Übungsaufgaben zur statistischen Physik
Blatt 4

Aufgabe 4.1 (16 Punkte): Modell der Atmosphäre

Die Erdatmosphäre werde als ein ideales Gas der molaren Masse μ modelliert, welches sich in einem homogenen Gravitationsfeld mit Beschleunigung g befindet.

a) Zeigen Sie: Wenn die Höhe über dem Meeresspiegel mit z bezeichnet wird, so gilt für die Änderung des Atmosphärendrucks in Abhängigkeit von z:

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mu g}{RT}\mathrm{d}z,$$

wobei $T = T(z)$ die Temperatur in der Höhe z bezeichnet.

b) Zeigen Sie weiter, dass der Zusammenhang

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{\mathrm{d}T}{T}$$

gilt, wenn die Druckabnahme von einer adiabatischen Expansion herrührt.

c) Berechnen Sie damit die Temperaturänderung $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$ in Kelvin pro Kilometer unter der Annahme, dass die Atmosphäre lediglich aus Stickstoff besteht. Für Stickstoff gilt: $\gamma = 1,4$.

d) Drücken Sie für eine isotherme Atmosphäre mit Temperatur T den Druck $p(z)$ in der Höhe z durch den Druck p_0 auf Meereshöhe aus.

e) Bestimmen Sie den Druck $p(z)$ in der Höhe z für den Fall, dass in Meereshöhe der Druck p_0 und die Temperatur T_0 herrschen und die Atmosphäre wie in Teil b) als adiabatisches System angesehen wird.

Aufgabe 4.2 (0 Punkte): Beheizung von Räumen

Ein Raum, dessen Temperatur durch eine Heizung erhöht wird, ist ein Beispiel für ein offenes System, da der Druck konstant bleibt und so die Dichte mit zunehmender Temperatur abnehmen muss, also Luft durch Schlüssellöcher und ähnliche Öffnungen entweicht. Wie ändert sich die Temperatur im Lauf der Zeit, wenn Wärme mit einer konstanten Heizleistung $\dot{Q}$ zugeführt wird? Der Einfachheit halber nehmen Sie an, dass die Luft ein ideales Gas ist und vernachlässigen Sie die Strömungsenergie der entweichenden Luft.

Aufgabe 4.3 (7 Punkte): van der Waals-Gase

a) Aus dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik folgt der Zusammenhang

$$c_p - c_v = \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Benutzen Sie die „Energie-Gleichung“ (Herleitung in einer der folgenden Vorlesungen)

$$p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V ,$$

um für ein van der Waals-Gas die Differenz $c_p - c_v$ zu berechnen.

b) Die innere Energie eines van der Waals-Gases sei durch den Ausdruck

$$u = c\,T - \frac{a}{V}$$

gegeben, wobei a und c reelle Konstanten sind. Berechnen Sie die molaren Wärmekapazitäten C_v und C_p des van der Waals-Gases.

Aufgabe 4.4 (0 Punkte): Exaktheit

a) Nach dem ersten Hauptsatz gilt der Zusammenhang

$$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W.$$

Zeigen Sie, dass die Arbeit $\delta W = -p\mathrm{d}V$ nicht exakt ist.

b) Untersuchen Sie, ob das Differenzial

$$\delta\omega = (2 - \frac{y^2}{x} - 3xy^3)\mathrm{d}x - (2y + 3x^2y^2)\mathrm{d}y$$

exakt ist. Da die korrekte Antwort nein lautet versuchen Sie, einen integrierenden Faktor zu finden. Benutzen Sie das Resultat dafür, die Differenzialgleichung

$$2 - \frac{y^2}{x} - 3xy^3 - 2yy' - 3x^2y^2y' = 0$$

zu lösen.

Aufgabe 4.5 (7 Punkte): $c_p - c_V$

Zeigen Sie, dass die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p = C_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - p$$

gelten. Leiten Sie aus der Exaktheit von dU die Beziehung

$$(C_p - C_V)\frac{\partial^2 T}{\partial p \partial V} + \frac{\partial C_p}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial V} - \frac{\partial C_V}{\partial V}\frac{\partial T}{\partial p} = 1$$

her, die nur experimentell zugängliche Größen enthält. Die Variablen sind hier p und V.