Übungsaufgaben zur Quantenmechanik
Blatt 14

Aufgabe 14.1 (0 Punkte): Mehrteilchen-Wellenfunktionen

Welche zusätzlichen Forderungen muss man an die auftretenden Parameter der folgenden Operatoren H_i stellen, damit sie mit allen Permutationsoperatoren $P \in \mathcal{S}_N$ vertauschen?

$$\textbf{a)}\;\; H_a = \frac{1}{2m_1}\vec{P}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\vec{P}_2^2 + \frac{\gamma_1}{|\vec{r}_1|} + \frac{\gamma_2}{|\vec{r}_2|} + \frac{\gamma_{12}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\textbf{b)}\;\; H_b = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m}\vec{P}_i^2 + \alpha \exp(-\sum_{i<j} \beta_{ij}|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2)$$

Warum handelt es sich bei dem Operator in b) nicht um eine 2-Teilchen-Wechselwirkung?

Aufgabe 14.2 (5 Punkte): Antisymmetrisierung

Berechnen Sie die vollständig antisymmetrisierte Wellenfunktion $A\psi$ zu den folgenden Wellenfunktionen von 2-Elektronen-Systemen:

a) $\psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1(\vec{r}_1)\varphi_2(\vec{r}_2)\left(\chi_{1,\sigma_1}\chi_{2,\sigma_2} - \chi_{1,\sigma_2}\chi_{2,\sigma_1}\right)$

b) $\psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(\vec{r}_1)\varphi_2(\vec{r}_2) - \varphi_1(\vec{r}_2)\varphi_2(\vec{r}_1)\right)\chi_{1,\sigma_1}\chi_{2,\sigma_2}$

Aufgabe 14.3 (10 Punkte): Symmetrisierungs-Operator

Für Bosonen tritt an die Stelle des Antisymmetrisierungs-Operators A der Symmetrisierungs-Operator S.

a) Wie lautet S für ein N-Teilchen-System ausgedrückt durch die Permutationsoperatoren $P \in \mathcal{S}_N$?

b) Zeigen Sie, dass S idempotent ist und $SA = AS = 0$ gilt.

c) Schreiben Sie die vollständig symmetrisierte Wellenfunktion eines 3-Teilchen-Systems auf, bei dem sich die einzelnen Teilchen in den 1-Teilchen-Zuständen α_1, α_2 und α_3 befinden. *Hinweis:* Bedenken Sie, dass die α_i nicht paarweise verscheiden sein müssen.

Aufgabe 14.4 (0 Punkte): Zerfälle von Mehrteilchen-Systemen

Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion eines Systems zweier identischer spinloser Teilchen, welche zugleich Eigenfunktion des Gesamtdrehimpuls-Operators ist, eine gerade Quantenzahl l besitzt. *Hinweis:* Argumentieren Sie mit dem Verhalten der Kugelflächenfunktionen Y_{lm} unter Spiegelung $\vec{r} \to -\vec{r}$.
Verwenden Sie das Ergebnis dazu, die Möglichkeit des Zerfalls

$$^{8}_{4}\mathrm{Be} \to \, ^{4}_{2}\mathrm{He} + \, ^{4}_{2}\mathrm{He}$$

zu untersuchen, wenn sich das Beryllium-Atom in einem Zustand mit Quantenzahl des Gesamt-Drehimpulses $l = 1$ befindet.

Aufgabe 14.5 (10 Punkte): 2-fach besetzter Oszillator

Zwei nicht miteinander wechselwirkende Teilchen bewegen sich in einem Oszillator-Potential $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ in einer Dimension.

a) Wie lautet der Grundzustand des Gesamtsystems, wenn es sich

1. um Fermionen handelt oder
2. die Teilchen Bosonen sind?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte und den Erwartungswert $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ für den Zustand der Energie $E = 2\hbar\omega$ in den beiden Fällen. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 14.6 (Gutes Gewissen): Klausurvorbereitung

Wiederholen Sie schleunigst den verbleibenden Stoff der Vorlesung (H-Atom, QM Teilchen im elektromagnetischen Feld, Spin, Störungsrechnung, etc.)!!!