Übungsaufgaben zur Quantenmechanik
Blatt 1

Aufgabe 1.1 (12 Punkte): Energiedarstellung des harmonischen Oszillators

Es seien $|n\rangle$ die Eigenzustände des eindimensionalen harmonischen Oszillators, a und a^+ seine „Stufenoperatoren“ mit $a := \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}\left(\omega X + \frac{\mathrm{i}}{m}P\right)$.

a) Berechnen Sie a^+, den Kommutator von a mit a^+ und zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator die Form $a^+a + \frac{1}{2}$ hat.

b) Berechnen Sie die Matrixelemente von X und P: $\langle m|X|n\rangle$ und $\langle m|P|n\rangle$.

c) Berechnen Sie die Matrixelemente der kinetischen und die der potenziellen Energie. Was besagt der Virialsatz der klassischen Mechanik?

d) Berechnen Sie die Matrixelemente der Operator-Produkte XP und PX sowie die Differenz dieser beiden Matrizen.

Hinweis: Setzen Sie die auftretenden Operatoren aus den Leiteroperatoren zusammen und benutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte Wirkungsweise von a und a^+ auf die Eigenzustände $|n\rangle$ sowie deren Orthonormiertheit.

Aufgabe 1.2 (0 Punkte): Normierung der Oszillator-Eigenfunktionen

Berechnen Sie für die Oszillator-Eigenfunktionen

$$u_n(x) = N_n\, H_n(\xi)\exp(-\tfrac{1}{2}\xi^2) \qquad \text{mit } \xi = \tfrac{x}{b}$$

den Wert des Orthonormierungsintegrals

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_m^*(x)u_n(x)\,dx$$

und daraus für $m = n$ den zur Normierung notwendigen Wert der Konstanten N_n. Diskutieren Sie die „Eichfreiheit“ bei der Wahl von N_n.
Hinweis: Betrachten Sie das Produkt $\exp(-\xi^2)S(\xi,z)S(\xi,w)$ mit der erzeugenden Funktion $S(\xi,z) = \exp(2z\xi - z^2)$ der Hermite-Polynome und

seine Entwicklung nach Potenzen von z und w. Integrieren Sie dann beiderseits über ξ. Für die erzeugende Funktion $S(\xi, z)$ gilt der Zusammenhang: $S(\xi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\xi) \frac{z^n}{n!}$ (können Sie dies sogar zeigen?)

Aufgabe 1.3 (15 Punkte): Der Oszillator in der Ortsdarstellung

Durch Verallgemeinerung der Methode von Aufgabe 1.2 läßt sich das Ergebnis von Aufgabe 1.1 in der Ortsdarstellung reproduzieren. Hierzu verwendet man als erzeugende Funktion das Produkt $\exp(2\lambda\xi - \xi^2) S(\xi, z) S(\xi, w)$ und seine Entwicklung nach Potenzen von z, w und λ.

a) Integrieren Sie beide Seiten über ξ und berechnen Sie daraus die Größen

$$(x^k)_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} u_m^*(x) x^k u_n(x)\, dx \qquad \text{für } k \in \{1, 2\},$$

die sogenannten „Matrixelemente des Operators x^k in der Basis der Oszillator-Eigenfunktionen“.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Computer-Algebra Systems die linke obere 3×3 Untermatrix von $(x^k)_{mn}$ für $k \in \{0, 1, 2\}$. Die Lösung sollte in Form eines Ausdrucks des Programmlaufs eingereicht werden.