Übungsaufgaben zur Quantenmechanik
Blatt 7

Aufgabe 7.1 (9 Punkte): Starrer Rotator I

Ein System mit Trägheitsmomenten $I_x = I_y$ und I_z besitzt den Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2I_x}(L_x^2 + L_y^2) + \frac{1}{2I_z}L_z^2.$$

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenzustände des Systems. *Hinweis:* Schreiben Sie den Hamilton-Operator zunächst so um, dass die Operatoren L_x und L_y darin nicht mehr vorkommen.

b) Wie groß ist der Erwartungswert des Operators $L_x + L_y + L_z$ in einem Energie-Eigenzustand des Systems?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von L_x zu einem Zeitpunkt t_1 den Wert $\hbar$ zu erhalten, wenn das System zur Zeit $t_0 = 0$ im Zustand $|3, 0\rangle$ präpariert wurde?

Aufgabe 7.2 (0 Punkte): Starrer Rotator II

Betrachten Sie ein System mit drei verschiedenen Haupt-Trägheitsmomenten:

$$H = \frac{1}{2I_x}L_x^2 + \frac{1}{2I_y}L_y^2 + \frac{1}{2I_z}L_z^2.$$

a) Zeigen Sie, dass es für das Auffinden der Eigenwerte von H genügt, das System auf den $(2l + 1)$-dimensionalen Eigenräumen zu L^2 zu untersuchen.

b) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um die Energie-Eigenwerte des „Quanten-Kreisels" mit Drehimpuls $l = 1$ zu finden.

c) Geben Sie eine grobe Abschätzung für die Größenordnung der Rotationsenergie von Molekülen, die aus wenigen leichten Atomen mit Abständen von etwa 1 Å bestehen.

Aufgabe 7.3 (3 Punkte): Energieniveaus eines HF Moleküls

Berechnen Sie das Verhältnis der Energiedifferenz der ersten beiden Rotationsniveaus zur Energiedifferenz der ersten beiden Vibrationsniveaus für das HF Molekül. Das Trägheitsmoment des HF Moleküls ist $I = 1.35 \cdot 10^{-47}\,\mathrm{kg\,m}^2$, die Vibrationsfrequenz ist gegeben durch

$$\frac{\omega_0}{2\pi c} = 39,87\,\mathrm{m}^{-1}.$$