Übungsaufgaben zur statistischen Physik
Blatt 11

Aufgabe 11.1 (? Punkte): Isotherm-isobare Zustandssumme

Sie haben die mikrokanonische, kanonische und großkanonische Zustandssumme kennengelernt. Diese unterscheiden sich durch die makroskopischen Ensemble-Parameter, die jeweils fixiert werden. Ein weiteres Ensemble ist das isotherm-isobare Ensemble. Hier ist die Teilchenzahl N fest, während die Energie E und das Volumen V fluktuieren.

a) Zeigen Sie, dass die isotherm-isobare Zustandssumme $\Delta(N, p, T)$ durch

$$\Delta(N, p, T) = \sum_E \sum_V \Omega(N, V, E) e^{-\frac{E}{kT}} e^{-\frac{pV}{kT}}$$

gegeben ist.

b) Berechnen Sie diese Zustandssumme $\Delta(N, p, T)$ für ein ideales, einatomiges Edelgas.

c) Bestimmen Sie die Zustandsgleichung für

$$\Delta(N, p, T) = \left(\frac{(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2}}{ph^3} \right)^N .$$

d) Zeigen Sie, dass für die freie Enthalpie gilt:

$$G(N, p, T) = -kT \ln \Delta(N, p, T)$$

Aufgabe 11.2 (? Punkte):

Betrachten Sie ein System von N freien Teilchen, bei dem die Energie jedes Teilchens entweder 0 oder E ($E > 0$) beträgt. Eine Konfiguration ist gegeben durch Quantenzahlen $n_1, \ldots, n_N$. Die Energie des j'ten Teilchens beträgt 0 für $n_j = 0$ und E für $n_j = 1$. Die Hamilton-Funktion ist gegeben durch

$$H_N(\mathbf{n}) = E(n_1 + \ldots + n_N).$$

Berechnen Sie für dieses System:

a) die mikrokanonische Zustandssumme

$$\Omega(E, N) = \sum_{n_1=0}^{1} \cdots \sum_{n_N=0}^{1} \delta_{U, H_N(n)},$$

b) die kanonische Zustandssumme

$$Z(T, N) = \sum_{n_1=0}^{1} \cdots \sum_{n_N=0}^{1} e^{-\beta H_N(n)},$$

c) die großkanonische Zustandssumme

$$\Xi(T, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{n_1=0}^{1} \cdots \sum_{n_N=0}^{1} e^{-\beta H_N(n)}.$$

mit $z = \exp(\beta\mu)$. *Hinweis:* Der Term mit $N = 0$ ist einfach 1.

Aufgabe 11.3 (? Punkte):

Betrachten Sie ein System von zwei identischen Teilchen mit jeweils drei Energieniveaus

$$\epsilon_n = n\epsilon, \text{ mit } n = 0, 1, 2,$$

wobei der niedrigste Energiezustand doppelt entartet ist. Dieses System befindet sich im thermischen Gleichgewicht und hat die Temperatur T.

Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme, die Energie und die Anzahl der möglichen Konfigurationen, vorausgesetzt es handelt sich um:

a) Fermionen,

b) Bosonen,

c) zwei unterscheidbare Teilchen.

Diskutieren Sie unter welchen Bedingungen Fermionen bzw. Bosonen als Boltzmann-Teilchen betratet werden können.