# Übungsaufgaben zur statistischen Physik
## Blatt 8

**Aufgabe 8.1 (0 Punkte): Nicht-idealer Würfel**

Ein gezinkter Würfel liefere im Mittel die Augenzahl 4 anstatt 3,5.

**a)** Mit welchen Wahrscheinlichkeiten $p_i \quad (i \in \{1, 2, \dots, 6\})$ für die Augenzahlen hat man zu rechnen, wenn keine weiteren Informationen vorliegen?
*Hinweis:* Bei Mangel an weiteren Informationen wird man die Verteilung aufsuchen, die unter den gegebenen Bedingungen die maximale Informationsentropie hat. Benutzen Sie dazu die Methode der LAGRANGEschen Multiplikatoren. Für die auftretende transzendente Gleichung genügt eine numerische Näherungslösung auf 4 geltende Ziffern.

**b)** Wie groß ist die Informationsentropie dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung?

**c)** Finden Sie zwei weitere Verteilungen mit der mittleren Augenzahl 4 und berechnen Sie die jeweilige Informationsentropie.

**Aufgabe 8.2 (6 Punkte): Informations-Entropie**

**a)** Ein Teilchen halte sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf einem der Felder eines Schachbrettes auf.
Geben Sie die durch eine „Ortsmessung“, das heißt durch die Feststellung des Aufenthaltsfeldes zu gewinnende Information an. Als Maß für das Informationsdefizit, das für die Lokalisierung des Teilchens überwunden werden muss, kann man

$$I = -k \sum_i p_i \ln p_i$$

verwenden. ($p_i$ ist die Wahrscheinlichkeit des $i$-ten Ereignisses.) Durch wie viele „Ja-Nein-Fragen“ läßt sich diese Feststellung des Aufenthaltsfeldes erreichen?

**b)** Führen Sie die gleichen Betrachtungen für den einmaligen Wurf eines Würfels (Frage: „Welche Zahl liegt oben?“) durch. Geben Sie auch den Mittelwert der nötigen „Ja-Nein-Fragen“ an.

**Aufgabe 8.3 (0 Punkte): Phasenraum-Volumen**

Ein harmonischer Oszillator habe die Hamilton-Funktion

$$\mathcal{H}(p, q) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \,.$$

Berechnen Sie das Phasenraumvolumen

$$\Phi(E, 1) = \iint\limits_{\mathcal{H} \leq E} \mathrm{d}p \mathrm{d}q$$

und den Inhalt der Energieschale

$$\Omega(E, 1) = \iint \delta(\mathcal{H}(p, q) - E) \mathrm{d}p \mathrm{d}q \,.$$

**Aufgabe 8.4 (8 Punkte): Normalverteilung**

Zeigen Sie, dass die eindimensionale, normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung maximaler Entropie bei vorgegebener konstanter Varianz $\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\, p(x)\mathrm{d}x$ gerade die Normalverteilung ist. *Hinweis:* Verwenden Sie die Methode der LAGRANGEschen Multiplikatoren.

**Aufgabe 8.5 (12 Punkte): Spin-System**

Ein System bestehe aus $N$ $(N \gg 1)$ schwach miteinander wechselwirkenden, lokalisierten Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$. Jedes Teilchen besitzt ein magnetisches Moment $\mu$, das parallel oder antiparallel zum angelegten Feld $H$ ausgerichtet sein kann. Die Energie des Systems ist dann durch $E = -(n_1 - n_2)\mu H$ gegeben, wobei $n_1$ die Zahl der parallel zu $H$ ausgerichteten Spins bezeichnet und $n_2$ die der entgegengesetzt ausgerichteten.

**a)** Wie groß ist die Zahl $\Omega(E)$ der Zustände in dem Energiebereich $E \ldots E + \delta E$ mit $\mu H \ll \delta E \ll E$?

**b)** Geben Sie einen Näherung für $\ln \Omega(E)$ unter Verwendung der STIRLINGschen Formel an.

**c)** Geben Sie den Zusammenhang zwischen der absoluten Temperatur $T$ und der Energie $E$ des Systems an. Benutzen Sie dazu die Definition $\beta = \partial \ln \Omega / \partial E$.

**d)** Wann ist $T$ negativ?

**e)** Geben Sie das magnetische Moment $M$ in Abhängigkeit von $H$ und $T$ an.