sqrt{\frac{2\,m}{m+\omega(\mathbf{p})}}\Lambda_-(p)\,u^{(\alpha)}(m,0). \tag{10.19}$$

Zur Erinnerung: alle diese Funktionen leben auf der Massenschale. Die Normierungsfaktoren sind so bestimmt, daß umgekehrt

$$\Lambda_+(p) \;=\; \sum_\alpha u^{(\alpha)}(p)\,\bar u^{(\alpha)}(p) \tag{10.20}$$

und

$$\Lambda_-(p) \;=\; -\sum_\alpha v^{(\alpha)}(p)\,\bar v^{(\alpha)}(p) \tag{10.21}$$

gilt.

10.3.1 Projector $\Lambda_+(p)$

Zur Illustration wollen wir die Identität (10.20) beweisen. Ausgehend von der rechten Seite der Gleichung (10.20) gilt

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha u^{(\alpha)}(p)\,\bar u^{\alpha}(p) = &\; \frac{2m}{m+\omega(\mathbf{p})}\;\Lambda_+(p)\;\sum_\alpha u^{(\alpha)}(m,0)\,u^{(\alpha)}(m,0)^\dagger\;\Lambda_+(p)^\dagger\,\gamma^0 \\
= &\; \frac{2m}{m+\omega(\mathbf{p})}\;\Lambda_+(p)\;\frac{1+\gamma^0}{2}\;\Lambda_+(p)^\dagger\,\gamma^0 \\
= &\; \frac{2m}{m+\omega(\mathbf{p})}\;\Lambda_+(p)\;\frac{1+\gamma^0}{2}\;\Lambda_+(p) \\
= &\; \frac{2m}{m+\omega(\mathbf{p})}\;\frac{\not p + m}{2\,m}\;\frac{1+\gamma^0}{2}\;\frac{\not p + m}{2\,m}.
\end{aligned} \tag{10.22}$$

Dabei haben wir benutzt, daß

$$\Lambda_+(p)^\dagger\,\gamma^0 \;=\; \gamma^0\,\gamma^0\,\Lambda_+(p)^\dagger\,\gamma^0 \;=\; \gamma^0\,\Lambda_+ \tag{10.23}$$

gilt. Dies wiederum folgt aus der allgemeinen Formel

$$\gamma^0\,\gamma^i\,\gamma^0 \;=\; -\gamma^i \;=\; \left(\gamma^i\right)^\dagger. \tag{10.24}$$

Die restliche Arbeit erledigt man nun geschwind mit Unterstützung von

$$(\not p + m)\ \gamma^0\ (\not p + m) \ = \ 2\,\omega(\mathbf{p})\ (\not p + m)\,. \tag{10.25}$$

Auch diese Gleichung soll nicht unausgerechnet bleiben. Für sie notieren wir

$$\begin{aligned}
&(\not p + m)\ \gamma^0\ (\not p + m) \ = \\
&= \ \gamma^0\ \left(\not p^{\,\dagger} + m\right)\ (\not p + m) \\
&= \ \gamma^0\ \left(p_0\gamma^0 - p_i\gamma^i + m\right)\ \left(p_0\gamma^0 + p_j\gamma^j + m\right) \\
&= \ \gamma^0\ \left(p_0^2 - p_i\,p_j\,\frac{1}{2}\{\gamma^i,\gamma^j\} + m^2 + 2\,m\,p_0\,\gamma^0 + p_0\,p_i\,\gamma^0\,\gamma^i - p_0\,p_i\,\gamma^i\,\gamma^0\right) \\
&= \ \gamma^0\ \left(p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 + 2\,m\,p_0\,\gamma^0 + 2\,p_0\,p_i\,\gamma^0\,\gamma^i\right) \\
&= 2\,p_0\ \left(p_0\gamma^0 + p_i\gamma^i + m\right) \\
&= 2\,p_0\ (\not p + m)
\end{aligned} \tag{10.26}$$

unter Verwendung von $p_0^2 \ = \ \mathbf{p}^2 + m^2$. Den Rest der Rechnung, ausgehend von (10.25), überlasse ich dem interessierten Leser.

10.4 Eigenschaften von $u^{(\alpha)}(p)$ und $v^{(\alpha)}(p)$

Die Impulsraumspinoren $u^{(\alpha)}(p)$ und $v^{(\alpha)}(p)$ erfüllen eine Vielfalt von nützlichen Gleichungen. Wir inspizieren exemplarisch die folgende Kombination.

10.4.1 Dichte $\bar u^{(\alpha)}(p)\,\gamma^0\,u^{(\beta)}(p)$

Die Größe $\bar u^{(\alpha)}(p)\,\gamma^0\,u^{(\alpha)}(p)$ wird als Wahrscheinlichkeitsdichte einer ebenen Welle interpretiert. Es handelt sich somit um eine Normierungskonstante. Sie berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\bar u^{(\alpha)}(p)\ \gamma^0\ u^{(\beta)}(p) &= \ u^{(\alpha)}(p)^\dagger\ u^{(\beta)}(p) \\
&= \ \frac{2\,m}{m + \omega(\mathbf{p})}\ u^{(\alpha)}(m,\mathbf{0})\ \Lambda_+(p)^\dagger\ \Lambda_+(p)\ u^{(\beta)}(m,\mathbf{0})
\end{aligned} \tag{10.27}$$

Die Matrix in (10.27) berechnet man unter Verwendung von $p^2 \ = \ m^2$ wie folgt

$$\begin{aligned}
\Lambda_+(p)^\dagger\ \Lambda_+(p) &= \ \frac{1}{(2\,m)^2}\ \left(\not p^{\,\dagger} + m\right)\ (\not p + m) \\
&= \frac{2\,p_0}{(2\,m)^2}\ \left(p_0 + m\,\gamma^0 + \gamma^0 p_i\gamma^i\right) \\
&= \frac{2\,p_0}{(2\,m)^2}\ \gamma^0\ (\not p + m) \\
&= \frac{p_0}{m}\ \gamma^0\ \Lambda_+(p) \\
&= \frac{p_0}{m}\ \Lambda_+(p)^\dagger\ \gamma^0\ \Lambda_+(p).
\end{aligned} \tag{10.28}$$

Daraus folgt nun

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\,m}{m+\omega(\mathbf{p})}\; u^{(\alpha)}(m,\mathbf{0})\;\Lambda_+(p)^\dagger\;\Lambda_+(p)\;u^{(\beta)}(m,\mathbf{0}) \;= \\
&= \;\frac{\omega(\mathbf{p})}{m}\;\frac{2\,m}{m+\omega(\mathbf{p})}\; u^{(\alpha)}(m,\mathbf{0})\;\Lambda_+(p)^\dagger\;\gamma^0\;\Lambda_+(p)\;u^{(\beta)}(m,\mathbf{0}) \\
&= \;\frac{\omega(\mathbf{p})}{m}\;\bar{u}^{(\alpha)}(p)\;u^{\beta}(p) \\
&= \;\frac{\omega(\mathbf{p})}{m}\;\delta_{\alpha,\beta}
\end{aligned}
\tag{10.29}
$$

Dabei haben wir uns die folgende Orthogonalitätsbeziehung zunutze gemacht.

10.4.2 Orthogonalitätsbeziehung für $\bar{u}^{(\alpha)}(p)\,u^{(\beta)}(p)$

Da es sich hier um einen Lorentz-Skalar handelt, rechnet man ihn im bequemsten Bezugssystem aus, dem Ruhesystem

$$
\bar{u}^{(\alpha)}(p)\;u^{(\beta)}(p) \;=\; \bar{u}^{(\alpha)}(m,\mathbf{0})\;u^{(\beta)}(m,\mathbf{0}) \;=\; \delta_{\alpha,\beta}. \tag{10.30}
$$

Tatsächlich haben wir die Impulsraumspinoren so *gewählt*, daß sie aufeinander orthogonal sind.

10.5 Normierung von Wellenpaketen

Aus aus dem Wellenpaket (10.4) kann man mindestens zwei aufschlußreiche Lorentz-kovariante Grössen bilden:

- den Skalar $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ und
- den Vektor $\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x)$.

Letzterer wird in der Dirac-Theorie als Wahrscheinlichkeitsstrom interpretiert. Wir wollen diese Dinge hier allerdings nicht vertiefen, sondern nur in einem kurzen Blick auf den Sachverhalt verweilen. Der Strom

$$
j^\mu(x) \;=\; \bar{\psi}(x)\;\gamma^\mu\;\psi(x) \tag{10.31}
$$

ist erhalten. Er genügt nämlich der Gleichung

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\,\partial_\mu\, j^\mu = &\;\mathrm{i}\,\partial_\mu\,\left(\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x)\right) \\
= &\;\bar{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\overleftarrow{\not{\partial}}\;+m\right)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\,(\mathrm{i}\not{\partial}\;-m)\,\psi(x) \\
= &\;0.
\end{aligned}
\tag{10.32}
$$

Der Pfeil deutet dabei die Richtung an in der der Ableitungsoperator wirken soll. Dabei haben wir ausgenutzt, daß $\psi(x)$ der Dirac-Gleichung (10.3) genügt. Anschließend wollen wir die Normierungsbedingung für die Wahrscheinlickkeitsdichte prüfen. Sie ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^0\,\psi(x) \;= \\
&\int \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x} \int \frac{\mathrm{d}^{D-1}\mathbf{p}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{m}{\omega(\mathbf{p})} \sum_\alpha \left(b(p,\alpha)^\star\, u(p,\alpha)^\dagger\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,px} + d(p,\alpha)\, v(p,\alpha)^\dagger \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right) \\
&\quad \int \frac{\mathrm{d}^{D-1}\mathbf{q}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{m}{\omega(\mathbf{q})} \sum_\beta \left(b(q,\beta)\, u(q,\beta)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,qx} + d(q,\beta)^\star\, v(q,\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\right)
\end{aligned}
\tag{10.33}
$$

Unter Verwendung der folgenden Relationen

$$
u(p,\alpha)^\dagger\, u(p,\beta) = \frac{\omega(\mathbf{p})}{m}\,\delta_{\alpha,\beta}, \tag{10.34}
$$

$$
v(p,\alpha)^\dagger\, u(p,\beta) = \frac{\omega(\mathbf{p})}{m}\,\delta_{\alpha,\beta}, \tag{10.35}
$$

$$
u(p,\alpha)^\dagger\, v(-p,\beta) = \left(v(-p,\beta)^\dagger\, u(p,\alpha)\right)^\star \;=\; 0, \tag{10.36}
$$

wobei (10.36) in einer unsauberen Schreibweise geschrieben ist, ergibt sich

$$
\int \mathrm{d}^{D-1}\mathbf{x}\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^0\,\psi(x) \;=\; \int \frac{\mathrm{d}^{D-1}\mathbf{p}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{m}{\omega(\mathbf{p})} \sum_\alpha \left(|b(p,\alpha)|^2 + |d(p,\alpha)|^2\right). \tag{10.37}
$$

Diese Größe wird üblicherweise auf die Eins normiert. Die übrigen Komponenten des Wahrscheinlichkeitsstroms kann man ähnlich ausrechnen. Siehe [31]. Man findet dabei einen interessanten Term, der als *Zitterbewegung* des Elektrons interpretiert wird, und der von den Mischtermen mit der Positronwellenfunktion stammt.

Übungsaufgabe 1) Wie ist (10.36) zu lesen? 2) Wie würden Sie ein Gaußsches Wellenpaket von Elektronen schreiben?

10.6 Propagation von Wellenpaketen

Wir wollen uns nun ansehen, wie Wellenpakete durch den Feynman-Propagator entwickelt werden. Der Feynman-Propagator ist gegeben durch (6.14), nämlich

$$
S_F(x_2,x_1) \;=\; \int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,p\,(x_2-x_1)}\, \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}. \tag{10.38}
$$

Die p^0-Integration kann man mit Hilfe des Residuensatzes ausführen. Dabei hängt die Integrationskontur davon ab, ob t_1 größer oder kleiner als t_2 ist. Das Ergebnis der Integration ist

$$
\begin{aligned}
S(x_1,x_2) \;=\; -\mathrm{i} \int \frac{\mathrm{d}^{D-1}\mathbf{p}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{m}{\omega(\mathbf{p})} \Big(&\Theta(t_2-t_1)\,\Lambda_+(p)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,p\,(x_2-x_1)} \\
&+\Theta(t_1-t_2)\,\Lambda_-(p)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,p\,(x_2-x_1)}\Big).
\end{aligned}
\tag{10.39}
$$

Man interpretiert diese Formel so, daß die Eigenzustände zu $\Lambda_+(p)$ vorwärts in der Zeit propagiert werden, während die Eigenzustände von $\Lambda_-(p)$ rückwärts in der Zeit propagiert werden.

Übungsaufgabe 1) Verifizieren Sie (10.39). 2) Wenden Sie den Feynman-Propagator (10.38) auf das Wellenpaket (10.4) an.

10.7 Literaturhinweise und Anmerkungen

Das Material dieser Vorlesung ist eng an [31] angelehnt. Abweichend von dem früheren Kapitel habe ich deren Normierungskonventionen übernommen. Die klassische Referenz zur Dirac-Gleichung ist [6]. Beachten Sie die unterschiedlichen Normierungskonventionen. Sie werden die Dirac-Gleichung in jedem Lehrbuch über die QED finden. Sehr ansprechend finde ich das Kapitel in [61], da es die Dirac-Gleichung ausgehend von der Darstellungstheorie der Lorentz-Gruppe behandelt. Wenn Sie sich unsicher mit der Dirac-Gleichung fühlen, lesen sie [6].

Eine Aufgabe der QED besteht darin, Streuvorgänge quantitativ richtig zu beschreiben. Um eine solche Beschreibung zu starten, muß man die Streupartner vorgeben. Dies geschieht in der QED wie folgt. Betrachten wir die Streuung von Elektronen und Positronen. Solange die Streupartner weit voneinander entfernt sind, beschreibt man sie in der QED durch Wellenpaket vom Typ (10.4). Häufig betrachtet man auch stationäre Streuvorgänge. In diesem Fall sind die einlaufenden und auslaufenden Teilchen gegeben durch ebene Wellen. Nach dieser kurzen Retrospektive auf die Dirac-Gleichung werden wir Wellenpakete vom Typ (10.4) i. f. verwenden.

11 Erzeugende Funktionen

In diesem Abschnitt möchte ich vier verwandte erzeugende Funktionen besprechen, die in der Euklidischen Quantenfeldtheorie und in der Statistischen Mechanik Verwendung finden.

11.1 Erzeugende Funktion Z

Die elementarste erzeugende Funktion ist die erzeugende Funktion der Euklidischen Greenschen Funktionen, den Schwinger-Funktionen

$$\begin{aligned} Z[J] = & \frac{\int [\mathrm{d}\phi] \; \mathrm{e}^{-S_0[\phi]-S_1[\phi]+(\phi,J)}}{\int [\mathrm{d}\phi] \; \mathrm{e}^{-S_0[\phi]} - S_1[\phi]} \\ = & \left\langle \mathrm{e}^{-S_1[\phi]+(\phi,J)} \right\rangle_0 \; = \; \left\langle \mathrm{e}^{(\phi,J)} \right\rangle \; = \; \left\langle 1 \right\rangle_J \end{aligned} \tag{11.1}$$

Der Einfachheit halber sei ϕ hier ein skalares Feld. Z hat die Gestalt einer *Zustandssumme* der Klassischen Statistischen Mechanik. Die Schwinger-Funktionen bekommt man durch Ableitung nach der Quelle J:

$$\begin{aligned} G_n(x_1, \ldots, x_n) = & \left\langle \mathrm{e}^{(\phi,J)} \; \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \right\rangle \\ = & \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \left\langle \mathrm{e}^{(\phi,J)} \right\rangle \\ = & \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \; Z[J]. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Die Schwinger-Funktionen können als die Momente der durch den Boltzmann-Faktor gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung $\exp\bigl(-S_J[\phi]\bigr)$ auf dem Feldraum $\phi : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}$ (für ein reelles skalares Feld) angesehen werden. Beachten Sie, daß die Quelle J nicht verschwinden muß.

Die Schwinger-Funktionen allgemeiner Bosonischer Felder sind symmetrisch unter Permutationen $(1, 2, \ldots, n) \to (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$. der Argumente.

11.2 Erzeugende Funktion W

Aus der erzeugenden Funktion Z gewinnt man durch Logarithmieren eine neue erzeugende Funktion F. In Formeln:

$$F[J] \; = \; -\ln\Bigl(Z[J]\Bigr), \qquad Z[J] \; = \; \exp\Bigl(-F[J]\Bigr). \tag{11.3}$$

Die Bezeichnung F entstammt der Klassischen Statistischen Mechanik. Dort entspricht sie der *freien Energie*.

Folgende Gründe lassen sich dafür aufzählen, von Z nach F zu wechseln:

1. F ist proportional zum Volumen, wogegen Z eine komplizierte Volumenabhängigkeit besitzt.

2. F ist die erzeugende Funktion der *zusammenhängenden Schwinger-Funktionen*. Die perturbative Berechnung von F führt auf zusammenhängende Feynman-Graphen, die eine Untermenge aller Feynman-Graphen darstellen.

3. Die Z–F Transformation ist eine allgemeine Technik der Statistik. Man nennt sie die Momente-Kumulanten-Transformation.

Die zusammenhängenden Schwingerfunktionen werden mit einem Superskript^c (für connected) markiert. Sie sind explizit gegeben durch

$$G_n^c(x_1,\ldots,x_n) \;=\; -\frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\,F[J]. \tag{11.4}$$

Ohne große Mühe kann man die niedrigsten von ihnen durch Ableiten bestimmen. Man findet

$$\begin{aligned} G_1^c(x_1) &= G_1(x_1), && (11.5)\\ G_2^c(x_1,x_2) &= G_2(x_1,x_2) - G_1(x_1)\,G_1(x_2), && (11.6)\\ G_3^c(x_1,x_2,x_3) &= G_3(x_1,x_2,x_3) - G_2(x_1,x_2)\,G_1(x_3) - G_2(x_1,x_3)\,G_1(x_2)\\ &\quad - G_2(x_2,x_3)\,G_1(x_1) + 2\,G_1(x_1)\,G_1(x_2)\,G_1(x_3). && (11.7) \end{aligned}$$

Wenn man noch einige weitere dieser Kumulanten bestimmt, errät man bald ihr Bildungsgesetz

$$G^c(\{1,\ldots,n\}) \;=\; \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(k-1)!\sum_{I_1,\ldots,I_k} G(I_1)\cdots G(I_k). \tag{11.8}$$

Die Summe geht dabei über alle Partitionen der Menge $\{1,2,\ldots,n\}$ in k disjunkte Mengen I_j. Die Mengen I_j sind dabei nicht-leere Mengen. In Formelsprache:

$$I_j \neq \emptyset, \qquad I_i \cap I_j = \emptyset \quad (i \neq j), \qquad \bigcup_{j=1}^{j} I_j = \{1,2,\ldots,n\}. \tag{11.9}$$

Die Momente-Kumulanten-Transformation ist eine allgemeine Methode der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Die Kumulanten sind Null für statistisch unabhängige Größen.

Wenn wir eine freie Feldtheorie betrachten, bei der die Kovarianz des Gaußschen Maßes, der freie Propagator, gegeben ist durch

$$C(x,y) \;=\; \int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}}{p^2+m^2}. \tag{11.10}$$

Dieser Propagator verschwindet exponentiell schnell im Grenzwert großer Abstände $|x-y|$:

$$|C(x,y)| \;\leq\; \text{const.}\;\mathrm{e}^{-m\,|x-y|}. \tag{11.11}$$

Das bedeutet, daß die Größen $\phi(x)$ und $\phi(y)$ für keinen endlichen Abstand $|x-y|$ statistisch unabhängig sind. Wohl aber nimmt ihre statistische Abhängigkeit exponentiell schnell ab.

Übungsaufgabe 1) Wie lautet die Umkehrung der Formel (11.8)? 2) Beweisen Sie (11.11). Hilfestellung: Was schließen Sie aus der Lage der Pole im Impulsraum?

11.2.1 Kumulantenentwicklung

Die zusammenhängenden Schwinger-Funktionen sind ein Spezialfall einer allgemeineren Klasse von Kumulanten, bei denen die *Einfügung* ein komplizierterer Operator (eine unglückliche aber übliche Bezeichnung) ist als $\phi(x)$. Die allgemeinere Definition ist

$$\Big\langle \mathcal{O}_1; \ldots ; \mathcal{O}_k \Big\rangle^T \;=\; \frac{\partial}{\partial s_1} \cdots \frac{\partial}{\partial s_k} \log \left\{ \left\langle \exp\Big(\sum_{j=1}^{k} s_j \, \mathcal{O}_j \Big) \right\rangle_{s_1 = \cdots = s_k = 0} \right\} . \tag{11.12}$$

Das Superskript^T bezeichnet *trunkierte* Erwartungswerte. (Kumulanten reisen unter verschiedenen Namen.) Damit Sie die Verbindung zur vorherigen Definition nicht übersehen:

$$\Big\langle \mathcal{O}_1 \Big\rangle^T \;=\; \Big\langle \mathcal{O}_1 \Big\rangle, \qquad \Big\langle \mathcal{O}_1 ; \mathcal{O}_2 \Big\rangle^T \;=\; \Big\langle \mathcal{O}_1 \, \mathcal{O}_2 \Big\rangle - \Big\langle \mathcal{O}_1 \Big\rangle \Big\langle \mathcal{O}_1 \Big\rangle . \tag{11.13}$$

Die Störungsreihe für F kann man nun als Entwicklung nach Kumulanten auffassen. Es gilt

$$F[J] \;=\; -\log \Big\langle \exp\big(-S_1\big) \Big\rangle_J \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \Big\langle \big[S_1 ; \big]^k \Big\rangle_J^T \tag{11.14}$$

in einer hoffentlich verständlichen Notation. Das Subskript$_J$ soll hier anzeigen, daß die ursprünglichen Erwartungswerte, die Momente der Theorie, in Anwesenheit des Quellenfeldes J zu berechnen sind.

Eine Variation dieser Entwicklung besteht darin, die Wechselwirkung S_1, oder einen Anteil von ihr, in die Definition der Momente zu stecken. Eine entscheidende Gesichtspunkt in der Euklidischen QFT ist der, ob und wie man die Korrelatoren dann noch berechnen kann.

11.2.2 Variationsidee

Eine recht erfolgreiche Idee besteht darin, zu S_0 einen quadratischen Term, multipliziert mit einem Variationsparameter, zu addieren und diesen simultan von S_1 zu subtrahieren. Nichtperturbativ ist die Theorie unabhängig vom Variationsparameter. Perturbative Approximanten endlicher Ordnung hängen aber vom Variationsparameter ab. Man bestimmt nun den optimalen Wert desselben durch das Variationsprinzip der minimalen Abhängigkeit. Solche Variationsstörungsreihen haben wesentlich verbesserter Konvergenzeigenschaften. Die Idee solcher Variationsprinzipien geht auf Feynman zurück. Sie wurden unter anderem von Kleinert und Mitarbeitern verfeinert und angewandt.

11.3 Erzeugende Funktion V

Eine weitere erzeugende Funktion V ist wie folgt definiert. Verschiebt man das Feld in der Wechselwirkung S_1 um einen äußeren Hintergrund Φ, so gelangt man zu

$$V[\Phi] \;=\; -\log \Big\langle \mathrm{e}^{-S_1(\Phi+\phi)} \Big\rangle_0 \tag{11.15}$$

in der Notation von (11.1). Die erzeugende Funktion V ist mit anderen Worten die Faltung der Wechselwirkung mit dem Gaußschen Maß, das durch die freie Wirkung definiert ist. Sie ist eng verwandt mit F. Es gilt

$$F[J] \;=\; V[C\,J] - \frac{1}{2}(J, C\,J). \tag{11.16}$$

Dabei ist C der freie Propagator der Theorie. Er ist durch den kinetischen Teil S_0 der Wirkung bestimmt:

$$S_0[\phi] \;=\; \frac{1}{2}(\phi, C^{-1}\phi). \tag{11.17}$$

Die Bedeutung der Formel (11.16) erkennt man am besten, indem man sie nach J ableitet. Zunächst definierten wir

$$A_n(x_1, \ldots, x_n) \;=\; -\frac{\delta^n}{\delta\Phi(x_1)\cdots\delta\Phi(x_n)} V[\Phi]. \tag{11.18}$$

Wir nehmen die Ableitungen an einer beliebigen aber festen Referenzkonfiguration $\Phi \,=\, C\,J$. Dann gilt

$$G^c(x_1, x_2) \;= \\ \int \mathrm{d}^D y_1 \int \mathrm{d}^D y_2 \; C(x_1, y_1)\; C(x_2, y_2)\; A_2(y_1, y_2) + C(x_1, x_2). \tag{11.19}$$

(Wir unterstellen, daß C symmetrisch ist.) Die höheren Korrelatoren sind gegeben durch

$$G^c(x_1, \ldots, x_n) \;= \\ \int \mathrm{d}^D y_1 \cdots \int \mathrm{d}^D y_n \; C(x_1, y_1) \cdots C(x_n, y_n)\; A_n(y_1, \ldots, y_n). \tag{11.20}$$

Daraus wird ersichtlich, daß die Funktionen A_n aus den Funktionen G_n^c durch Amputation mit dem freien Propagator C hervorgehen. Anders gesagt, ist V die erzeugende Funktion der, mit dem freien Propagator amputierten, zusammenhängenden Schwinger-Funktionen. Beachten Sie dabei die Sonderrolle der Zweipunktfunktion.

Die erzeugende Funktion V ist eine prominente Größe in der konstruktiven Quantenfeldtheorie, der Unterabteilung der mathematischen Physik, die sich die undankbare Aufgabe gestellt hat, den in dieser Vorlesung auftretenden Symbolen eine mathematisch strenge Bedeutung zu verleihen.

Übungsaufgabe 1) Zeigen Sie (11.16). 2) Bestätigen Sie (11.19) und (11.20). 3) Wie lautet die Kumulantenentwicklung für die erzeugende Funktion V?

Bemerkung Die LSZ-Formel für die S-Matrix besteht in einer Amputation mit einem freien Propagator. Wie lautet die Beziehung zwischen V und der erzeugenden Funktion für die S-Matrix?

11.4 Erzeugende Funktion Γ

Wir kommen nun zum Lieblingskind der Feldtheoretiker unter den erzeugenden Funktionen, der erzeugenden Funktion Γ der sogenannten $1PI$-Vertices. Γ ist definiert als die Legendre-transformierte von F:

$$\Gamma[\Phi] \;=\; F[J] + (\Phi, J), \qquad \frac{\delta}{\delta J(x)} F[J] \;=\; -\Phi(x). \tag{11.21}$$

Die zweite Gleichung definiert dabei implizit J als Funktion von Φ. Die Gleichung (11.21) definiert Γ als die Lösung einer Extremalaufgabe. Das funktioniert allgemein für konvexe Funktionen. Ich verweise in diesem Zusammenhang auf die Literatur (Physik, Mathematik, Numerik, Optimierungstheorie). Die Legendre-Transformation ist Ihnen aus der Thermodynamik bekannt.[8] Die Bedeutung von Φ ergibt sich aus

$$\Phi(x) \;=\; -\frac{\delta}{\delta J(x)} F[J] \;=\; \Big\langle \phi(x) \Big\rangle_J . \tag{11.22}$$

Das Feld $\Phi(x)$ ist somit der Erwartungswert von $\phi(x)$ bei Anwesenheit der äußeren Quelle J.

$\Phi(x)$ wird in der Literatur auch als das klassische Feld bezeichnet. Wir werden synonym die Notation $\phi^{(cl)}(x)$ verwenden. Aus der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta\Phi(x)}\Gamma[\Phi] = &\int \mathrm{d}^D y \; \frac{\delta}{\delta J(y)} F[J] \; \frac{\delta}{\delta\Phi(x)} J(y) \\ &+ J(x) + \int \mathrm{d}^D y \; \Phi(y) \; \frac{\delta}{\delta\Phi(x)} J(y) \\ = &\; J(x).\end{aligned} \tag{11.23}$$

Diese Gleichung hat eine doppelte Bedeutung. Zum einen sagt sie, daß die Umkehrung der Legendre-Transformation wiederum eine Legendre-Transformation ist. Zum anderen kann man diese Gleichung als die Bewegungsgleichung einer, durch Quantenfluktuationen modifizierten, klassischen Feldtheorie auffassen. Man nennt Γ aus diesem Grunde auch die *effektive* Wirkung. Die physikalische Interpretation von Φ ist der eines Mittelwertes von ϕ, wobei die Mittelung über die Quantenfluktuationen geschieht.

11.4.1 Propagatorgleichung für Γ

Wenn wir die Gleichung (11.19) ein zweites Mal ableiten, bekommen wir die folgende Propagatorgleichung

$$\frac{\delta^2}{\delta\Phi(x_1)\,\delta\Phi(x_2)}\Gamma[\Phi] \;=\; \frac{\delta}{\delta\Phi(x_1)} J(x_2) \;=\; \left(G_2^c\right)^{-1}(x_1, x_2). \tag{11.24}$$

Die rechte Seite hiervon ist nämlich das Inverse der zusammenhängenden Zweipunktfunktion

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\Phi(x_2) \;=\; -\frac{\delta^2}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} F[J] \;=\; G^c(x_1, x_2). \tag{11.25}$$

[8] Eine klare Darstellung der Legendre-Transformation findet man Straumanns Lehrbuch über die Thermodynamik.

11.4.2 $1PI$-Vertexfunktionen

Es gibt eine einfache Vorschrift, wie man aus der Kenntnis von Γ die erzeugende Funktion F als Störungsreihe zurückgewinnt. Man bildet alle Baumgraphen, ersetzt die Knoten durch $1PI$-Vertexfunktionen und ersetzt die Linien durch den vollen Propagator.

Dieser Sachverhalt ist perturbativen Rechnungen von großer Bedeutung, da die Vertexfunktionen nur zusammenhängende Feynman-Diagramme umfassen, die bei der Durchtrennung einer Propagatorlinie nicht in zwei Teile zerfallen. ($1PI$ ist ein Akronym für *1 particle irreducible*.) Die Bedingung der Einteilchenirreduzibilität reduziert die Anzahl Feynman-Diagramme einer gegebenen Ordung Störungsrechnung erheblich.

Ich verweise Sie auf die Literatur, wenn Sie diesen Sachverhalt klären möchten. (Mir ist kein einfacher Beweis dieser Baumformel eingefallen.[9])

Übungsaufgabe Studieren Sie die erzeugende Funktion der $1PI$-Vertices für Fermionen.

11.5 Bemerkungen

Über Γ können Sie sich in allen Büchern über die Quantenfeldtheorie erkundigen. Beachten Sie bitte dabei die unterschiedlichen Vorzeichenkonventionen. Eine knappe Diskussion der Transformation von den Momenten zu den Kumulanten finden Sie im Lehrbuch [45] von Prof. Münster. Die Bemerkungen zu V sind hausgemacht. Wenn Sie sich für die konstruktive Feldtheorie interessieren, empfehle ich [25] und die dort erwähnte Literatur.

[9] Dieser Abschnitt ist noch unvollständig.

12 Die Ward-Identität der QED

Wir haben die unrenormierte QED im Sinne einer formalen Störungsreihe durch das eichfixiertes Pfadintegral

$$Z[J,\eta,\bar\eta] \; = \; \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}(\bar\psi,\psi)\;\mathrm{e}^{-S_{QED}\left[A,\psi,\bar\psi\right]-S_{ef}\left[A\right]-S_{qu}\left[A,\psi,\bar\psi,J,\eta,\bar\eta\right]}\Big/\mathrm{const.} \tag{12.1}$$

erklärt. Dabei bezeichnet S_{qu} die Quellenterme. S_{QED} ist eichinvariant. S_{ef} und S_{qu} sind eichvariant. Daraus folgt, daß (12.1) eichvariant ist. Aus der Tatsache, daß *nur* S_{ef} und S_{qu} eichvariant sind, folgt eine wichtige Differentialgleichung für Z, die die Ward-Identität der QED genannt wird.

12.1 Ward-Identität für Z

Die Rechnung, die die WT-Identität ergibt, ist sehr einfach. Wir führen sie explizit durch. Eine Umbenennung der Integrationsvariablen liefert zunächst

$$\begin{aligned}
&Z[J,\eta,\bar\eta]\\
&= \int \mathcal{D}A^\Lambda\,\mathcal{D}(\bar\psi^\Lambda,\psi^\Lambda)\;\mathrm{e}^{-S_{QED}[A^\Lambda,\psi^\Lambda,\bar\psi^\Lambda]-S_{ef}[A^\Lambda]-S_{qu}[A^\Lambda,\psi^\Lambda,\bar\psi^\Lambda,J,\eta,\bar\eta]}\Big/\mathrm{const.}\\
&= \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}(\bar\psi,\psi)\;\mathrm{e}^{-S_{QED}[A,\psi,\bar\psi]-S_{ef}[A^\Lambda]-S_{qu}[A^\Lambda,\psi^\Lambda,\bar\psi^\Lambda,J,\eta,\bar\eta]}\Big/\mathrm{const.}
\end{aligned} \tag{12.2}$$

Die erzeugende Funktion Z ist mit anderen Worten invariant unter Eichtransformationen der eichvarianten Terme des Integranden. Ableitung nach der Eichtransformation ergibt

$$\begin{aligned}
0 = \; & -\frac{\delta}{\delta\Lambda(x)}Z[J,\eta,\bar\eta]\bigg|_{\Lambda=0}\\
= \; & \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}(\bar\psi,\psi)\;\mathrm{e}^{-S_{QED}[A,\psi,\bar\psi]-S_{ef}[A^\Lambda]-S_{qu}[A^\Lambda,\psi^\Lambda,\bar\psi^\Lambda,J,\eta,\bar\eta]}\\
& \frac{\delta}{\delta\Lambda(x)}\left\{S_{ef}[A^\Lambda]+S_{qu}[A^\Lambda,\psi^\Lambda,\bar\psi^\Lambda,J,\eta,\bar\eta]\right\}\Big/\mathrm{const.}\bigg|_{\Lambda=0}\\
= \; & \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}(\bar\psi,\psi)\;\mathrm{e}^{-S_{QED}[A,\psi,\bar\psi]-S_{ef}[A]-S_{qu}[A,\psi,\bar\psi,J,\eta,\bar\eta]}\\
& \frac{\delta}{\delta\Lambda(x)}\bigg|_{\Lambda=0}\left\{S_{ef}[A^\Lambda]+S_{qu}[A^\Lambda,\psi^\Lambda,\bar\psi^\Lambda,J,\eta,\bar\eta]\right\}\Big/\mathrm{const.}
\end{aligned} \tag{12.3}$$

Die Eichvariation des Eichfixierungsterms ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\Lambda(x)}\bigg|_{\Lambda=0} S_{ef}[A^\Lambda] \\
&= \frac{\delta}{\delta\Lambda(x)}\bigg|_{\Lambda=0} \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^D y \left\{A_\mu(y)+\partial_\mu\Lambda(y)\right\}\left(-\frac{1}{\alpha}\partial_\mu\partial_\nu\right)\left\{A_\nu(y)+\partial_\nu\Lambda(y)\right\} \\
&= \frac{\delta}{\delta\Lambda(x)} \int \mathrm{d}^D y\ \Lambda(y)\left(\frac{1}{\alpha}\partial^2\partial_\mu\right) A_\mu(y) \\
&= \frac{1}{\alpha}\,\partial^2\partial_\mu A_\mu(x).
\end{aligned} \tag{12.4}$$

Die Eichvariation der Quellenterme ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\Lambda(x)}\bigg|_{\Lambda=0} S_{qu}[A^\Lambda,\psi^\Lambda,\bar\psi^\Lambda,J,\eta,\bar\eta] \\
&= -\frac{\delta}{\delta\Lambda(x)}\bigg|_{\Lambda=0} \int \mathrm{d}y\ \bigg[\left\{A_\mu(y)+\partial_\mu\Lambda(y)\right\} J_\mu(y) \\
&\qquad + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\Lambda(y)}\,\bar\psi(y)\,\eta(y) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}e\Lambda(y)}\,\bar\eta(y)\,\psi(y)\bigg] \\
&= \partial_\mu J_\mu(x) + \mathrm{i}\,e\,\bar\psi(x)\,\eta(x) - \mathrm{i}\,e\,\bar\eta(x)\,\psi(x).
\end{aligned} \tag{12.5}$$

Daraus folgt die folgende Identität für die erzeugende Funktion Z. Es gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}(\bar\psi,\psi)\ \mathrm{e}^{-S_{QED}[A,\psi,\bar\psi]-S_{ef}[A]-S_{qu}[A,\psi,\bar\psi,J,\eta,\bar\eta]} \\
&\quad \left\{\frac{1}{\alpha}\,\partial^2\partial_\mu A_\mu(x) + \partial_\mu J_\mu(x) + \mathrm{i}\,e\,\bar\psi(x)\,\eta(x) - \mathrm{i}\,e\,\bar\eta(x)\,\psi(x)\right\}\Big/\mathrm{const.} \\
&= \left\{\frac{1}{\alpha}\,\partial^2\partial_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} + \partial_\mu J_\mu(x) + \mathrm{i}\,e\,\eta(x)\,\frac{\delta}{\delta\eta(x)} - \mathrm{i}\,e\,\bar\eta(x)\,\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}\right\} \\
&\quad Z[J,\eta,\bar\eta].
\end{aligned} \tag{12.6}$$

Diese Formel nennt man die Ward-Identität der QED. Sie liefert Beziehungen zwischen verschiedenen Schwinger-Funktionen. Diese Beziehungen sind außerordentlich wichtig bei theoretischen Untersuchung der QED, beispielsweise, wenn man ihre Renormierbarkeit zeigen möchte.

12.2 Ward-Identitäten für F und Γ

Wenn man Z durch $\exp\bigl(-F\bigr)$ ersetzt, erhält man sofort die folgende äquivalente Form der Ward-Identität (12.6),

$$\left\{\frac{1}{\alpha}\,\partial^2\partial_\mu\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} + \mathrm{i}\,e\,\eta(x)\,\frac{\delta}{\delta\eta(x)} - \mathrm{i}\,e\,\bar\eta(x)\,\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}\right\} F[J,\eta,\bar\eta] - \partial_\mu J_\mu(x) = 0. \tag{12.7}$$

Um die Ward-Identität für Γ zu bekommen, notieren wir in Verallgemeinerung von (11.21) und (11.23) die Beziehungen

$$\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}F[J,\eta,\bar\eta] \;=\; -A_\mu^{(cl)}(x), \qquad J_\mu(x) \;=\; \frac{\delta}{\delta A_\mu^{(cl)}(x)}\Gamma[A^{(cl)},\psi^{(cl)},\bar\psi^{(cl)}], \tag{12.8}$$

sowie

$$\frac{\delta}{\delta\eta(x)}F[J,\eta,\bar\eta] \;=\; \bar\psi^{(cl)}(x), \qquad \eta(x) \;=\; \frac{\delta}{\delta\bar\psi^{(cl)}(x)}\Gamma[A^{(cl)},\psi^{(cl)},\bar\psi^{(cl)}] \tag{12.9}$$

und

$$\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}F[J,\eta,\bar\eta] \;=\; -\psi^{(cl)}(x), \qquad \bar\eta(x) \;=\; -\frac{\delta}{\delta\bar\psi^{(cl)}(x)}\Gamma[A^{(cl)},\psi^{(cl)},\bar\psi^{(cl)}] \tag{12.10}$$

Eingesetzt in (12.7) bekommen wir daraus die schöne neue Formel

$$\begin{aligned}\left\{\partial_\mu\frac{\delta}{\delta A_\mu^{(cl)}(x)} + \mathrm{i}\,e\,\bar\psi^{(cl)}(x)\,\frac{\delta}{\delta\bar\psi^{(cl)}(x)} - \mathrm{i}\,e\,\psi^{(cl)}(x)\frac{\delta}{\delta\psi^{(cl)}(x)}\right\}&\\ \Gamma[A^{(cl)},\psi^{(cl)},\bar\psi^{(cl)}] + \frac{1}{\alpha}\partial^2\partial_\mu A_\mu^{(cl)}(x) \;=\; 0.&\end{aligned} \tag{12.11}$$

Diese Form der Ward-Identität wird auch Lee-Zinn-Justin-Identität genannt. Sie stellt eine Differentialgleichung erster Ordnung für die erzeugende Funktion Γ dar. Aus ihr bekommen wir eine ganze Hierarchie von Relationen zwischen verschiedenen Vertexfunktionen. Zwei solche Relationen wollen wir genauer Betrachten.

12.3 Transversalität des Photonpropagators

Wenn wir die Gleichung (12.11) einmal funktional nach $A_\nu^{(cl)}(y)$ ableiten, bekommen wir

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\delta^2}{\delta A_\mu^{(cl)}(x)\,\delta A_\nu^{(cl)}(y)}\,\Gamma + \frac{1}{\alpha}\partial_x^2\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta^{(D)}(x-y) \;=\; 0. \tag{12.12}$$

Die zweite Ableitung von Γ ist der inverse volle Photonpropagator

$$\frac{\delta^2}{\delta A_\mu^{(cl)}(x)\,\delta A_\nu^{(cl)}(y)}\,\Gamma \;=\; G^{-1}\big((x,\mu),(y,\nu)\big) \;=\; G^{-1}_{\mu,\nu}(x,y). \tag{12.13}$$

Eingesetzt in die Gleichung (12.12) wird daraus die Ward-Identität

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}G^{-1}_{\mu,\nu}(x,y) + \frac{1}{\alpha}\partial_x^2\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta^{(D)}(x-y) \;=\; 0. \tag{12.14}$$

Wenn wir diese Gleichung Fourier-transformieren wird $\partial_\mu \to \mathrm{i}\,k_\mu$ und somit

$$k_\mu\,\widetilde{G^{-1}_{\mu,\nu}}(k) - \frac{1}{\alpha}\,k^2\,k_\nu \;=\; 0. \tag{12.15}$$

Anschließend schreiben wir $G^{-1} \;=\; \mathrm{G}^{-1} + \Pi$, wobei

$$\widetilde{\mathrm{G}^{-1}_{\mu,\nu}}(k) \;=\; k^2\,\delta_{\mu,\nu} - \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\,k_\mu\,k_\nu \tag{12.16}$$

der freie eichfixierte Photonpropagator ist. Einsetzen in (12.5) liefert die einfache Formel

$$
\begin{aligned}
0 = \; & k_\mu \left\{ \widetilde{\mathrm{G}_{\mu,\nu}^{-1}}(k) + \widetilde{\Pi_{\mu,\nu}}(k) \right\} - \frac{1}{\alpha}\, k^2\, k_\nu \\
= \; & k_\mu \left\{ k^2\, \delta_{\mu,\nu} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k_\mu\, k_\nu + \widetilde{\Pi_{\mu,\nu}}(k) \right\} - \frac{1}{\alpha}\, k^2\, k_\nu \\
= \; & k_\mu\, \widetilde{\Pi_{\mu,\nu}}(k).
\end{aligned} \tag{12.17}
$$

Diese wichtige Formel sagt uns, daß die Strahlungskorrekturen für den Photonpropagator transversal sind. Die Euklidische Invarianz bedingt nun, daß Π von der Form

$$
\widetilde{\Pi_{\mu,\nu}}(k) \; = \; \left(k^2 \delta_{\mu,\nu} - k_\mu\, k_\nu\right)\, F(k^2) \tag{12.18}
$$

ist. Wir sehen an diesem Beispiel, daß die Ward-Identität der QED die Form der Schwinger-Funktionen sehr stark einschränkt. Diese Einschränkungen sind von großem Nutzen.

12.4 Ward-Takahashi Identität

Eine weitere interessante Identität erhält man durch Anwendung des Differentialoperators

$$
\frac{\delta}{\delta \psi_b^{(cl)}(z)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_a^{(cl)}(y)} \tag{12.19}
$$

auf die Ward-Identität (12.11). Wir erhalten die Formel

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Bigg\{ \frac{\delta^3}{\delta A_\mu^{(cl)}(x) \delta \psi_b^{(cl)}(z) \delta \bar{\psi}_a^{(cl)}(y)} + \mathrm{i} e\, \delta^{(D)}(x-y)\, \frac{\delta^2}{\delta \psi_b^{(cl)}(z) \delta \bar{\psi}_a^{(cl)}(y)} \\
& - \mathrm{i} e\, \delta^{(D)}(x-z)\, \frac{\delta^2}{\delta \psi_b^{(cl)}(z) \delta \bar{\psi}_a^{(cl)}(y)} \Bigg\} \Gamma[A^{(cl)}, \psi^{(cl)}, \bar{\psi}^{(cl)}] \; = \; 0.
\end{aligned} \tag{12.20}
$$

Diese Gleichung ist eine Identität zwischen dem effektiven QED Vertex

$$
\begin{aligned}
& \Gamma\big((x,\mu);(y,a),(z,b)\big) \; = \\
& \frac{\delta^3}{\delta A_\mu^{(cl)}(x) \delta \psi_b^{(cl)}(z) \delta \bar{\psi}_a^{(cl)}(y)} \Gamma[A^{(cl)}, \psi^{(cl)}, \bar{\psi}^{(cl)}] \Bigg|_{A^{cl}=\psi^{cl}=\bar{\psi}^{cl}=0}
\end{aligned} \tag{12.21}
$$

und dem effektiven inversen Feynman-Propagator

$$
\begin{aligned}
& S^{-1}\big((y,a),(z,b)\big) \; = \\
& \frac{\delta^2}{\delta \psi_b^{(cl)}(z) \delta \bar{\psi}_a^{(cl)}(y)} \Gamma[A^{(cl)}, \psi^{(cl)}, \bar{\psi}^{(cl)}] \Bigg|_{A^{cl}=\psi^{cl}=\bar{\psi}^{cl}=0}
\end{aligned} \tag{12.22}
$$

Mit diesen Namensgebungen bekommt die WT-Identität (12.20) die finale Form

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Gamma\Big((x,\mu);(y,a),(z,b)\Big) \; = \\
& -\mathrm{i}\, e \left\{ \delta^{(D)}(x-y) - \delta^{(D)}(x-z) \right\} S^{-1}\Big((y,a),(z,b)\Big).
\end{aligned} \tag{12.23}
$$

Übungsaufgabe Zeigen Sie, daß die WT-Identität (12.23) für die (klassische) QED-Wirkung erfüllt ist.

12.4.1 WT-Identität im Impulsraum

Die WT-Identität (12.23) wollen wir noch in den Impulsraum umschreiben. Dazu verwenden wir die folgende Fourier-Darstellung der effektiven QED Vertexfunktion

$$\begin{aligned} &\Gamma\Big((x,\mu);(y,a),(z,b)\Big) = \\ &\int \frac{\mathrm{d}^D p}{(2\pi)^D} \int \frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\,x+q\,y+k\,z)} \\ &(2\pi)^D \delta^{(D)}(p+q+k)\, \widetilde{\Gamma}\Big((p,\mu);(q,a),(k,b)\Big). \end{aligned} \tag{12.24}$$

Die δ-Funktion ist eine Folge der Translationsinvarianz der Vertexfunktion. Ebenso stellen wir den effektiven Feynman-Propagator durch ein Fourier-Integral

$$\begin{aligned} &S^{-1}\Big((y,a),(z,b)\Big) = \\ &\int \frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\, (2\pi)^D \delta^{(D)}(q+k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q\,y+k\,z)}\, \widetilde{S^{-1}}\Big((q,a),(k,b)\Big) \end{aligned} \tag{12.25}$$

dar. (Vereinfachen Sie diese Notation nach Ihren eigenen Bedürfnissen.) Die resultierende WT-Identität ist

$$\begin{aligned} &p_\mu\, \widetilde{\Gamma}\Big((p,\mu);(q,a),(k,b)\Big) = \\ &e\left\{\widetilde{S^{-1}}\Big((p+q,a),(k,b)\Big) - \widetilde{S^{-1}}\Big((q,a),(p+k,b)\Big)\right\}. \end{aligned} \tag{12.26}$$

Diese Beziehung spielt in der Renormierung der QED eine sehr wichtige Rolle. Die WT-Identität liefert nämlich Beziehungen zwischen den divergenten Anteilen der Vertexfunktionen.

Übungsaufgabe Rechnen Sie (12.26) nach.

12.5 Bemerkungen

Die Rechnungen dieses Abschnitts habe ich eng an die Darstellung in [1] angelehnt. Das Material ist allerdings klassisch und findet sich in allen Lehrbüchern.

Ich denke, daß ein entscheidender Punkt in der Herleitung der Ward-Identitäten ist, daß diejenigen Terme, die die Eichinvarianz brechen, quadratisch und linear in den Feldvariablen sind. Sie betreffen nicht den nicht-linearen QED-Vertex. Aus diesem Grund ist die Ward-Identität eine lineare Differentialgleichung für Z.

13 Kekse

In diesem Abschnitt werden übriggebliebene Kekse (oder Krümel) aufgelesen.

13.1 Ableitungsformel für Fermionen

In Verallgemeinerung der beiden Formeln

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_i} \mathrm{e}^{(\bar{\theta},\eta)} \;=\; \mathrm{e}^{(\bar{\theta},\eta)}\, \eta_i, \qquad \frac{\partial}{\partial \theta_i} \mathrm{e}^{(\bar{\eta},\theta)} \;=\; \mathrm{e}^{(\bar{\eta},\theta)}\, (-\bar{\eta}_i) \tag{13.1}$$

gilt

$$F\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}}\right) \mathrm{e}^{(\bar{\theta},\eta)} \;=\; \mathrm{e}^{(\bar{\theta},\eta)}\, F(\eta), \qquad F\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \mathrm{e}^{(\bar{\eta},\theta)} \;=\; \mathrm{e}^{(\bar{\eta},\theta)}\, F(-\bar{\eta}). \tag{13.2}$$

Daraus ergibt sich die etwas allgemeinere Formel

$$F\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \mathrm{e}^{(\bar{\theta},\eta)+(\bar{\eta},\theta)} \;=\; \mathrm{e}^{(\bar{\theta},\eta)+(\bar{\eta},\theta)}\, F(\eta, -\bar{\eta}). \tag{13.3}$$

(Stellen Sie sich ein Monom von Ableitungsoperatoren vor. Wenden Sie diese der Reihe nach auf die Exponentialfunktion an. Sortieren Sie die entstehenden Grassmann-Variablen immer nach rechts. Dann erzeugen Sie das Monom, in dem die Ableitungsoperatoren durch die neuen Grassmann-Variablen ersetzt sind.)

Mit diesem Trick bekommen wir nun die schöne Formel

$$\mathrm{e}^{(\bar{\eta},C\,\eta)} \;=\; \mathrm{e}^{-(\partial_\theta,C\,\partial_{\bar{\theta}})}\, \mathrm{e}^{(\bar{\theta},\eta)+(\bar{\eta},\theta)}\Big|_{\theta=0=\bar{\theta}}. \tag{13.4}$$

Literatur

[1] J. Ambjörn and J. L. Petersen, Quantum Field Theory, University of Copenhagen Lecture Notes, 1994

[2] R. Balian, J. Zinn-Justin (eds.), Methods in Field Theory, Les Houches 1975, North Holland Publishing Company 1976

[3] J. Barata, K. Fredenhagen, Scattering theory for Euclidean lattice fields, in: Field theory on the lattice, Eds. A. Billoire et al., Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 4 (1988) 639

[4] M. Bellac, Quantum and Statistical Field Theory, Clarendon Press, Oxford 1994 (sec. ed.): *Das zwölfte Kapitel beschäftigt sich mit der QED: Feynman Regeln, Anwendungen, Einschleifenrechnungen, Ward-Identitäten*

[5] F. A. Berezin, The Method of Second Quantization, Nauka Moskau 1965

[6] J. D. Björken und S. D. Drell, Relativistische Quantenmechanik, BI Hochschultaschenbücher Band 98, 1966

[7] J. D. Björken und S. D. Drell, Relativistische Quantenfeldtheorie, BI Hochschultaschenbücher Band 101, 1967

[8] N. N. Bogoljubov und D. V. Sirkov, Quantenfelder, Physik-Verlag Weinheim 1984

[9] L. S. Brown, Quantum Field Theory, Cambridge University Press 1992: *ein Lehrbuch; die QED wird in Kapitel 8 besprochen*

[10] M. Chaichian, N. Nelipa, Introduction to Gauge Field Theories, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag 1984

[11] S. J. Chang, Introduction to Quantum Field Theory, World Scientific 1990, Lecture Notes in Physics - Vol. 29

[12] R. Courant, D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik II, Springer Verlag 1968 (zweite Auflage)

[13] A. Das, Field Theory: A Path Integral Approach, World Scientific Publishing 1993: *Schwerpunkt auf der Pfadintegralmethode*

[14] W. Dittrich, M. Reuter, Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics, Springer Verlag 1985, Lecture Notes in Physics 220

[15] W. Dittrich, M. Reuter, Classical and Quantum Dynamics: from Classical Paths to Path Integrals, Springer Verlag 1992: *Viele Rechnungen zu Pfadintegralen*

[16] L. D. Faddeev and A. A. Slavnov, Gauge Fields – Introduction to Quantum Theory, Benjamin/Cummings Publishing Company 1980

[17] G. Felder, Einführung in die Eichfeldtheorie, Vorlesung an der ETH Zürich, 1990

[18] J. Feldman, H. Knörrer, E. Trubowitz, A Representation for Fermionic Correlation Functions, ETH Preprint 1997

[19] R. Fernandez, J. Fröhlich, A. D. Sokal, Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory, Text and Monographs in Physics, Springer Verlag 1992

[20] R. Feynman, Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics, Rev. Mod. Phys., Vol. 20, p. 267 (1948)

[21] R. Feynman, Quantum Electrodynamics, Benjamin Cummings 1961: *Das Original, Propagatortheorie*

[22] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill 1965

[23] R. P. Feynman, QED – The Strange Theory of Light and Matter, Princeton University Press 1985

[24] I. M. Gelfand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin, Generalized Functions, Integral Geometry and Representation Theory, Academic Press 1966

[25] J. Glimm and A. Jaffe, Quantum Physics, Springer-Verlag, 1987

[26] H. Goldstein, Klassische Mechanik, Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden, 1983

[27] W. Greiner und J. Reinhard, Theoretische Physik Bd. 7: Quantenelektrodynamik, Verlag Harri Deutsch, 1984

[28] S. Gupta, Quantum Electrodynamics, Gordon and Breach Publishers 1977: *Kanonische Quantisierung, ein Lehrbuch*

[29] R. Haag, Local Quantum Physics, Fields, Particles, Algebras, Springer Verlag 1996

[30] B. Hatfield, Quantum Field Theory of Point Particles and Strings, Addison-Wesley Publishing Company 1992, Frontieres in Physics

[31] C. Itzykson and J.-B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill, 3rd printing 1987

[32] J. D. Jackson, Klassische Elektrodynamik, Walter de Gruyter 1981

[33] A. Jaffe, C. Taubes, Vortices and Monopoles: Structure of Static Gauge Theories, Birkhäuser 1980

[34] J. M. Jauch and F. Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, 1976

[35] T. Kinoshita, The fine structure constant, Rep. Prog. Phys. 59, pp. 1459 (1996)

[36] G. Köpp und F. Krüger, Einführung in die Quantenelektrodynamik, Teubner Studienbücher Physik 1997

[37] T. Kugo, Eichtheorien, Springer Verlag 1997

[38] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik Bd. II *Klassische Feldtheorie*, Akademie Verlag Berlin 1981

[39] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, W. B. Berestetzki, L. P. Pitajewski, Lehrbuch der Theoretischen Physik Bd. IV *Quantenelektrodynamik*, Akademie-Verlag Berlin 1987

[40] M. Lüscher, Selected Topics in Lattice Field Theory, DESY 88-156: *In diesen Les Houches Lectures diskutiert Lüscher eine Streutheorie für Gitterfelder. Aus der Transfermatrix konstruiert er den Hamiltonoperator. Für diesen postuliert er massive Einteilchenzustände. Anschließend definiert er Haag-Ruelle Operatoren. Schließlich stellt er eine LSZ-Formel vor. Der Abschnitt enthält eine technische Diskussion der Lokalität von Gluonballwellenfunktionen. Er bezieht sich auf [3].*

[41] G. Mack, Allgemeine Relativitätstheorie, Vorlesung an der Universität Hamburg, DESY T-82-03 (1982)

[42] G. Mack, Nichtstörungstheoretische Methoden, Vorlesung an der Universität Hamburg, Wintersemester 1984/85

[43] G. Mack, From S-Matrix elements to Green functions: the work of Kurt Symanzik, Nucl. Phys. B254 (1985) No. 1, 1–10

[44] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation, Freeman 1973

[45] I. Montvay, G. Münster, Quantum Fields on a Lattice, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press 1994

[46] G. Münster, Quantisierte Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung, Vorlesung an der Universität Münster im Sommersemester 1991

[47] S. Pokorski, Gauge Field Theories, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press 1987: *Lehrbuch mit vielen technischen Details.*

[48] P. Ramond, Field Theory – A Modern Primer, Benjamin/Cummings Publishing Company 1981

[49] M. Read and B. Simon, Fourier Analysis, Self-Adjointness, Methods of Modern Mathematical Physics, Academic Press 1972

[50] M. Salmhofer, An Introduction to Renormalization, ETH Lecture Notes 1996

[51] B. Simon, The $P(\Phi)_2$ Euclidean Quantum Field Theory, Princeton Series in Physics, Princeton University Press 1974

[52] L. S. Schulman, Techniques and Applications of Path Integration, John Wiley and Sons 1981

[53] S. S. Schweber, QED and the men who made it, Princeton Series in Physics, Princeton University Press 1994

[54] J. Schwinger ed., Selected Papers on Quantum Electrodynamics, Dover Publications 1958

[55] R. U. Sexl, H. K. Urbantke, Relativität, Gruppen, Teilchen, Springer Verlag 1976

[56] M. Stingl, A Systematic Extended Iterative Solution for Quantum Chromodynamics, Z. Physik A 353 (1996) 423

[57] R. F. Streater, A. S. Wightman, PCT, Spin and Statistics, and All That, Addison Wesley 1989 (Benjamin/Cummings 1964)

[58] J. C. Taylor, Gauge Theories of Weak Interactions, Cambridge University Press 1976: *ein Klassiker*

[59] P. Urban, Quantum Electrodynamics, Springer Verlag 1965: *Beiträge verschiedener Autoren zur QED, insbesonders bei hohen Energien*

[60] S. Weinberg, Feynman Rules for Any Spin, Phys. Rev. Vol. 133, No. 5B (1964) 1318; Feynman Rules for Any Spin. II. Massless Particles, Phys. Rev. Vol. 134, No. 4B (1964) 882

[61] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Volume I and II, Cambridge University Press, 1995

[62] R. M. Wilcox, Exponential Operators and Parameter Differentiation in Quantum Physics, Jour. Math. Phys. Vol. 8, No. 4 (1967) 962–982

[63] K. Wilson, J. Kogut, The Renormalization Group and the ε-Expansion, Phys. Rep. 12C (1974) 1–75

[64] J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, International Series of Monographs in Physics, Vol. 77, Oxford Science Publications 1989

Inhaltsverzeichnis