Übungen zur Quantentheorie (Diplomstudiengang)

WS 97/98 Blatt 9

Aufgabe 9.1 (18 Punkte): Nichtstationärer Oszillatorzustand II

a) Folgern Sie aus den Ergebinssen der Aufgabe 8.2, dass sich die dort behandelten nichtstationären Zustände $|\psi(t_0)\rangle$ des harmonischen Oszillators in der Form

$$|\psi(t_0)\rangle = \exp(-\tfrac{1}{2}\frac{H_{\text{klass.}}}{\hbar\omega})\exp(\tfrac{\hat{\imath}}{2}\frac{p_0 x_0}{\hbar})\exp(z_0 a^+)|0\rangle \qquad (*)$$

schreiben lassen. *Hinweis:* Wenden Sie auf die in 8.2 c) gewonnene Darstellung nochmals die Glaubersche Identität an.
Geben Sie den Zustand $|z_0\rangle := \exp(z_0 a^+)|0\rangle$ (sogenannter *kohärenter Oszillator-Zustand)* in der Basis der Oszillator-Eigenzustände $|n\rangle$ an.

b) Benutzen Sie den Zeitentwicklungs-Operator $U(t, t_0) = \exp(-\frac{\hat{\imath}}{\hbar}(t-t_0)H)$ um den nichtstationären Zustand $|\psi(t)\rangle$ aus dem Zustand $|\psi(t_0)\rangle$ zu erzeugen. Schreiben Sie den nichtstationären Zustand zur Zeit t in der Basis $|n\rangle$ der Oszillator-Eigenzustände. *Hinweis:* Bringen Sie den Zustand dafür in die Form $(*)$ mit zeitabhängig modifiziertem $z(t)$ statt z_0 und einer zusätzlichen Phase.

c) Geben Sie die Erwartungswerte $\langle X\rangle_t$ und $\langle P\rangle_t$ in dem Zustand $|\psi(t)\rangle$ an. *Hinweis:* Mit dem Hinweis zu Teil b) und den Rechnungen von Aufgabe 8.2 wird dieser Aufgabenteil stark vereinfacht.

Aufgabe 9.2 (10 Punkte): Transformation im zweidimensionalen Hilbertraum

Die Vektoren $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle$ seien eine Orthonormalbasis eines zweidimensionalen unitären Raumes (α-Darstellung). Eine weitere Basis sei durch

$$\begin{aligned} |\beta_1\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha_1\rangle + i\,|\alpha_2\rangle) \\ |\beta_2\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha_1\rangle - i\,|\alpha_2\rangle) \end{aligned}$$

gegeben (β-Darstellung).

a) Berechnen Sie die Transformationsmatrix T, die den Basiswechsel von der α-Darstellung vermittelt. Definition von T:

$$|\alpha_i\rangle = \sum_{j=1}^{2} T_{ji} \, |\beta_j\rangle \quad , \quad i \in \{1, 2\} \, .$$

Zeigen Sie, dass T unitär ist.

b) Ein Vektor $|\psi\rangle$ sei in der α-Darstellung durch

$$\psi^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \psi_1^{(\alpha)} \\ \psi_2^{(\alpha)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \alpha_1 | \psi \rangle \\ \langle \alpha_2 | \psi \rangle \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Transformieren Sie $|\psi\rangle$ in die β-Darstellung.

c) Ein linearer Operator A sei in der α-Darstellung durch die Matrix

$$A^{(\alpha)} = \left(A_{ij}^{(\alpha)} \right)_{1 \leq i,j \leq 2} = \Big(\langle \alpha_i | \, A \, | \alpha_j \rangle \Big)_{1 \leq i,j \leq 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Transformieren Sie A in die β-Darstellung.