Übungen zur Quantentheorie (Diplomstudiengang)

WS 97/98 Blatt 8

Aufgabe 8.1 (9 Punkte): Spur eines Operators

Unter der Spur eines linearen Operators A in der Darstellung $\{|\alpha\rangle\}$ versteht man die Summe der Diagonalelemente

$$TrA = \sum\!\!\!\!\!\!\int_\alpha \langle\alpha|\, A\, |\alpha\rangle$$

sofern diese Summe konvergiert (Operator der Spurklasse, 'trace class'-Operator).

a) Zeigen Sie für zwei beliebige Hilbert-Vektoren $|\psi_1\rangle\,, |\psi_2\rangle$:

$$Tr\left(|\psi_1\rangle\,\langle\psi_2|\right) = \langle\psi_2|\psi_1\rangle$$

b) Zeigen Sie, dass die aus der linearen Algebra bekannten Eigenschaften der Spur auch für die Hilbertraum-Spur gelten:

$$Tr(A+B) = TrA + TrB$$
$$Tr(AB) = Tr(BA).$$

Folgern Sie aus der zweiten Identität die Invarianz der Spur $Tr(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n)$ unter zyklischer Vertauschung der Operator-Faktoren.

c) Zeigen Sie: TrA ist invariant unter der Ähnlichkeitstransformation $A \to A' = S^{-1}AS$ mit einem invertierbaren linearen Operator S.

Aufgabe 8.2 (18 Punkte): Nichtstationärer Oszillatorzustand I

Der Zustand eines harmonischen Oszillators zum Zeitpunkt t_0 sei gegeben durch:

$$|\psi(t_0)\rangle = \exp(\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}p_0 X)\exp(-\tfrac{\mathrm{i}}{\hbar}x_0 P)|0\rangle, \tag{$*$}$$

wobei $|0\rangle$ der Grundzustand ist.

a) Geben Sie die Ortsdarstellung $\langle x|\psi(t_0)\rangle$ von $(*)$ an.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle X\rangle_{t_0}$ und $\langle P\rangle_{t_0}$ in diesem Zustand. *Hinweis:* Verwenden Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel.

c) Zeigen Sie, dass sich $(*)$ in der Form

$$|\psi(t_0)\rangle = \exp(\tfrac{\mathrm{i}}{2}\frac{x_0 p_0}{\hbar})\underbrace{\exp(z_0 a^+ - z_0^* a)}_{\equiv U(z),\ \text{siehe 7.2}}|0\rangle$$

mit der dimensionslosen komplexen Zahl $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{b}{\hbar}p_0 - \frac{\mathrm{i}}{b}x_0)$ sowie dem Operator $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{b}{\hbar}P - \frac{\mathrm{i}}{b}X)$ schreiben läßt. *Hinweis:* Verwenden Sie die in 7.1 bewiesene Glaubersche Identität.
Welche Bedeutung hat $|z_0|^2$?