Übungen zur Quantentheorie (Diplomstudiengang)

WS 97/98 Blatt 7

Aufgabe 7.1 (15 Punkte): Glaubersche Operatoridentität

Zeigen Sie, dass für zwei lineare Operatoren A und B mit $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$ die *Glaubersche Identität*

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)\exp(-\tfrac{1}{2}[A,B]) \qquad (*)$$

erfüllt ist. Gehen Sie dabei in folgenden Schritten vor:

a) Zeigen Sie, dass die operatorwertige Funktion $f(\lambda) := \exp(\lambda A)\exp(\lambda B)$ der Gleichung

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = (A + \exp(\lambda A) B \exp(-\lambda A))\, f(\lambda) \qquad (**)$$

genügt.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der *Baker-Campbell-Hausdorff*-Formel, dass die rechte Seite von $(**)$ identisch mit

$$(A + B + \lambda[A,B]) f(\lambda)$$

ist.

c) Begründen Sie, dass man diese Dgl. wie eine gewöhnliche Dgl. behandeln kann und geben Sie die Lösung für $f(\lambda)$ an. Folgern Sie damit die Behauptung $(*)$.

Aufgabe 7.2 (12 Punkte): Harmonischer Oszillator (Leiteroperatoren)

Die Leiteroperatoren $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{b}{\hbar}P - \frac{\mathrm{i}}{b}X)$ und $a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{b}{\hbar}P + \frac{\mathrm{i}}{b}X)$ des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators genügen der Vertauschungsrelation $[a, a^+] = 1$. Wir definieren Operatoren $U(z) = \exp(za^+ - z^*a)$, die von einer komplexen Variablen z abhängen.

a) Zeigen Sie, dass $U(z)U(w) = U(z+w)e^{-\frac{1}{2}(z^*w - zw^*)}$ gilt. Schließen Sie hieraus, dass $U(z)$ unitär ist.
Hinweis: Verwenden Sie die in 7.1 bewiesene Glaubersche Identität.

b) Beweisen Sie die Gleichungen $U^+(z)aU(z) = a + z$ und $U^+(z)a^+U(z) = a^+ + z^*$. Die Operatoren $U(z)$ bewirken also eine räumliche Verschiebung der Leiteroperatoren. *Hinweis:* Benutzen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel.