Übungsaufgaben zur Quantenmechanik
Blatt 10

Aufgabe 10.1 (0 Punkte):

a) Durch welche Matrix $S_{\vec{n}}$ wird die Komponente des Spins in Richtung des Einheitsvektors $\vec{n} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$ beschrieben?

b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren und die Eigenwerte von $S_{\vec{n}}$.

Aufgabe 10.2 (15 Punkte):

Ein Spinor χ habe in der üblichen Darstellung, in der S_3 diagonal ist, die Form

$$\chi = N\begin{pmatrix} 1+\hat{\imath} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Normierungskonstante N.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(m_z = \frac{\hbar}{2})$ und $P(m_z = -\frac{\hbar}{2})$ für die möglichen Resultate einer Messung von S_3.

c) Berechnen Sie die analogen Wahrscheinlichkeiten für Messungen von S_1 respektive S_2.

d) Berechnen Sie folgende Größen:

- $\langle S_1\rangle$, $\langle S_2\rangle$, $\langle S_3\rangle$,
- $\langle S_1^2\rangle$, $\langle S_2^2\rangle$, $\langle S_3^2\rangle$,
- ΔS_1, ΔS_2, ΔS_3

sowie die Summe $\langle S_1^2\rangle + \langle S_2^2\rangle + \langle S_3^2\rangle$. Rechnen Sie weiterhin nach, dass die Unschärfen ΔS_i der allgemeinen Unschärferelation genügen.

Aufgabe 10.3 (6 Punkte):

a) Zeigen Sie, dass für gewöhnliche reelle Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ die Beziehung

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\mathbb{1} + \hat{\imath}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$$

gilt.

b) Berechnen Sie die Matrix

$$\exp(\hat{\imath}\,\vec{a}\cdot\vec{\sigma}),$$

wobei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Drücken Sie das Ergebnis als Linearkombination der Matrizen $\mathbb{1}$, σ_1, σ_2 und σ_3 aus.