Übungsaufgaben zur Quantenmechanik
Blatt 8

Aufgabe 8.1 (8 Punkte): Wasserstoffartige Systeme

Betrachten Sie ein wasserstoffartiges System mit der Kernladungszahl Z im Grundzustand.

a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion für dieses System durch

$$\psi(\vec{r}) = C \exp(-\tfrac{r}{a_Z})$$

mit $a_Z = a/Z$ und dem bohrschen Radius a gegeben ist.

b) Berechnen Sie die Normierungskonstante C.

c) Berechnen Sie für ein 69-fach ionisiertes ${}^{173}_{70}\mathrm{Yb}$ Atom im Grundzustand die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron im Kern befindet. Nehmen Sie dabei an, dass der Kernradius durch $R_\mathrm{K} = A^{\frac{1}{3}} \cdot 1{,}2\,\mathrm{fm}$ gegeben ist.

Aufgabe 8.2 (6 Punkte): β-Zerfall eines Tritium-Atoms

Betrachten Sie den β-Zerfall ${}^3\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He}^+ + e^- + \overline{\nu}_e$ eines Tritium-Atoms in ein Helium-3-Ion, ein Elektron und ein Neutrino. Das ${}^3\mathrm{H}$ Atom befinde sich vor dem Zerfall im Grundzustand. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das ${}^3\mathrm{He}^+$-Ion im Grundzustand angetroffen?

Aufgabe 8.3 (6 Punkte): Mittleres elektrostatisches Potential im Atom

Ein Elektron, das sich im Coulombfeld eines Kerns der Ladungszahl Z bewegt, sei im Grundzustand. Zeigen Sie, dass das mittlere elektrostatische Potential in der Umgebung von Kern und Elektron durch

$$\varphi(r) = \frac{e_0(Z-1)}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{e_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Z}{a} + \frac{1}{r}\right)\exp(-2\tfrac{Z}{a}r)$$

gegeben ist. Dabei ist $a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e_0^2}$ der bohrsche Radius. Nehmen Sie an, der Kern sei unendlich schwer.