Übungsaufgaben zur Quantenmechanik
Blatt 9

Aufgabe 9.1 (12 Punkte): Bahnradien beim Wasserstoff-Atom

Berechnen Sie für Zustände $|n\,l\,m\rangle$ des Wasserstoff-Atoms mit $l = n - 1$ (maximaler Drehimpuls) die Erwartungswerte $\langle r\rangle$, $\langle r^2\rangle$ und die Streuung Δr. Stellen Sie die Ergebnisse für große Werte von n im Lichte des Korrespondenzprinzips dem BOHR'schen Atommodell gegenüber.

Aufgabe 9.2 (8 Punkte): U(1) Eichgruppe

Aus der Elektrodynamik wissen Sie, dass die Feldstärken von elektrischem und magnetischem Feld unter den Eichtransformationen

$$\vec{A}(\vec{r},t) \longrightarrow \vec{A}'(\vec{r},t) := \vec{A}(\vec{r},t) + \nabla\Lambda(\vec{r},t)$$
$$\Phi(\vec{r},t) \longrightarrow \Phi'(\vec{r},t) := \Phi(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\vec{r},t)$$

der Potentiale unverändert bleiben. Sei nun $\psi(\vec{r},t)$ eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung mit

$$H = \tfrac{1}{2m}(\vec{P} - e\vec{A})^2 + e\Phi\ .$$

Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\psi'(\vec{r},t) = \exp(\mathrm{i}\tfrac{e}{\hbar}\Lambda(\vec{r},t))\psi(\vec{r},t)$ die Schrödinger-Gleichung zu den transformierten Potentialen $\vec{A}'(\vec{r},t)$ und $\Phi'(\vec{r},t)$ löst. Diskutieren Sie die Konsequenzen einer solchen Änderung der Wellenfunktion.

Aufgabe 9.3 (0 Punkte): Teilchen im Magnetfeld

Ein geladenes Teilchen bewege sich auf einem eindimensionalen Ring mit Radius R, welcher sich in der x-y-Ebene befindet. Im Zentrum des Ringes herrscht ein Magnetfeld in z-Richtung mit gesamtem magnetischen Fluss Φ.

a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld auf dem Ring in Zylinderkoordinaten zu

$$A_r = A_z = 0, \qquad\qquad A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi R}$$

gewählt werden kann.

b) Schreiben Sie die Schrödinger-Gleichung für das Teilchen in Zylinderkoordinaten.

c) Finden Sie die mit Periode 2π periodischen Eigenzustände und die zugehörigen Energie-Eigenwerte.