Übungsaufgaben zur Quantenmechanik

Blatt 4

Aufgabe 4.1 (10 Punkte): Energiedarstellung I

Gegeben sei der Hamilton-Operator $H = \frac{1}{2m}P^2 + V(Q)$.

a) Berechnen Sie $[[H, Q], Q]$.

b) Das Spektrum von H sei rein diskret: $H|n\rangle = E_n|n\rangle$. Leiten Sie die „Summenregel von THOMAS, REICHE und KUHN“,

$$\sum_n \left|\widehat{Q}_{ln}\right|^2 (E_n - E_l) = \frac{\hbar^2}{2m},$$

her.
Anleitung: Schreiben Sie den Operator von Teil a) in der Energiedarstellung aus und benutzen Sie dann das Resultat aus a).

Aufgabe 4.2 (0 Punkte): Unitäre Operatoren

a) Sei A ein selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie, dass dann der Operator $U := \exp(\hat{\imath}A)$ unitär ist.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte eines unitären Operators den Betrag 1 haben.

Aufgabe 4.3 (14 Punkte): Energiedarstellung II

Ein System besitze zwei orthonormale Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$. In dieser Basis sei der Hamilton-Operator durch

$$H = \begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ \varepsilon & a \end{pmatrix} \qquad\qquad a, \varepsilon \in \mathbb{R}$$

gegeben. Eine weitere Observable hat in dieser Darstellung die Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1-\hat{\imath} \\ 1+\hat{\imath} & 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Matrix-Darstellungen von H und A in der Energie-Eigenbasis.

b) Wie lautet die Transformationsmatrix, die in die Energiedarstellung überführt?

c) Berechnen Sie die Matrix $\exp(-\hat{\imath}tH)$ mit $t \in \mathbb{R}$.