# Übungsaufgaben zur Quantenmechanik
# Blatt 5

**Aufgabe 5.1 (7 Punkte): Eine Operator-Identität**

Zeigen Sie die Operator-Identität

$$\exp(A)\, B\, \exp(-A) = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!}[A,B]^{(n)}\,,$$

wobei $[A,B]^{(n)}$ rekursiv durch $[A,B]^{(0)} := B$ und $[A,B]^{(n+1)} := [A,[A,B]^{(n)}]$ definiert ist.

**Aufgabe 5.2 (11 Punkte): Kohärente Zustände**

Für einen quantenmechanischen Oszillator sei $\psi_0(x)$ die Grundzustands-Wellenfunktion. Man definiert

$$\psi^{(z)}(x) := \exp(za^+)\psi_0(x) \qquad\qquad \text{mit } z \in \mathbb{C}.$$

**a)** Zerlegen Sie $\psi^{(z)}(x)$ in die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ des harmonischen Oszillators.

**b)** Zeigen Sie den Zusammenhang $a\psi^{(z)}(x) = z\psi^{(z)}(x)$, also dass die $\psi^{(z)}(x)$ Eigenfunktionen des Absteige-Operators $a$ sind.

**c)** Zeigen Sie, dass für die Zeitentwicklung der so definierten Zustände gilt:

$$\psi^{(z)}(x,t) = \psi^{(z(t))}(x)\exp(-\hat{\imath}\tfrac{\omega}{2}t),$$

wobei

$$z(t) := z\exp(-\hat{\imath}\omega t).$$

**Aufgabe 5.3 (0 Punkte): Heisenbergsche Bewegungsgleichungen**

Stellen Sie für den harmonischen Oszillator mit Hamilton-Operator $H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega}{2}^2 Q^2$ die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen der Operatoren

- $a(t)$
- $a^+(t)$
- $P(t)$
- $Q(t)$

auf und lösen Sie diese.

**Aufgabe 5.4 (0 Punkte): Generator von Translationen**

Der Operator $\exp(-\frac{\hat{\imath}}{\hbar}x_0 P)$ bewirkt eine Translation im Ortsraum.

**a)** Zeigen sie dies, indem Sie den Zusammenhang

$$\exp(-\tfrac{\hat{\imath}}{\hbar}x_0 P)\psi(x) = \psi(x - x_0)$$

beweisen.

**b)** Beweisen Sie die Operator-Identität

$$\exp(-\tfrac{\hat{\imath}}{\hbar}x_0 P)Q\exp(\tfrac{\hat{\imath}}{\hbar}x_0 P) = Q - x_0\mathbb{1}$$