Übungsaufgaben zur Quantenmechanik

Blatt 2

Aufgabe 2.1 (0 Punkte): Projektoren

Es sei der Operator $\mathcal{O}$ ein Polynom oder allgemeiner eine Potenzreihe in den Stufenoperatoren a und a^+ des eindimensionalen harmonischen Oszillators ($\mathcal{O} \in \mathbb{C}[[a, a^+]]$). Das *Normalprodukt* $:\mathcal{O}:$ von $\mathcal{O}$ ist definiert als derjenige Operator, bei dem in jedem Term von $\mathcal{O}$ die Absteige-Operatoren a nach rechts geschrieben werden, zum Beispiel:

$$:2a^2(a^+)^3a(a^+)^2 - \hat{\imath}aa^+a: = \; 2(a^+)^5a^3 - \hat{\imath}a^+a^2.$$

a) Berechnen Sie die Differenz $\mathcal{O} - :\mathcal{O}:$ für den Operator $\mathcal{O} = \frac{1}{2}(aa^+ + a^+a)$.

b) Beweisen Sie die Darstellung

$$|0\rangle\langle 0| \; = :\exp(-a^+a):$$

des Projektors auf den Grundzustand des harmonischen Oszillators.
Hinweis: Zeigen Sie, dass diese Operator-Identität für die Wirkung auf einen beliebigen Oszillator-Zustand $|n\rangle$ gilt und folgern Sie die allgemeine Aussage aus der Vollständigkeit der Basis $\{|n\rangle\}$.

c) Geben Sie mit Hilfe von b) den Projektor auf den n-ten angeregten Oszillatorzustand $|n\rangle\langle n|$ als Funktion der Stufenoperatoren an.

Aufgabe 2.2 (7 Punkte): Paritätsoperator

Es sei Λ der Paritätsoperator, definiert durch seine Wirkung auf Orts-Eigenfunktionen: $\Lambda|\vec{x}\rangle = |-\vec{x}\rangle$. Ein Operator B heißt gerade, wenn er mit dem Paritätsoperator vertauscht, also $[B, \Lambda] = 0$ gilt, beziehungsweise ungerade, wenn er mit dem Paritäts-Operator antivertauscht, das heißt $0 = \{B, \Lambda\} := B\Lambda + \Lambda B$. Zu welcher Klasse gehören die folgenden Operatoren:

a) Der Ortsoperator X und der Impuls-Operator P,

b) der Paritätsoperator Λ selbst,

c) die Operatoren P^2 und X^2?