Übungsaufgaben zur Quantenmechanik
Blatt 6

Aufgabe 6.1 (7 Punkte): Radial-Impuls

Zeigen Sie unter Verwendung der Ortsdarstellung, dass der Operator des Radial-Impulses

$$P_r = \frac{\hbar}{\hat{\imath}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)$$

hermitesch ist.
Hinweis: Beschränken Sie sich auf den Unterraum der Funktionen, die nur von $r = |\vec{x}|$ abhängen. Durch Verwendung der Darstellung $P_r = \frac{\hbar}{\hat{\imath}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r$ *kann* die Rechnung vereinfacht werden.

Aufgabe 6.2 (7 Punkte): Drehimpuls-Eigenzustände I

Der Zustandsraum eines physikalischen Systems mit Drehimpuls $l = 1$ wird durch die Basis $\{|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ aufgespannt, wobei die Basiselemente gleichzeitig Eigenzustände zu L_3 sind. Das System befinde sich in dem Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha_1| + 1\rangle + \alpha_2|0\rangle + \alpha_3| - 1\rangle$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\vec{L}\rangle$ des Drehimpulses als Funktion der α_i.

b) Geben Sie die Erwartungswerte $\langle L_1^2\rangle, \langle L_2^2\rangle, \langle L_3^2\rangle$ in Abhängigkeit von den α_i an.

Aufgabe 6.3 (0 Punkte): Drehimpuls-Eigenzustände II

Ein physikalisches System halte sich in dem 4-dimensionalen Zustandsraum mit Drehimpulsen $l = 0$ und $l = 1$ auf. Die Basiselemente $|l, m\rangle$ sind als Eigenvektoren von L_3 gewählt.

a) Drücken Sie die gemeinsamen Eigenzustände zu $\vec{L}^2$ und L_1 durch die obige Basis aus. *Hinweis:* Drücken Sie L_1 als Linearkombination der Stufenoperatoren aus.

Das System befinde sich in dem normierten Zustand

$$|\psi\rangle = \alpha_1|1, 1\rangle + \alpha_2|1, 0\rangle + \alpha_3|1, -1\rangle + \alpha_4|0, 0\rangle$$

b) Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer gleichzeitigen Messung von $\vec{L}^2$ und L_3 die Eigenwerte $\lambda = 2\hbar^2$ und $l_3 = \hbar$ gemessen werden?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von L_3 im Zustand $|\psi\rangle$ und die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Messergebnisse.

d) Welche Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ausgänge bei der Messung von L_3 erhält man, wenn zunächst L_1 und dann L_3 gemessen wird?