Übungsaufgaben zur Quantenmechanik
Blatt 11

Aufgabe 11.1 (0 Punkte): Geladener Weihnachtsmann mit polarisiertem Spin

Betrachten Sie einen elementar geladenen Spin-$\frac{1}{2}$ Weihnachtsmann, dessen Spin in eine Richtung $\vec{n}_1$ polarisiert ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten bei Messung des Spins in Richtung $\vec{n}_2$ jeweils die Eigenwerte $\pm\frac{\hbar}{2}$ auf? ($\vec{n}_1^2 = \vec{n}_2^2 = 1$). Wie interpretieren Sie dieses Ergebnis?

Aufgabe 11.2 (10 Punkte): Quantisierung des Christbaumes

Der Aufsatz auf die Spitze des Weihnachtsbaumes im Heisenberg-Institut für Quantenchristmatismus, welches sich am Äquator befindet, ist ein frei grehbares Spin-$\frac{1}{2}$-Objekt. Bei Aufstellung des Baumes werde die Spitze so präpariert, dass der Aufsatz in z-Richtung zeigt, was selbst unter Quanten-Physikern als natürlich gilt. Ein schlauer Doktorand bemerkte sofort, dass diese Präparation zu dem Eigenwert $\frac{\hbar}{2}$ eines Operators S_z gehört. Aufgrund des Erdmagnetfeldes, welches im Institut genau in x-Richtung verläuft, stellt ein noch viel klügerer Professor die Behauptung auf, dass diese Ausrichtung leider im Laufe der Zeit nicht erhalten bleiben wird. Nach dreitägiger Rechnung haben die 50 Mitarbeiter eine allgemeine Formel für die Ausrichtung der Weihnachtsbaumspitze zu späteren Zeitpunkten t erhalten. Sie machen sich sogleich an die Prüfung ihrer Ergebnisse, indem sie eine Messung des „Umlieg-Operators“, welchen sie in der Theorie mit S_y abgekürzt haben, vornehmen. Mit welcher Warhscheinlichkeit werden die klugen Leute hier den Wert $\frac{\hbar}{2}$ ermitteln? Mit welcher Wahrscheinlichkeit konnte diese Wahrscheinlichkeit aus der aufgestellten Theorie vorhergesagt werden?

Aufgabe 11.3 (15 Punkte): Probleme mit Mandeln

Der Weihnachtsmann überfliege nach getaner Arbeit den Nordpol unseres Planeten. Hier herrscht bekanntermaßen ein großes Magnetfeld $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$ in z-Richtung. An diesem Abend ist es besonders groß, nämlich von 1 T Stärke. Ein von der Sonne ausgelöster magnetischer Wirbelsturm erzeugt just in diesem Moment ein zusätzliches, 10 mal schwächeres und in der x-y-Ebene rotierendes Magnetfeld: $B_{\text{Sturm}} = B_A(\cos(\omega t), -\sin(\omega t), 0)$. Das nun Folgende ergeignet sich sooo schnell, dass sich der rämliche Anteil der Wellenfunktion während des Geschehens nicht ändert, also vernachlässigt werden kann.
Auf dem Schlitten des Weihnachtsmannse befinden sich noch einige Mandelkerne, welch ja bekannterweise Spin-$\frac{1}{2}$-Objekte mit einem magnetischem Moment von $\mu_{\text{Spin}} = 17 \cdot \frac{e_0 \hbar}{2\, c\, m_p}$ sind. Vor Beginn des Magnetsturmes waren diese alle in „up“-Richtung präpariert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zu einem Zeitpunkt t nach Einsetzen des Magnetsturmes die Kerne „umgekippt“ sind, das heisst eine Messung an ihnen den „down“-Zustand signalisieren würde. Bei welcher Frequenz ω des Sturms ist die Wahrscheinlichkeit für das „Umkippen“ maximal?