Übungsaufgaben zur Quantenmechanik
Blatt 13

Aufgabe 13.1 (0 Punkte): Störungsrechnung für ein einfaches Modellsystem

In einem dreidimensionalen Hilbert-Raum sei der „Hamilton-Operator" eines Spielzeugmodells durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & C & 0 \\ C & 3 & 0 \\ 0 & 0 & C-2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die „Energie-Eigenwerte" dieses Systems.

b) Berechnen Sie eine Näherung für diese Eigenwerte, indem Sie das System als eine Störung des diagonalen Systems $\mathrm{diag}(1, 3, -2)$ mit Hilfe der Störungsrechnung bis zur zweiten Ordnung einschließlich untersuchen.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse. *Hinweis:* Eine geeignete Entwicklung der exakten Eigenwerte lässt eine Identifikation der mittels Störungsrechnung erhaltenen Terme zu.

Aufgabe 13.2 (8 Punkte): Endliche Kernausdehnung im H-Atom

Die endliche Kernausdehnung im H-Atom lässt sich durch ein Potential der Form $V(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\left(1 - \exp(-r/b)\right)$ berücksichtigen, wobei der Parameter b etwa der Kernradius ist. Berechnen Sie störungstheoretisch die erste Korrektur zur Grundzustandsenergie.

Aufgabe 13.3 (13 Punkte): Störungsrechnung beim harmonischen Oszillator

Ein harmonischer Oszillator in zwei Raumdimensionen mit Frequenz ω hat den Hamilton-Operator

$$H_0 = \tfrac{1}{2m}\vec{P}^2 + \tfrac{m\omega^2}{2}\vec{Q}^2 \ .$$

Untersuchen Sie das durch den Hamilton-Operator

$$H = H_0 + H_1$$

mit $H_1 := \lambda m\omega^2\, XY$ beschriebene System

a) mit Hilfe der Störungsrechnung erster Ordnung für den zweifach entarteten ersten angeregten Zustand des Systems H_0 und

b) durch exaktes Lösen des Eigenwertproblems für den Operator H. *Hinweis:* Führen Sie dazu die Koordinaten $U := \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$ und $V := \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y)$ ein.

Vergleichen und diskutieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 13.4 (nix): Klausurvorbereitung

Denken Sie über Darstellungen, Darstellungswechsel, Zeitentwicklung sowie besondere Typen von Operatoren und deren spezielle Eigenschaften nach.