Übungsaufgaben zur statistischen Physik
Blatt 10

Aufgabe 10.1 (0 Punkte):

Betrachten Sie ein System von N klassischen Teilchen im $\mathbb{R}^3$ mit Hamiltonfunktion

$$H_{\text{cl.}}(\vec{q}_1,\ldots,\vec{q}_N,\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\;2}}{2m_i} + \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij}\cdot(\vec{q}_i-\vec{q}_j)^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i\omega_i^2}{2}\vec{q}_i^{\;2} \quad .$$

Wie groß ist die innere Energie U im zugehörigen kanonischen Ensemble? Zeigen Sie, dass das Gesetz von Dulong-Petit gilt!
Hinweis: Bringen Sie die quadratische Form, die aus den von q abhängigen Termen besteht, auf Diagonalform.

Aufgabe 10.2 (0 Punkte):

Gegeben sei ein klassisches, speziell relativistisches, ideales Gas der Temperatur T. Die Gasteilchen haben die Masse m_0. Das Gas befinde sich in einem Kasten vom Volumen V. Berechnen Sie die relativistische Korrektur zur thermischen Zustandsgleichung $pV = nRT$ des idealen Gases.

Aufgabe 10.3 (15 Punkte):

In einem kugelförmigen Kolben mit Radius 15 cm befinde sich Wasserdampf der Temperatur 300 K. Der Druck betrage anfänglich $p_A = 1\cdot 10^{-4}$ bar. Die Temperatur des Kolbens werde konstant auf 300 K gehalten mit Ausnahme eines kleinen Teils der Oberfläche von der Größe 2 cm^2, welcher auf die Temperatur von flüssigem Stickstoff abgekühlt werde (77 K).
Nun gilt Näherungsweise, dass jedes auf die gekühlte Oberfläche treffende Wasser-Molekül dort kondensiert und haften bleibt.

a) Geben Sie ausgehend von der MAXWELLschen Geschwindigkeitsverteilung für die Gasteilchen die Anzahl der Teilchen pro Zeiteinheit an, die an dem gekühlten Flächenstück haften bleiben. *Hinweis:* Das sind gerade die Teilchen, die sich auf dr gekühlten Fläche befinden und einen Impulsanteil in Richtung der Wand besitzen.

b) Nach welcher Zeit τ ist der Druck im Inneren des Gefäßes auf $p_E = 1\cdot 10^{-8}$ bar abgefallen, wenn Sie den Dampf als ideales Gas behandeln?

Aufgabe 10.4 (13 Punkte):

Das eindimensionale Ising-Modell beschreibt eine eindimensionale Kette von „Spins“. Jeder Spin hat zwei Einstellmöglichkeiten. Dies wird modelliert durch N Variablen σ_i ($i \in \{1,\ldots,N\}$), die jeweils die Werte $+1$ und -1 annehmen können. Die Spinvariablen sind also diskret und werden als klassische Größen aufgefasst. Es wird eine periodische Randbedingung angenommen, d.h. σ_{N+1} wird mit σ_1 identifiziert. Zwischen den Spins besteht eine „Nächste-Nachbar-Wechselwirkung“. Der Hamiltonoperator hat also die Form

$$H_{\text{cl.}}(\sigma_1,\ldots,\sigma_N) = -\sum_{i=1}^{N} \sigma_i\sigma_{i+1} \ .$$

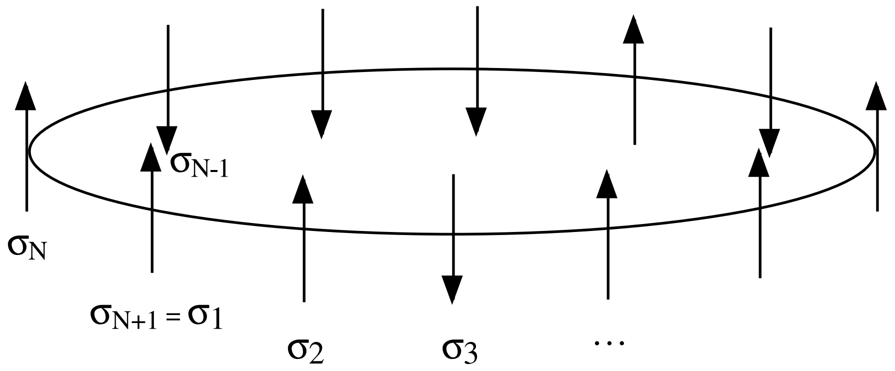

Abbildung 1: Eindimensionales Ising-Modell mit periodischen Randbedingungen

a) Wie groß ist der Zustandsraum des Systems?

b) Welche Werte kann die Energie E bei festem N annehmen? Bestimmen Sie den Entartungsgrad $d(E,N)$ für die beiden niedrigsten Energiewerte.

c) Bestimmen Sie durch Verallgemeinerung dieser Überlegung die Entartungsgrade $d(E,N)$ für alle Werte von E.

d) Berechnen Sie für gerades N die klassisch kanonische Zustandssumme

$$Z(\beta,N) = \sum_E d(E,N)e^{-\beta E} \quad .$$

e) Bestimmen Sie daraus die Größe $\frac{1}{N}\ln(Z)$ für große Werte von N. Welche physikalische Bedeutung hat diese Größe?

f) Berechnen Sie die Entropie für große Werte von N .