Übungsaufgaben zur statistischen Physik
Blatt 7

Aufgabe 7.1 (15 Punkte): Dampfdruck über einem Festkörper

Das EINSTEINsche Festkörper-Modell nimmt an, dass dieser aus voneinander unabhängigen, mit fester Frequenz ω_E um ihre Gitterpositionen harmonisch schwingenden Atomen besteht. Dabei werden diese Oszillatoren quantenmechanisch behandelt. Die aus diesem Modell mit Mitteln der Statistischen Physik abgeleitete freie Energie hat die folgende Form:

$$F = \frac{3}{2}N\hbar\omega_E + \frac{3N}{\beta}\ln\left(1 - \exp(-\beta\hbar\omega_E)\right),$$

wobei $\beta = 1/kT$ die inverse Temperatur ist.

a) Berechnen Sie für das Einstein-Modell die innere Energie $U(T, N)$, die Entropie $S(T, N)$ und die Wärmekapazität bei konstantem Volumen C_V für den Hochtemperatur- ($T \gg \Theta_E$) sowie den Tieftemperatur-Grenzfall ($T \ll \Theta_E$). Dabei ist Θ_E die sogenannte Einstein-Temperatur $\Theta_E = \frac{\hbar\omega_E}{k}$.

b) Berechnen Sie den Dampfdruck über diesem Festkörper für den Hochtemperatur-Grenzfall unter der Annahme, es handle sich um eine einatomige Substanz, deren Dämpfe als ideales Gas betrachtet werden können. Für das Ideale Gas gilt die Beziehung $C_V = n\frac{5}{2}R$.

Aufgabe 7.2 (0 Punkte): Magnete

Welche der beiden folgenden Zustandsgleichungen für einen magnetisches System steht im Widerspruch zum dritten Hauptsatz der Thermodynamik:

a) $M = C \cdot \frac{H}{T}$

b) $M = M_0 \tanh \frac{\mu_B H}{k\,T}$.

Dabei bezeichnen M_0 und C reelle Konstanten.

Aufgabe 7.3 (7 Punkte): Zustandsgleichungen

a) Zeigen Sie die Zusammenhänge

$$p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$
$$p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

b) Das JOULEsche Gesetz lautet

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0.$$

Zeigen Sie unter Verwendung von a), dass hieraus die Existenz einer Funktion $f(V)$ folgt, so dass

$$T = p\,f(V).$$

c) Überprüfen Sie, ob das ideale Gas das JOULEsche Gesetz erfüllt.

d) Zeigen Sie, dass das JOULEsche Gesetz nicht Konsequenz der Hauptsätze der Thermodynamik ist, sondern aus diesen die Beziehung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{p}{T}\right)_V$$

folgt.

Aufgabe 7.4 (0 Punkte): Siedepunkte von Wasser

Die Verdampfungswärme von Wasser sei $l = 40,66\,\mathrm{kJ/mol}$. Bei welchen Temperaturen kocht Wasser auf dem höchsten Berg Korsikas, bei welcher auf dem K2, wenn es auf Meereshöhe und Normaldruck (1013,2 hPa) sowie einer Temperatur von 20 °Cseinen Siedepunkt bei 273,15 K hat? Verwenden Sie für den Druck in der Höhe h das Modell der adiabatischen Atmosphäree aus Aufgabe 4.1.

Aufgabe 7.5 (0 Punkte): Kritische Exponenten

Zeigen Sie für ein van der Waals-Gas, dass auf der kritischen Isothermen die Änderung des Volumens am kritischen Punkt potenzartig mit der Druckänderung verknüpft ist: $\delta\phi \propto (\delta\pi)^{1/3}$. Verwenden Sie die van der Waals-Gleichung in den reduzierten Größen π,ϕ und ϑ.