Übungsaufgaben zur Quantenmechanik
Blatt 12

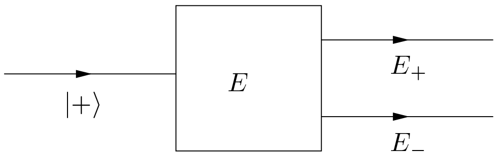
Vorab einige kleine Hinweise:

Es existieren notwendige Voraussetzungen für die Teilnahme an der Klausur! Diese sind zum einen die regelmäßige Teilnahme an den Übungen und zum anderen eine Punktzahl in den Übungsaufgaben, die 40% der erreichbaren Punktzahl übersteigt. Gerade erstgenannter Punkt wird anscheinend nicht von allen sehr ernst genommen.

Die Übungszettel können Montagnachmittag in einer Holzkiste, die vor dem Raum 412 im Institut für Theoretische Physik I aufgestellt sein sollte, deponiert werden. Andernfalls können sie dienstags im Hörsaal AP bis $9^{\underline{14}}$ abgegeben werden. Verspätet abgegebene Zettel werden markiert und jeder dritte markierte Zettel bei der Korrektur nicht berücksichtigt!

Aufgabe 12.1 (16 Punkte): Drehung von Spinoren

Ein Strahl aus Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen, welche in dem Eigenzustand „up" der z-Komponente des Spins präpariert sind, wird in einem Stern-Gerlach-Apparat E in die Eigenzustände E_+ und E_- des Spins bezüglich der Richtung $\vec{e} = (\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$ aufgespalten:



a) Durch welche Spinoren werden die Zustände E_+ und E_- beschrieben?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man den Zustand E_+, mit welcher E_-?

c) Die beiden Strahlen E_+ und E_- werden wieder zusammengeführt (zur Interferenz gebracht). Welcher Zustand ergibt sich?

d) In den Strahl E_- wird eine Apparatur eingefügt, welche die Teilchen im Ortsraum um einen Winkel von 360° dreht. Welcher Zustand ergibt sich, wenn der so manipulierte Strahl E'_- mit E_+ zur Interferenz gebracht wird?

e) Existiert eine Observable $\mathcal{O}$, durch deren Messung man die Zustände E_- und E'_- unterscheiden kann?

f) Welches Ergebnis erhält man, wenn die Drehapparatur um einen beliebigen Winkel α anstelle der 360° dreht?

g) Wie ließe sich eine solche Drehapparatur realisieren?

Aufgabe 12.2 (7 Punkte): Drehungen von Spinoren

Betrachten Sie Drehungen von der Gestalt, dass die z-Achse $(0, 0, 1)$ auf den Vektor $(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$ mit vorgegebenen Parametern ϑ und φ abgebildet wird.

a) Geben Sie einen Drehvektor $\vec{\alpha}^{(1)} = \alpha\vec{n}$ an, so dass die oben beschriebene Drehung eine Drehung um den Vektor $\vec{n}$ mit dem Winkel α ist. Wie sieht dann die Matrix $U_S^{(1)}$ aus, die die entsprechende Drehung im Spin-Raum vermittelt?

b) Eine solche Drehung kann auch durch Hintereinanderschalten einer Drehung $R^{(2,1)}$ mit dem Winkel ϑ um die y-Achse $(0, 1, 0)$ und anschließende Drehung $R^{(2,2)}$ mit dem Winkel φ um die z-Achse erzeugt werden. Berechnen Sie die korrespondierenden Drehmatrizen im Spinraum: $U_S^{(2,1)}$ und $U_S^{(2,2)}$ sowie den Operator der kompletten Drehung im Spinraum als Produkt dieser beiden Matrizen.

c) Berechnen Sie diejenigen Spinoren, die sich nach einer Drehung entsprechend den verschidenen Vorschriften a) und b) aus einem Spin-„up" Spinor $|+\rangle$ ergeben. Wodurch unterscheiden sich die beiden resultierenden Spinoren?

Aufgabe 12.3 (0 Punkte): Isospin

Neutronen und Protonen sind Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen annähernd identischer Masse. Diese Tatsache brachte dereinst Physiker auf die Idee, sie als zwei verschiedene Zustände eines allgemeineren Objekts zu beschreiben: das Isospin-Dublett.

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

Der Isospin-Operator $\vec{I}$ ist dabei durch

$$\vec{I} = \tfrac{1}{2}\vec{\tau}$$

mit τ_1, τ_2, τ_3, den bekannten Paulischen Spinmatrizen, gegeben. Da Proton und Neutron selbst einen „gewöhnlichen" Spin tragen ist das Nukleon N also mit einer „gewöhnlichen" Spin-Quantenzahl sowie einer Isospin-Quantenzahl ausgestattet. Sei nun $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ eine Basis des Spin-Raumes $\mathcal{H}_2^{(S)}$ und $\{|\nu_+\rangle, |\nu_-\rangle\}$ eine Basis des Isospin-Raumes $\mathcal{H}_2^{(I)}$. Ein Nukleon-Zustand N ist dann ein Element von $\mathcal{H} := \mathcal{H}_2^{(S)} \otimes \mathcal{H}_2^{(I)}$ mit der Basis

$$\{|+\rangle \otimes |\nu_+\rangle, |-\rangle \otimes |\nu_+\rangle, |+\rangle \otimes |\nu_-\rangle, |-\rangle \otimes |\nu_-\rangle\}.$$

a) Von welcher Gestalt ist die Wellenfunktion eines Nukleons? *Hinweis:* Welche Gestalt hat die Wellenfunktion eines Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchens?

b) Wie lautet die Matrix-Gestalt der

- Spin-Operatoren S_1, S_2, S_3,
- der Isospin-Operatoren I_1, I_2, I_3 sowie des Operators
- $\mathcal{O} := S_1 I_3$,

bezüglich obiger Basis von $\mathcal{H}$?

c) Geben Sie einen Operator $\mathcal{Q}$ an, der die Ladung des Nukleons misst.

Aufgabe 12.4 (freiwillig): Klausurvorbereitung

Frischen Sie ihr Wissen über die quantenmechanische Behandlung des harmonischen Oszillators auf.