Übungsaufgaben zur Quantenmechanik

Blatt 3

Aufgabe 3.1 (0 Punkte): Spur eines Operators

Die Spur eines linearen Operators A in der Darstellung $\{|\alpha\rangle\}$ ist definiert als die Summe der Diagonalelemente

$$\mathrm{Tr}A := \sum\!\!\!\!\!\!\int_\alpha \langle\alpha|\, A\, |\alpha\rangle\,,$$

sofern diese Summe konvergiert (Operator der Spurklasse, 'trace class'-Operator).

a) Es seien $\{|a_i\rangle\}$ und $\{|b_i\rangle\}$ zwei diskrete Basen. Zeigen Sie, dass die Spur eines Operators A unabhängig von der Wahl der Basis ist. Zeigen Sie selbiges für den Basiswechsel zwischen zwei kontinuierlichen Basen $\{|\alpha\rangle\}$ und $\{|\beta\rangle\}$.

b) Zeigen Sie für zwei beliebige Hilbert-Vektoren $|\psi_1\rangle\,, |\psi_2\rangle$:

$$\mathrm{Tr}\left(|\psi_1\rangle\, \langle\psi_2|\right) = \langle\psi_2|\psi_1\rangle$$

c) Zeigen Sie, dass die aus der linearen Algebra bekannten Eigenschaften der Spur auch für die Hilbertraum-Spur gelten:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(A+B) &= \mathrm{Tr}A + \mathrm{Tr}B\\ \mathrm{Tr}(AB) &= \mathrm{Tr}(BA).\end{aligned}$$

Folgern Sie aus der zweiten Identität die Invarianz der Spur $\mathrm{Tr}(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n)$ unter zyklischer Vertauschung der Operator-Faktoren.

d) Zeigen Sie: $\mathrm{Tr}A$ ist invariant unter der Ähnlichkeitstransformation $A \to A' = S^{-1}AS$ mit einem invertierbaren linearen Operator S.

Aufgabe 3.2 (6 Punkte): Operatorwertige Funktionen

Es seien X der Ortsoperator und P der Impulsoperator eines quantenmechanischen Teilchens in einer Dimension. Die operatorwertige Funktion $F(P)$ sei eine Potenzreihe in P mit komplexen Koeffizienten. Stellen Sie den Kommutator

$$[X, F(P)]$$

als Linearkombination der Funktion F und ihrer Ableitungen $F^{(n)}$ dar, welche formal durch die abgeleitete Potenzreihe definiert sind.

Aufgabe 3.3 (5 Punkte): Unitäre Operatoren

Ein auf dem gesamten Hilbertraum $\mathcal{H}$ definierter Operator U mit der Eigenschaft, dass $UU^{+} = U^{+}U = \mathbb{1}$ gilt, heißt *unitär*.

a) Zeigen Sie, dass ein unitärer Operator U Skalarprodukte invariant lässt.

b) Es seien U_{ij} die Matrixelemente des Operators U in der diskreten Basis $\{|v_i\rangle\}$. Zeigen Sie die Gleichung

$$\sum_k U_{ki}^{*} U_{kj} = \delta_{ij}.$$

c) Wie sieht diese Beziehung im Fall einer kontinuierlichen Basis $\{|\omega\rangle\}$ aus?